Lehrbuch

der

niedern Analysis,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Universität, an der Königl. Bau-Akademie, und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Zweyter Theil,

Algebra und Analysis des Endlichen enthaltend.

Zweyte umgearbeitete, durch viele neue erläuternde Beyspiele verdeutlichte und mit einer Figurentafel versehene Ausgabe.

Berlin, 1829.

Bei T. H. Riemann,
Schloßfreiheit Nr. 9.

Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Universität, an der Königl. Bau-Akademie und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Zweyter Theil,

Algebra und Analysis des Endlichen enthaltend.

Zweyte umgearbeitete, durch viele neue erläuternde Beyspiele verdeutlichte und mit einer Figurentafel versehene Ausgabe.

Berlin, 1829.

Bei T. H. Riemann,
Schloßfreiheit Nr. 9.

Vorrede.

Mit wenigen Worten möge der Leser noch einmal darauf aufmerksam gemacht werden, daß dieses in 8 — 9 Theilen unter dem Titel: Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Mathematik, zu gebende Lehrbuch, wovon gegenwärtig der 2te Theil in der 2ten Auflage erscheint, keine andere Absicht hat, als für die gesammte Mathematik das zu werden, was Euklid's Elemente für die ersten Anfangsgründe der Geometrie sind. — Es ist aber gewiß nicht im Geiste des Euklides gearbeitet, wenn man ganze Potenzen definirt und aus einer Eigenschaft dieser ganzen Potenzen, die Bedeutung der negativen und der gebrochenen Potenzen ohne weiteres entnimmt, später aber mit Potenzen arbeitet, deren Exponent noch ganz allgemein oder bereits imaginär ist. Eben so wenig würde Euklid es

*

billigen, wenn er sehen könnte, wie man die Sinus, Kosinus, u. d. gl. aus dem Kreise entnimmt, also für sehr spezielle Fälle, nachher aber (im sogenannten höhern Kalkul) mit *Sin* x, *Cos* x, ꝛc. ꝛc. rechnet, wenn x noch ganz allgemein ist, so daß man gar nicht wissen kann, ob diese *Sin* x, *Cos* x, ꝛc. ꝛc. jene speziellen seyn werden oder nicht.

Diese Beyspiele statt aller. Der aufmerksam gemachte Beobachter findet nur zu bald, daß unsre bisherige Behandlung des Kalkuls an den meisten Stellen geradezu anti-Euklid'isch ist. Seit dem ersten Erscheinen der 2 ersten Theile dieses Systems haben Franzosen, darunter vorzüglich Cauchy (so wie früher schon Carnot) vieles gethan, und ihrerseits auf diesen unwissenschaftlichen und dürftigen Zustand der Analysis (des größten, umfassendsten uud wichtigsten Theils der Mathematik) aufmerksam gemacht; allein sie haben fast nur eingerissen, dagegen nichts besseres und haltbareres aufgebaut, ja (wie besonders der sonst treffliche Cauchy) oft gar nichts Allgemeines an die Stelle des Eingerissenen gesetzt.*) Das Wahre ist nur einfach. Das ganze Uebel ist aus der Ansicht hervorgegangen, daß der Kalkul es mit Größen zu thun habe. Dies mußte zu der unglücklichen Annahme der negativen Grö-

*) Cauchy hat sich nämlich zu sehr vereinzelt, so daß nach dem von ihm bis jetzt hierüber Gegebenen, ein allgemeiner Kalkul, ohne welchen doch der Analyst nicht existiren kann, genau genommen nicht mehr statt findet.

ßen, und zu den noch unglücklichern imaginären Grö-ßen führen und erstickte jede freiere geistigere Behandlung der Sache in ihrem Keime. Der gesammte Kalkul hat aber eine ganz andere Aufgabe zu lösen, als mit der Größe (quantitas; benannte Zahl) zu rechnen. Er hat die Auf-gabe „das Verhalten der 7 Operationen (Addiren, Subtra-hiren, Multipliziren, Dividiren, Potenziren, Radiziren, Loga-rithmiren) zu einander, die Gegensätze und Beziehungen der-selben, im Allgemeinen und mit allen aus der Natur dieser Operationen sich von selbst und nothwendig ergebenden Modifikationen fest zu stellen". Die Operationen selber (als bloße Verstandes-Operationen) werden von der unbe-nannten Zahl abstrahirt, welche letztere abermals ein abstrak-ter Begriff ist. — Diesem nach ist alles, was im Kalkul vorkommt, entweder eine unbenannte ganze Zahl, oder eine Zusammensetzung aus zwey oder mehr solchen (unbe-nannten ganzen) Zahlen durch eine oder mehre der Opera-tionen; nie aber eine Größe. Die Zusammensetzung durch Division $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{5}$, ꝛc. ꝛc., als benannte Zahl genommen, hat allein (außer der ganzen Zahl) Realität in der An-wendung auf Größen; aber als benannte Zahl genommen ist sie nicht Gegenstand des Kalkuls, sondern nur als unbe-nannte Zahl, d. h. als bloße Zusammensetzung durch die Operation. Dem „rechnen" heißt nichts anders als die Gesetze des Operirens, d. h. die einfachen Beziehungen und

Gegensätze der Operationen, auf gegebene zusammengesetztere Fälle, gegebenen Zwecken gemäß anwenden.

Der Verf. muß sich Glück wünschen, daß seine zahlreichen Zuhörer diese, mit unglaublicher Einfachheit und Konsequenz durchzuführenden Ansichten, mit wahrer Begeisterung aufnehmen, und daß mehre der eifrigsten und fähigsten darunter, diese Ansichten als öffentliche Lehrer in Deutschland immer mehr und mehr verbreiten; so schwer es dem Verf. auch anfänglich gemacht worden ist, seinem Streben Eingang zu verschaffen. Der abstrakteste Theil der gesammten Analysis steckt aber in dem gegenwärtigen 2ten Theile dieses Systems. Um daher auch solchen nützlicher zu werden, welche nicht seinen mündlichen Vorträgen beywohnen können, hat der Verf. in dieser 2ten Ausgabe sich alle Mühe gegeben, das Ganze noch mehr abzurunden, das dem gewöhnlichen Anfänger schwierigere mit mehr Beyspielen zu erläutern, und den Zusammenhang des Ganzen möglichst gut hervorzuheben, weil bey dem Erlernen der Mathematik durchaus nicht das Einzelne, sondern nur das in sich abgeschlossene Ganze Werth haben kann.

Die schönen Sätze der Konvergenz der Reihen von Cauchy und Gauls hat der Verf. abermals ausgelassen, weil diese Einzelheiten spätern Theilen dieses Systems vorbehalten bleiben müssen. Dagegen hat er der in ihrer An-

wendung so wichtigen Aggregaten-Lehre jetzt ein ganzes eigenes Kapitel gewidmet, nachdem er gesehen hat, wie seine Zuhörer sich derselben mit Leichtigkeit und mit dem entsprechenden Erfolge bedienen. Auch haben hie und da einige ältere und bekannte Mathematiker den Werth derselben anerkannt, wenn es ihnen auch in ihren Jahren schwer wird, sich dergestalt hinein zu studiren, daß sie sich derselben mit gleichem Erfolge bedienen könnten und möchten.

Die mehrdeutigen Ausdrücke in der Analysis (im Kalkul) sind für die Anwendungen nie ohne hohe Bedeutung; sie umfassen das, mehren besondern Fällen gemeinsame. In mathematischen Untersuchungen der höhern Physik findet man besonders Belege genug zu dieser Behauptung. Daher hält der Verf. die Sätze einer besondern Beachtung werth, welche über das Zusammengehören der speziellen Werthe eines solchen allgemeinen Ausdrucks, und namentlich der allgemeinen Potenzen, hingestellt worden sind. Sie sind in vielen Fällen die einzigen dem Verf. bekannten Hilfsmittel, um in den Anwendungen das, was für den einen besondern Fall statt findet, von dem zu unterscheiden, was zu jedem der übrigen besondern Fälle gehört.

Die mit kleinerer Schrift gedruckten Noten gehören nicht zum Texte, also überhaupt nicht zum System; sie sind nur bestimmt, um hie und da den Zusammenhang des ge-

rade behandelten Gegenstandes mit früher vielleicht gewohnt gewordenen Ansichten dem Anfänger zu veranschaulichen, müssen aber dann jedesmal als nicht vorhanden angesehen werden.

Der dritte Theil dieses Systems, als erster Theil der höhern Analysis, welcher die Elemente der Differenzial- und Integral-Rechnung, und zur Erleichterung des praktischen Integrirens noch 52 Integral-Tafeln enthält, verläßt unmittelbar nach Ostern 1829 die Presse.

Berlin am 1sten Januar 1829.

Dr. M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß des zweyten Theils.

Funfzehntes Kapitel.

Von den arithmetischen Progressionen, von den Faktoriellen, und von den figurirten Zahlen. (§. §. 333–357.) . . Pag. 1–31.

Erste Abtheilung. Von den arithmetischen Progressionen. Von den Faktoriellen und Fakultäten. (§. §. 333–353.) . . Pag. 1–24.

§. §. 333–34. Erklärung der arithmetischen Progressionen.

§. 335. Zwey Hauptsätze dieser Progressionen.

§. §. 336–38. Folgerungen daraus.

§. 339. Erklärung der Faktorielle.

§. 340. Die 5 Hauptformeln der Faktoriellen.

§. 341. Auch ist $a^{m|d} = a \cdot (a+d)^{m-1|d} = a^{m-1|d}[a+(m-1)d]$.

§. 342. Erklärung der Differenzfaktorielle.

§. 343. Sie hat immer eine bestimmte Bedeutung.

§. 344. Bedeutung von $a^{1|d}$, $a^{0|d}$, $a^{-\beta|d}$.

§. 345. Die Hauptsätze des (§. 340.) gelten auch noch für diese allgemeinern Differenzfaktoriellen.

§. 346. 47. Noch mehr Formeln der Faktoriellen, als Uebungsbeyspiele anzusehen.

§. 348. Erklärung der Fakultät m!

§. 349. Folgerungen daraus.

§. 350. Erklärung des Zeichens x_n.

§. 351. 1) $\frac{(m+n)!}{m!\ n!} = (m+n)_m$; 2) $m_n = m_{m-n}$;

3) $m_m = m_0 = 1$; 4) $m_n = 0$, wenn $n > m$.

§. 352. 1) $(m+n)_n \cdot x_{m+n} = x_m \cdot (x-m)_n$;

2) $x_{n+1}+x_n=(x+1)_{n+1}$; 3) $(-x)_n=(-1)^n(x+n-1)_n$;

4) $x_0=1$; 5) $x_1=x$; 6) $0_m=0$ für $m>0$.

§. 353. $\left(\frac{p}{q}\right)_n$, $\left(-\frac{p}{q}\right)_n$, $(-p)_n$.

Zweyte Abtheilung. Von den figurirten Zahlen. (§. §. 354—357.) . . Pag. 24—31.

§. 354. Erklärung der figurirten Reihen.

§. 355. 1) $T^n_m = S^n_{m-1}$; 2) $T^n_m = S^n_m - S^{n-1}_m$;

3) $S^{n+1}_{m+1} = S^n_{m+1} + S^{n+1}_m$.

§. 356. (() $S^n_m = T^n_{m+1} = \frac{n^{m+1|1}}{(m+1)!}$.

§. 357. (⊙) $T^n_m = S^n_{m-1} = \frac{n^{m|1}}{m!} = \frac{(n+m-1)^{m|-1}}{m!}$

$= (n+m-1)_m = (n+m-1)_{n-1} =$ ꝛc. ꝛc.

Sechszehntes Kapitel.

Die kombinatorische Analysis in ihren ersten Elementen. (§. §. 358—381.) . Pag. 32—53.

Erste Abtheilung. Von den Permutationen, kombinatorischen Variationen und Kombinationen. (§. §. 358—375.) . . Pag. 32—47.

§. 358. Erklärung der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen.

§. 359. Klasse derselben.

§. 360. Erklärung der Permutationen.

§. 361. Erklärung der kombinatorischen Variationen.

§. 362. Variationen mit Wiederholungen zu entwickeln.

§. 363. Dieselben ohne Wiederholungen.

§. 364. Erklärung der Kombinationen.

§. §. 365. 66. Kombinationen mit und ohne Wiederholungen zu entwickeln.

§. 367. Bestimmung der Anzahl der Verbindungen in 6 Lehrsätzen.

§. 368. Wiederholungs-Exponenten.

§, 369. Erklärung der Variationen und Kombinationen zur bestimmten Summe.

§. 370. Wie beide aus einander abgeleitet werden können.
§. 371. Entwickelung der nten Klasse der Variationen zur Summe m.
§. 372. Dieselben aus andern Elementen.
§. 373. Ableitungen dieser Entwickelungen aus einander.
§. 374. Entwickelung der nten Klasse der Kombinationen zur Summe m.
§. 375. Dieselbe aus andern Elementen.

Zweyte Abtheilung. Anwendung der vorhergehenden Lehren, zur Auflösung einiger unbestimmten Aufgaben der Zahlenlehre. (§. §. 376—381.) . . . Pag. 47—53.
§. 376. Auflösung der Gleichung $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu=m$.
§. 377. Auflösung der Gleichung
$1\cdot\beta+2\cdot\gamma+3\cdot\delta+\cdots+n\cdot\mu=p$.
§. 378. Beyde vorstehende Gleichungen zusammen aufzulösen.
§. 379. Auflösung der Gleichungen $\alpha+\beta+\gamma+\cdots=p$, $\mu+\nu+\pi+\cdots=q$.
§. 380. $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots m^{\mu}$ stellt die nte Klasse der Kombinationen vor, wenn $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu=n$ ist.
§. 381. $(ax^0)^{\alpha}\cdot(bx^1)^{\beta}\cdot(cx^2)^{\gamma}\cdots(mx^n)^{\mu}$ stellt von der νten Kombinations-Klasse bloß die mit x^p multiplizirten Glieder vor, wenn $\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu=\nu$ und $1\cdot\beta+2\cdot\gamma+3\cdot\delta+\cdots+n\cdot\mu=p$ ist.

Siebenzehntes Kapitel.

Fortsetzung der kombinatorischen Analysis. Von den kombinatorischen Aggregaten. (§. §. 382—400.) . . . Pag. 54—78.
§. 382. Erklärung der durchlaufenden und stehenden Werthe der deutschen Buchstaben.
§. 383. Erklärung des kombinat. Aggregats.
§. 384. Es hängt ab vom allgemeinen Gliede und von den beschränkenden Gleichungen.
§. 385. Letztere können abgeändert werden, wenn die neuen nur dasselbe leisten.
§. 386. Es ist ein Aggregat $A, = \underset{a=2k}{A} + \underset{a=2k+1}{A}$.

§. 387. Man kann auch sogleich 2a statt a, und dann 2a+1 statt a setzen.
§. 388. Eben so ist ein Aggregat A einer Summe dreier Aggregate gleich, die aus A hervorgehen, wenn 3a, 3a+1, 3a+2 statt a gesetzt wird.
§. 389. Auch ist A einer Summe zweyer andern Aggregate gleich, die aus A hervorgehen, wenn man zuerst 0, dann a+1 statt a setzt.
§. 390. Umgekehrter Satz.
§. 391. Es ist $A = \underset{a+k=\mu}{A} + \underset{a=k+1+\mu}{A}$
§. 392. Gilt noch, wenn μ selbst einen deutschen Buchstaben vorstellt.
§. 393. Zwey kombinat. Aggregate zu addiren und zu subtrahiren.
§. 394. Bemerkungen über die Anwendung dieser Sätze.
§. 395. Ein Aggregat mit M zu multipliziren.
§. 396. Umgekehrter Satz.
§. 397. Zwey komb. Aggregate mit einander zu multipliziren.
§. 398. Umgekehrter Satz.
§. 399. Wenn in dem allgemeinen Gliede eines kombinatorischen Aggregats, selber wieder ein Aggregat vorkommt.
§. 400. Umgekehrter Satz.

Achtzehntes Kapitel.

Von dem binomischen und polynomischen Lehrsatz für Potenzen und Faktoriellen mit ganzen Exponenten. Von den Binomial-Produkten. (§.§. 401—416.) . . Pag. 79—96.

Erste Abtheilung. Der binomische und polynomische Lehrsatz. (§.§. 401—412.) Pag. 79—91.

§. 401. Der binomische Lehrsatz für $(a+b)^m$.
§. 402. Andre Formen desselben.
§. 403. Denselben Satz für $(a-b)^m$. Anmerkung 2. $(a\pm b)^m$ für die ersten 9 Zahlen statt m gesetzt.
§. §. 404. 405. Der trinomische Lehrsatz.
§. 406. Der quatrinomische und der polynomische Lehrsatz.

§. 407. Der binomische Lehrsatz für Faktoriellen.
§. 408. Für $(a \pm b)^{m|r}$.
§. 409. Der trinomische, quatrinomische und polynomische Lehrsatz für Faktoriellen.
§.§. 410—412. Der binomische und polynomische Lehrsatz für Binomial-Koeffizienten.

Zweyte Abtheilung. Von den Binomial-Produkten. (§.§. 413—416.) . . Pag. 92—96.
§.§. 413. 415. Lehrsatz über Binomial-Produkte.
§. 416. Anwendung auf die Entwickelung der Faktorielle $(x \pm b)^{\mu|r}$.

Neunzehntes Kapitel.

Von den ganzen Funktionen eines einzigen veränderlichen Ausdrucks x. (§.§. 417—462.) Pag. 97—144.

Erste Abtheilung. Allgemeine Eigenschaften dieser ganzen Funktionen von x. (§.§. 417—435.) . . . Pag. 97—120.
§. 417. Erklärung der ganzen Funktion vom mten Grade, des Veränderlichen und des Koeffizienten.
§. 418. Sie gibt für gewisse Werthe des Veränderlichen x, eine höhere Gleichung vom mten Grade.
§. 419. Sie kann durch ein kombinatorisches Aggregat vorgestellt werden.
§. 420. Zwey solche ganze Funktionen zu addiren, zu subtrahiren, und mit einander zu multipliziren.
§. 421. Das Produkt zweyer ganzen Funktionen, beziehlich vom mten und von nten Grade, ist eine ganze Funktion vom (m+n)ten Grade; der Quotient derselben dagegen eine ganze Funktion vom (m—n)ten Grade.
§. 422. Zwey ganze Funktionen durch einander zu dividiren.
Anmerkung 1. Rest. Wann ist er $= 0$? —
§. 423. 424. Verallgemeinerung der (§.§. 306. 277. und 250.)
§. 425. Eine ganze Funktion vom mten Grade kann nie durch mehr als m verschiedene Werthe von x der Null gleich werden.

§. 426. Andere Auflösung der Division zweyer ganzen Funktionen, durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten.
§. 427. Nähere Erläuterung dieser Methode.
§. 428. Bedingungen der Möglichkeit der Division.
§. 429. Erklärung des Theilers, der Theilbarkeit ꝛc. ꝛc. der ganzen Funktion.
§. 430. Ist A durch B theilbar, so ist auch PA durch QB theilbar.
§. 431. Gebrochene Funktion $\frac{A}{B}$, wenn A durch B nicht theilbar ist.
§. 432. Sätze der Theilbarkeit der ganzen Funktionen.
§. 433. Ist $F(x)=0$ für $x=\alpha$, so ist $F(x)$ durch $x-a$ theilbar.
§. 434. 35. Ist $F(x)$ durch $f(x)+i.\varphi(x)$ theilbar, so ist auch $F(x)$ durch $f(x)-i\cdot\varphi(x)$ theilbar.

Zweyte Abtheilung. Von den Ableitungen der ganzen Funktionen. (§.§. 435—450.) Pag. 120—134.
§. 436. Begriff der Ableitung.
§. 437. $\partial^{n+1} F(x)=\partial\,[\partial^n F(x)]$.
§. 438. Ableitungen von Ax^m, x^m, Ax, x, A.
§. 439. Die Ableitungen als Aggregate geschrieben.
§. 440. Der Taylor'sche Lehrsatz für ganze Funktionen.
§. 441. Auffindung der Ableitung aus $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$.
§. 442. Die Ableitungen von $AF(x)$, $F(x)\pm\varphi(x)$, $F(x)\cdot\varphi(x)$.
§. 443. Ist $F(x)=\varphi(x)$ so ist auch $\partial F(x)=\partial\varphi(x)$.
§. 444. Die Ableitung von $[F(x)]^m$.
§. 445. Die Ableitung von $F(z)$, wenn $z=f(x)$ ist.
§. 446. 1) $\partial\cdot(x-a)^m=m(x-a)^{m-1}$;
4) $\partial^n\cdot(x-a)^m=m^{n|-1}\cdot(x-a)^{m-n}$;
7) $\partial\cdot[(x-a)^m\cdot F(x)]=(x-a)^{m-1}\cdot[m\cdot F(x)+(x-a)\cdot\partial F(x)]$.
§. 447. $\partial^n[F(x)\cdot\varphi(x)]$ entwickelt.
§. 448. Angewandt auf $\partial^n\cdot[(x-a)^m\cdot F(x)]$.
§. 449. Die gemeinschaftlichen Faktoren von $F(x)$ und $\partial^n F(x)$.

§. 450.

§. 450. Wie aus einer ganzen Funktion die gleichen Faktoren herausgesucht werden.

Dritte Abtheilung. Von den Ziffernwerthen der ganzen Funktionen. Von ihren grösten und kleinsten Werthen. (§. §. 451—462.) Pag. 134—144.

§. §. 451,452. Die Summe der Reihe $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m$ zu finden; auch wenn sie noch mit P multiplizirt ist.

§. 453. Das erste Glied A kann gröſser werden als die Summe aller übrigen Glieder.

§. 454. Das erste Glied Ax^m kann ebenfalls immer gröſser werden als die Summe aller übrigen Glieder.

§. 455. Folgerungen daraus.

§. 456. Erklärung der stetigen Aenderung.

§. 457. Eine reele ganze Funktion von x ändert sich stetig.

§. 458. Sie nimmt ab, so lange $\partial F(x)$ positiv, sie wächst, wenn $\partial F(x)$ negativ ist.

§. 459. Sie hat ihren gröſsten Werth, oder ihren kleinsten, wenn $\partial F(x)=0$ und $\partial^2 F(x)$ nicht Null ist; oder wenn $\partial F(x)=\partial^2 F(x)=\partial^3 F(x)=0$ und $\partial^4 F(x)$ nicht Null ist; u. s. w f.

§. 460. Jede reele ganze Funktion F(x) von mten Grade wird durch eine gerade Anzahl von reelen Werthen von x, $=0$, wenn m gerade ist, durch eine ungerade Anzahl dagegen, wenn m ungerade ist. Gilt nur mit Ausnahmen. Ist m eine ungerade Zahl, so gibt es aber jedesmal wenigstens einen reelen Werth von x, welcher $F(x)=0$ macht.

§. 461. Ist m eine gerade Zahl und das Glied ohne x negativ, so gibt es wenigsstens 2 reele Werthe von x, welche F(x) zu Null machen.

§. 462. Wenn F(x) für $x=\alpha$ positiv, für $x=\beta$ dagegen negativ wird, so liegt zwischen α und β wenigstens ein reeler Werth von x, welcher F(x) zu Null macht.

Zwanzigstes Kapitel.

Von den ganzen Funktionen zweyer und mehrer Veränderlichen. Von den symetrischen ganzen Funktionen. Von den Ableitungen

der ganzen Funktionen zweyer oder mehrer Veränderlichen. (§. §. 463—480.) Pag. 145—178.

Erste Abtheilung. Von den ganzen Funktionen zweyer oder mehrer Veränderlichen überhaupt (§. §. 463—465.) . . Pag. 145—155.

§. 463. Erklärung der ganzen Funktion mehrer Veränderlichen.

§. 464. (1·2·) Jede ganze Funktion mehrer Veränderlichen kann als eine ganze Funktion von weniger Veränderlichen angesehen werden. (3·4·5·6·) Ist sie identisch Null, oder sind zweye identisch einander gleich, so sind ihre einzelnen Koeffizienten identisch Null, oder einander gleich. (7·) Sie wird für die Werthe der Veränderlichen, welche sie $=0$ machen, eine höhere Gleichung derselben Ordnung zwischen mehren Unbekannten.

§. 465. Addition, Subtraktion und Multiplikation derselben.

Zweyte Abtheilung. Von den symetrischen ganzen Funktionen. (§. §. 466—474.) . Pag. 155–171.

§. 466. Erklärung der symetrischen ganzen Funktion.

§. 467. (1·2·3·) Sie besteht aus einfachen symetr. Funktionen (4·) Potenzsumme. (5·) Bestimmung der Gliederzahl der einfachen symetr. Funktionen.

§. §. 468. 469. Multiplikation der Potenzsummen.

§. §. 470. 471. Daraus die einfachen und alle symetrischen ganzen Funktionen in Potenzsummen ausgedrückt.

§. §. 472. 473. Newton'scher Lehrsatz, die Potenzsummen in die Kombinations-Klassen auszudrücken.

§. 474. Endlehrsatz, wie jede symetrische ganze Funktion der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ in die Koeffizienten des Produkts $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{m-1})$, letzteres als ganze Funktion von mten Grade geschrieben, rational ausgedrückt werden könne.

Dritte Abtheilung. Von den Ableitungen der ganzen Funktionen zweyer oder mehrer Veränderlichen. (§. §. 475—480.) . Pag. 171—178.

§. 475. Erklärung von ∂F_x, ∂F_y, ꝛc.

§. 476. Erklärung von $\partial^2 F_x$, $\partial^{1,1} F_{x,y}$, ꝛc. ꝛc.

§. 477. Der Taylor'sche Lehrsatz mit 2 Veränderlichen.
§. 478. Es ist die Folge der Ableitungen nach x und nach y gleichgültig.
§. 479. F(x+h, y+ph) nach Potenzen von h entwickelt.
§. 480. (1.) Die ganze Funktion zweyer Veränderlichen x und y, ändert sich mit x und y stetig.
(2.3.) Bestimmung der größten und kleinsten Werthe derselben.

Ein und zwanzigstes Kapitel.

Fortsetzung der Lehre der ganzen Funktionen.
Von den höhern Gleichungen. (§.§. 481—528.) P. 179—226.

Erste Abtheilung. Fundamentalsätze der höheren Gleichungen. (§.§. 481—506.) . Pag. 179—198.
§. 481. Es gibt allemal einen numerischen Werth von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$, welcher eine numerische ganze Funktion zu Null macht.
§. 482. Jede ganze Funktion von mten Grade läßt sich in m Faktoren zerlegen von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$.
§. 483. Jede numerische höhere Gleichung gibt m Werthe von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ für den Unbekannten.
§. 484. Jede numerische ganze Funktion läßt sich nur auf eine einzige Art in m einfache Faktoren zerlegen.
§. 485. Jede allgemeine Gleichung vom mten Grade gibt m Werthe für den Unbekannten.
§. 486. Der Unbekannte aus einer höhern Gleichung muß mit der Vorsicht behandelt werden, wie jeder mehrdeutige Ausdruck.
§. 487. Zerlegung einer ganzen Funktion in ihre Faktoren; Gesetze zwischen den Werthen des Unbekannten und den Koeffizienten der Gleichung.
§. 488. Erklärung der Wurzelwerthe. Mehrfache Wurzelwerthe.
§. 489. Folgerungen aus (§. 487.)
§. 490. Alle symetr. ganzen Funktionen der Wurzelwerthe lassen sich in die Koeffizienten der höhern Gleichung rational ausdrücken.
§.§. 491. 492. Wie die nfachen Wurzelwerthe zu erkennen sind.

§.§. 493. 494. Wie die gleichen (d. h. die mehrfachen) Wurzelwerthe einer höhern Gleichung abgesondert werden.
§.§. 495. 496. Eine Gleichung mit reelen ganzen Koeffizienten hat nie gebrochene Wurzelwerthe, sondern ganze oder irrationale.
§.§. 497. 498. Abwechslungen oder Folgen der Zeichen erklärt.
§.§. 499. 500. Vergleichung der Abwechslungen und Folgen und der positiven und negativen Wurzelwerthe in $F(x)=0$ und in $F(-x)=0$.
§.§. 501. 502. Eine Gleichung hat nie mehr positive Wurzeln als Abwechslungen.
§.§. 503–505. Bestimmung der größtmöglichsten Zahl der reelen, und der mindesten Zahl der imaginären Wurzelwerthe einer höhern Gleichung aus den Abwechslungen und Folgen.
§. 506. Eine höhere Gleichung mit reelen Koeffizienten hat die imaginären Wurzelwerthe immer paarweise, von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$ und $p-q\cdot\sqrt{-1}$.

Zweyte Abtheilung. Von der Bildung neuer höherer Gleichungen, deren Wurzelwerthe gegebene Zusammensetzungen sind aus den Wurzelwerthen einer andern höhern Gleichung. (§.§. 507—515.) . . Pag. 198–207.
§. 507. Aus einer höhern Gleichnng in x, eine andere in z zu bilden, so daß $z=\varphi(x)$ wird.
§.§. 508–512. Spezielle Fälle dieser Aufgabe.
§. 513. Aus einer höheren Gleichung in x, eine andere in z zu bilden, deren Wurzelwerthe beliebige aber bestimmte Zusammensetzungen sind, aus den Wurzelwerthen der gegebenen Gleichung in x.
§.§. 514. 515. Spezielle Fälle dieser Aufgabe

Dritte Abtheilung. Vom Eliminiren eines oder mehrer der Unbekannten aus zwey oder mehr gegebenen höhern Gleichungen von beliebiger Ordnung. (§.§. 516—528.) . Pag. 207—226.
§. 516. Aus zweyen höhern Gleichungen $A=0$ und $B=0$ zwischen x und y, beziehlich von der mten und von der nten Ordnung, x zu eliminiren.

§. 517. Die Eliminations-Gleichung ist höchstens vom mnten Grade.
§. 518. Die Eliminations-Gleichung kann identisch 0=0 werden.
§. 519. Wenn $\mathfrak{B}=0$ den Faktor $\varphi(y)$ hat.
§. 520. Wie mehrfache (gleiche) Wurzelwerthe der Eliminations-Gleichung in y, zu deuten sind.
§. 521. Elimination durch Auffindung der Bedingung eines gemeinschaftlichen Theilers.
§. 522. Dieselbe Eliminations-Methode im verbesserten und vervollkommten Zustande.
§. 523. Wenn eine oder gar beyde der Gleichungen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$ sich in Faktoren zerlegen lassen.
§. 524. Eliminations-Methode, bey welcher alle höhern Potenzen von x, in niedrigere ausgedrückt werden.
§. 525. Euler'sche Eliminations-Methode (nach der Art der englischen bey den einfachen Gleichungen).
§. 526. Französische Eliminations-Methode.
§. 527. Aus 3 höhern Gleichungen zwischen x, y und z beziehlich von der mten, nten und pten Ordnung, x und y zu eliminiren.
§. 528. Die Eliminationsgleichung in z ist höchstens vom mnpten Grade.

Zwey und zwanzigstes Kapitel.

Von den allgemeinen Wurzeln und von der allgemeinen Auflösung der höhern Gleichungen. (§.§. 529—555.) . . Pag. 227—259.

Erste Abtheilung. Von den allgemeinen Wurzeln. (§.§. 529—540.) . . Pag. 227—237.

§. 529. Die Gleichung $x^m=a$ hat m lauter verschiedene Wurzelwerthe.
§. 530. Sie sind alle von der Form $p+q\cdot\sqrt{-1}$, wenn a selber von dieser Form ist.
§. 531. Erklärung der allgemeinen mten Wurzel aus a.
§. 532. Sie ist mdeutig und deshalb mit Vorsicht zu behandeln.
§. 533. Die Sätze der Wurzeln des 5ten und 6ten Kapitels gelten noch für diese allgemeinen Wurzeln, je-

doch mit einer aus der Mehrdeutigkeit derselben hervorgehenden Beschränkung.

§. 534. In welchen Fällen die Werthe der $\sqrt[m]{a}$ reel oder imaginär sind.

§. 535. Wie aus einem einzigen Werthe von $\sqrt[m]{a}$ die übrigen alle gefunden werden können.

§. 536. Ueber die m Werthe der $\sqrt[m]{1}$.

§. 537. Ueber die m Werthe der $\sqrt[m]{-1}$.

§. 538. Aus einer Gleichung $P=0$ eine Wurzel z. B. $\sqrt[m]{a}$ zu eliminiren.

§. 539. Ist $P=0$ vom nten Grade, so wird die neue Gleichung vom mnten Grade.

§. 540. Mehre solche Wurzeln zu eliminiren.

Zweyte Abtheilung. Ueber die Auflösung allgemeiner höherer Gleichungen. (§.§. 540—544.) P. 238—251.

§. 541. Die Tschirnhausen'sche Auflösungsmethode.

§. 542. Zweyte Methode.

§. 543. Methode des La Grange.

§. 544. Methode des Euler.

Dritte Abtheilung. Von der Auflösung allgemeiner höherer Gleichungen, in besondern Fällen. (§.§. 545—555.) . . Pag. 251—259.

§. 545. Auflösung der Gleichung $x^{2m}+ax^m+b=0$.

§. 546. Auflösung der Gleichung $x^{3n}+ax^{2n}+bx^n+c=0$.

§. 547. Auflösung von $x^{4n}+ax^{3n}+bx^{2n}+cx^n+d=0$.

§. 548. Erklärung der reziproken Gleichungen.

§. 549. Eigenschaften derselben.

§. 550. Eine andere Gleichung daraus abzuleiten, deren Wurzelwerthe $\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $\beta+\frac{1}{\beta}$, ꝛc. ꝛc. sind.

§. 551. Eine reziproke Gleichung vom 2m und 2m+1ten Grade ist allgemein auflösbar, wenn eine allgemeine Gleichung vom mten Grade aufgelöst wird.

§. 552. Daher kann man alle Werthe von $\sqrt[n]{1}$ finden durch Auflösung höherer Gleichungen, wenn n die Werthe von 2—10 hat.

§. §. 553—555. Eine höhere Gleichung aufzulösen, wenn man noch eine oder einige Relationen kennt, zwischen zwey oder mehr ihrer Wurzel-Werthe.

Drey und zwanzigstes Kapitel.

Von den unendlichen Reihen. (§. §. 556—597.) Pag. 260—304.

Erste Abtheilung. Von den unendlichen Reihen im Allgemeinen. (§ §. 556—586.) Pag. 260—296.

§. 556. Erklärung der unendlichen Reihe und ihrer Konvergenz.

§. 557. Sie enthält die endliche Reihe in sich.

§. 558. Es gilt für sie im Allgemeinen und, in so fern sie konvergent sind, auch im Besondern, was für endliche Ausdrücke.

§. 559. Namentlich die Sätze der ganzen Funktionen von x, in so fern sie von der Gliederzahl derselben unabhängiges enthalten.

§. 560. Erklärung der Entwicklung eines Ausdrucks F(x) nach x.

§. 561. Das erste Glied ist allemal = F(0).

§. 562. Addiren und Subtrahiren zweyer unendlichen Reihen.

§. §. 563. 564. Die Multiplikation zweyer unendlichen Reihen.

§. 565. Division zweyer unendlichen Reihen.

§. 566. Ist nicht immer möglich.

§. 567. Anwendung auf den Fall der rekurrirenden Reihen.

§. 568. Erklärung derselben.

§. §. 569—571. Praktische Vorschriften dafür.

§. §. 572—576. Eine unendliche Reihe zur (ganzen) mten Potenz zu erheben.

§. 577. Dieselbe Reihe zur (ganzen) (—m)ten Potenz erhoben.

§. §. 578—580. Aus einer unendlichen Reihe die mte Wurzel gezogen.

§. §. 581. 582. Umkehrung der Reihen.

§. 583. Auflösung der höhern Gleichung durch Reihen.

§. 584. F(x+h) nach h zu entwickeln, wenn F(x) eine unendliche Reihe ist.

§. 585. Form der Reihen $\partial F(x)$, $\partial^2 F(x)$, $\partial^3 F(x)$, ꝛc. ꝛc.
§. 586. $F(p+q\cdot i)$ auf die Form $P+i\cdot Q$ gebracht.

Zweyte Abtheilung. Von den numerischen unendlichen Reihen und ihrer Konvergenz. (§. §. 587—597.) . . . Pag. 296—304.

§. 587. Konvergenz der geometr. Reihe $1+z+z^2\ldots$ für $z<1$.
§. 588. Eine Reihe ist konvergent, wenn sie von einem mten Gliede ab es ist.
§. 589. Eine Reihe Q ist konvergent, wenn sie von einem mten Gliede ab gleiche oder kleinere Glieder hat, als eine konvergente Reihe P.
§. 590. Folgernngen für die Konvergenz.
§. 591. In $p+pz+pz^2+\cdots$ ist für $z<\frac{1}{2}$, p grösser als die Summe aller folgenden Glieder der unendlichen Reihe.
§. 592—94. Folgerungen daraus.
§. §. 595. 596. Der Werth einer unendlichen Reihe geht zwischen $x=\alpha$ und $x=\beta$ stetig fort, so oft sie selbst und alle ihre Ableitungen, zwischen $x=\alpha$ und $x=\beta$ konvergent sind.
§. 597. Ist die unendliche Reihe $F(x)$ positiv für $x=\alpha$, negativ für $x=\beta$, so ist sie einmal 0 zwischen $x=\alpha$ und $x=\beta$, so oft sie von der Art ist, daß sie dazwischen nur stetig sich ändert.

Vier und zwanzigstes Kapitel.

Fortsetzung der Lehre der unendlichen Reihen. (§§. 598—612.) . . . Pag. 305—326.

Erste Abtheilung. Der binomischen Lehrsatz für Differenz-Potenzen und für reele Potenzen. (§§. 598—600.) . . Pag. 305—311.

§. §. 598. 599. Der binomische Lehrsatz für Differenz-Potenzen.
§. 600. Derselbe Satz für reele Potenzen.

Zweyte Abtheilung. Umformung der Binomial-Reihe in eine nach ganzen Potenzen des Exponenten fortlaufende. Betrachtung solcher Reihen im Allgemeinen. Reihen für reele Logarithmen. (§. §. 601—612.) Pag. 311—326.

§. 601. Eine allgemeine Reihe $F(x)$ so zu finden, daß $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$ wird.

§. 602. Man findet für jedes P_1,
$$F(P_1,x)\cdot F(P_1,y)=F(P_1,x+y).$$

§. 603. Es ist auch allemal $F(P_1,x):F(P_1,y)=(P_1,x-y)$; $F(P_1,-x)=1:F(P_1,x)$; und $[F(P_1,x)]^m=F(P_1,mx)$, wenn m eine ganze, positive oder negative Zahl.

§. 604. Die Reihe $F(x)$ oder $S\left[\frac{P_1^a\cdot x^a}{a!}\right]$ konvergirt allemal.

§. 605. Diese Reihe ist positiv, nie negativ, so oft P_1 und x reel sind.

§. 606. Für ein reeles P_1 und x, gilt auch noch $[F(x)]^m=F(mx)$, wenn m beliebig reel ist, ganz oder gebrochen.

§. 607. Ist I. $S\left[\frac{P_1}{a!}\right]=a$, so ist II. $S\left[\frac{(P_1x)^a}{a!}\right]=a^x$,

§. 608. Und ist III. $S\left[\frac{1}{a!}\right]=e$, so ist IV. $S\left[\frac{x}{a!}\right]=e^x$,

so oft a^x oder e^x Differenz- oder reele Potenzen sind.

§. 609. Aus (§. 607. I.) folgt $P_1=\overset{e}{log}\,a=log\,a=La$.

§. 610. Und dann $a=S\left[\frac{(x\cdot La)^a}{a!}\right]$, wenn a positiv und x reel ist.

§. 611. Auch ist $La=\frac{a^x-1}{x}$ für $x=0$.

§. 612. Daraus ergeben sich aber für La vier unendliche Reihen, von denen einige langsam, andere sehr schnell und für jedes positive a, konvergiren.

Fünf und zwanzigstes Kapitel.

Von den künstlichen und natürlichen Potenzen, Logarithmen und trigonometrischen Funktionen. (§§. 613—671.) . . Pag. 327—408.

Erste Abtheilung. Von den künstlichen und natürlichen Potenzen und Logarithmen im Allgemeinen. (§§. 613—619.) . . Pag. 328—334.

§. 613. Begriff der künstlichen a^x und natürlichen Potenz e^x.

§. 614. 615. $a^x = e\,50 : e^{x \cdot La}$ und jede dieser Potenzen ist allemal eindeutig.

§. 616. Formeln für diese Potenzen.

I. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. II. $a^x \cdot a^y = a^{x-y}$. III. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ und

IV. $(a^x)^m = a^{mx}$, wenn nur m eine Differenz ganzer Zahlen ist.

§. 617. 18. V. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$, VI. $a^x : b^x = (a:b)^x$.

§. 618. Begriff des künstlichen und des natürlichen Logarithmen.

§. 619. $\overset{e}{log}\, b = \frac{\overset{e}{log}\, b}{La} = \frac{log\, b}{La}$.

Zweite Abtheilung. Von den natürlichen trigonometrischen Funktionen. (§.§. 620—645.) P. 334—371.

§. 620. Die Reihen $S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]$ und

$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)}\right]$ sind allemal konvergent.

§. 621. Sie werden beziehlich durch *Cos* x und *Sin* x bezeichnet. Begriff der trigonometrischen Funktionen überhaupt, für jedes x.

§. 622. Sie sind nur eindeutig, und allemal von der Form $p + q \cdot i$.

§. 623. *Sin* x, *Cos* x in Potenz-Ausdrücken; *Tg* x, *Cotg* x, *Sec* x, *Cosec* x in *Sin* x und *Cos* x ausgedrückt.

§. 624. Für $x = 0$ und für $-x$ statt x.

§. 625. $(Sin\, x)^2 + (Cos\, x)^2 = 1$; überhaupt jede der übrigen 5 trigonometrischen Funktionen durch die 6te ausgedrückt.

§. 626. 1) 2) $e^{\pm ix} = Cos\, x \pm i \cdot Sin\, x$; 3) $e^{2ix} = \frac{1 + i \cdot Tg\, x}{1 - i \cdot Tg\, x}$;

4 und 5) $(Cos\, x \pm i \cdot Sin\, x)^m = Cos\,(mx) \pm i \cdot Sin\,(mx)$, ꝛc., wo aber m eine Differenz ganzer Zahlen seyn muß.

§. 627. *Sin* $(x \pm y)$, *Cos* $(x \pm y)$ in *Sin* x, *Cos* x, *Sin* y, *Cos* y ausgedrückt.

§. 628. Die Produkte von *Sin* und *Cos* in Summen und Differenzen, und umgekehrt letztere in ersteren zu verwandeln. Andre Formeln für Tangenten, et. et., welche sich daran anschließen.

§. 629. Wie Sinus und Kosinus größerer Bogen aus denen kleinerer Bogen bestimmt werden.
§. 630. Sinus und Kosinus der vielfachen Bogen in die des einfachen Bogens ausgedrückt.
§. 631. *Sin*2y, *Cos*2y, *Tg*2y, etc. etc. in *Sin*y, *Cos*y, *Tg*y etc. ausgedrückt und umgekehrt.
§.§. 632. 33. *Sin*(x±h) und *Cos*(x±h) in, nach h fortlaufende Reihen verwandelt.
§.§. 634—38. Den Gang der reelen Werthe von *Sin* x und *Cos* x zu bestimmen, wenn dem x alle reelen Werthe von $+\infty$ an, bis zu $-\infty$ hin gegeben werden.
§.§. 639—40. Zu jedem reel gegebenen Sinus und Kosinus gehören unendlich viele, in der Form $\pm 2a\pi + \varphi$ enthaltene Bogen, wenn φ der erste positive innerhalb der 4 ersten Quadranten liegende zugehörige Bogen ist.
§.§. 641—643. Der Bogen hat doppelt so viele Werthe, wenn Sinus oder Kosinus allein nur gegeben sind, oder nur *Tg* allein, oder nur *Cotg* allein, oder auch wenn *Tg* und *Cotg* zugleich gegeben sind.
§. 644. *Sin* (p+qi) ist reel, wenn $p = \pm(2a + \frac{1}{2})\pi$ oder $p = (\pm 2a + \frac{3}{2})\pi$; dagegen ist *Cos* (p+qi) reel, wenn $p = \pm 2a\pi$ oder $p = (\pm 2a + 1)\pi$ ist.
§. 645. Zu einem gegebenen reelen Sinus oder Kosinus, wenn solcher < 1 ist, absolut genommen, kann nie ein imaginärer Bogen gehören.

Dritte Abtheilung. Fortsetzung der analytischen Trigonometrie. Formeln für das Operiren mit Bogen. Von den künstlichen trigonometrischen Funktionen. (§.§. 646—655.) P. 371—380.
§. 646. Erklärung der Zeichen $\frac{1}{Sin}$y, $\frac{1}{Cos}$y, ꝛc. ꝛc.
§. 647. Sie sind unendlich vieldeutige Zeichen.
§. 648—653. Formeln dafür.
§. 654. Begriff der künstlichen trigonometrischen Funktionen.
§. 655. Folgerungen daraus.

Vierte Abtheilung. Auffindung der Werthe der künstlichen und natürlichen Logarithmen, der Bogen und der Zahl π. (§.§. 656—671.) Pag. 380—408.
§. 656. Alle Werthe von *log* (p+qi) zu finden.

§. 657. Für spezielle Werthe von p und q.
§. 658. Für $p = \pm a$, $q = 0$; oder $p = 0$ und $q = \pm b$.
§. 659. Für $p = \pm e$ oder $p = \pm 1$ und $q = 0$.
§. 660. Aus *log* 1 und einem Werth von *log* $(p + qi)$ alle Werthe des letztern zu finden.
§. 661. Alle Werthe von $\overset{a}{log}\,(p + qi)$ gefunden.
§. 662. Vorsicht bei dem Operiren mit diesen unendlich vieldeutigen Ausdrücken.
§. 663. *log* $(1 + x)$ in eine nach x fortlaufende Reihe zu verwandeln.
§. 664. Dazu nöthige allgemeine Aufgabe.
§. 665. Beendigung der Aufgabe (§. 663.). Reihen für $log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $log\,\frac{n+z}{n}$, u. s. w.
§. 666. $\overset{a}{log}\,(1 + x)$ in Reihen ausgedrückt.
§. 667. $y = Sin\,x$ umzukehren.
§. 668. Logarithmische Ausdrücke für die Bogen.
§. 669. Den Bogen x in eine Reihe nach seiner Tangente fortlaufend auszudrücken.
§. 670. $Sin\,\frac{1}{4}\pi$, $Cos\,\frac{1}{4}\pi$, $Tg\,\frac{1}{4}x$, $Sin\,\frac{1}{8}\pi$, $Cos\,\frac{1}{8}\pi$ ꝛc. berechnet.
§. 671. Praktischere Methode π zu finden.

Sechs und zwanzigstes Kapitel.

Von den allgemeinen Potenzen und den allgemeinen Logarithmen. Bestimmung aller Werthe einiger Potenz-Ausdrücke. (§. §. 672—700.) . . . Pag. 409—455.

Erste Abtheilung. Von den allgemeinen Potenzen und den allgemeinen Logarithmen. (§. §. 672—693.) . . . Pag. 409—442.

§. 672. Erklärung der allgemeinen Potenz a^x.
§. 673. Sie ist $= e^{x \cdot log\,a}$.
§. 674. Alle Werthe von $(p + qi)^{\alpha + \beta i}$ gefunden.
§. 675. $(p + qi)^y$ und $(Cos\,x + i \cdot Sin\,x)^y$ entwickelt.
§. 676. Wann sind alle Werthe der Potenz $(p + qi)^{\alpha + \beta i}$ nothwendig reel.
§ 677. Die Potenz a^x hat nur einen, oder n, oder un-

endlich viele verschiedene Werthe, je nachdem x ganz, oder gebrochen, oder imaginär ist.

§. 678. Formeln für $(p+qi)^m$, $(p+qi)^{\frac{m}{n}}$.

§. 679. Alle Werthe von

$(+a)^m$, $(+a)^{\frac{m}{n}}$, $(+a)^{\alpha+\beta\cdot i}$, $(-a)^m$, $(-a)^{\frac{m}{n}}$, $(-a)^{\alpha+\beta\cdot i}$

gefunden.

§. 680. 681. Formeln für das Operiren mit allgemeinen Potenzen.

§.§. 682. 683. Alle Werthe von

$\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{1}$, $\sqrt[n]{-1}$, $\sqrt[n]{+a}$, $\sqrt[n]{(-a)}$, $\sqrt[n]{p+q\cdot i}$,

$\sqrt[n]{Cos\,x+i\cdot Sin\,x}$ und $\left(\sqrt[n]{Cos\,x+i\cdot Sin\,x}\right)^m$

entwickelt.

§. 684. Der binomische Lehrsatz für allgemeine Potenzen.

§. 685. Der trinomische, ꝛc., Lehrsatz für allgemeine Potenzen.

§. 686. Der allgemeinste polynomische Lehrsatz.

§. 687. Begriff des allgemeinen Logarithmen b?a. Spezielle Form desselben.

§. 688. Für eine positive Basis ist eine der speziellen Formen dieses allgemeinen Logarithmen, der frühere künstliche Logarithme.

§.§. 689. 690. 691. Alle Werthe von $(p_1+q_1\cdot i)?(p+q\cdot i)$ gefunden.

§. 692. Bedingungs-Gleichung für lauter reele Werthe.

§. 693. Alle Werthe von b?a, (—b)?a, b?(—a), (—b)?(—a) gefunden.

Zweyte Abtheilung. Gebrauch der gefundenen Werthe der allgem. Potenzen. Bestimmung aller Werthe einiger, aus solchen allgemeinen Potenzen zusammengesetzter Ausdrücke. (§.§. 694—700.) . . . Pag. 442—455.

§. 694. a^m-x^m und a^m+x^m in lauter reele Faktoren zu zerlegen.

§. 695. $a^{2m}-2a^mx^m\cdot Cos\,\varphi+x^{2m}$ in reele doppelte Faktoren zu zerlegen.

§. 696. Alle Werthe von $(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x$ zu finden.

§. 697. Alle reelen Werthe davon heraus zu suchen.

§. 698. Alle Werthe von $\sqrt[n]{a+b\cdot i}+\sqrt[n]{a-b\cdot i}$ gefunden.

§. 699. Anwendung auf die Cardan'sche Formel in ihrem irreduktiblen Falle.

§. 700. Die Aufgabe des (§. 696.) ohne trigonometrische Funktionen behandelt.

Zahlenlehre.

Funfzehntes Kapitel.

Von den arithmetischen Progressionen. Von den Faktoriellen. Von den figurirten Zahlen.

Erste Abtheilung.

Von den arithmetischen Progressionen; von den Faktoriellen und Fakultäten.

§. 333. Erklärung.

Eine Reihe von Ausdrücken von der Form

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \text{etc. etc.},$$

wo a und d beliebige Ausdrücke sind, nennt man eine arithmetische Reihe (oder arithmetische Progression), die aus Gliedern besteht; die Zahl d heißt der Unterschied der Glieder, und die Reihe selbst heißt steigend, wenn d positiv, fallend dagegen, wenn d negativ ist. — Uebrigens kann d nicht nur eine positive oder negative Zahl seyn, sondern selbst Null oder imaginär, d. h. allgemein.

§. 334. Zusatz.

Ist d negativ und d' das Glied dieser negativen Zahl (also $d = -d'$), so hat die arithmetische Reihe diese Form:

$$a,\ a-d',\ a-2d',\ a-3d',\ a-4d',\ \text{etc. etc.},$$

wo d' eine absolute Zahl bedeutet.

§. 335. Lehrsatz.

Ist das n^{te} Glied durch u bezeichnet, die Summe aller n Glieder aber durch s (wo dann das n^{te} Glied u auch das letzte Glied genannt wird), so hat man allemal:

$$\text{I.} \quad u = a+(n-1)d;$$

$$\text{II.} \quad s = (a+u)\frac{n}{2}.$$

Beweis. Die Formel I. fällt in die Augen.

Die Gleichung II. dagegen kann auf folgende Art erwiesen werden. Es ist nehmlich

$$s = a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(u-2d)+(u-d)+u$$

und $$s = u+(u-d)+(u-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a;$$

folglich, wenn man addirt:

$$2s = (a+u)+(a+u)+(a+u)+\cdots+(a+u)+(a+u)+(a+u),$$

oder $$2s = (a+u)u;$$

also auch $$s = \frac{(a+u)n}{2} = (a+u)\frac{n}{2}.$$

§. 336. Zusatz.

Sind von den vieren, in jeder dieser Gleichungen vorkommenden Buchstaben dreie gegeben, so gibt die Gleichung jedesmal den Werth des vierten.

§. 337. Zusatz.

Es kommen aber in beyden Gleichungen (I. und II.), fünf verschiedene Buchstaben a, n, d, u und s vor, von denen drey gemeinschaftlich sind, nehmlich a, n und u. Eliminirt man daher jeden dieser drei Buchstaben, einen nach dem andern, so erhält man wiederum folgende Gleichungen:

$$\text{III.} \quad s = [2u-(n-1)d]\cdot\frac{n}{2};$$

$$\text{IV.} \quad s = \frac{(u-a+d)(u+a)}{2d};$$

$$\text{V.} \quad s = [2a+(n-1)d]\cdot\frac{n}{2}.$$

Diese fünf Gleichungen sind deshalb alle von einander verschieden, weil jede nur vier der fünf Buchstaben, also den fünften

nicht enthält, dieser fünfte aber in jeder Gleichung ein anderer ist.

§. 338. Zusatz.

Löst man jede der fünf Gleichungen in Bezug auf jeden der vier Buchstaben, die sie enthält, auf, so hat man nachstehende zwanzig Gleichungen:

1) $u = a+(n-1)d$;

2) $u = \frac{2s-na}{n}$;

3) $u = \frac{-d\pm\sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2}$;

4) $u = \frac{2s+n(n-1)d}{2n}$;

5) $a = u-(n-1)d$;

6) $a = \frac{2s-nu}{n}$;

7) $a = \frac{d\pm\sqrt{(2u+d)^2-8ds}}{2}$;

8) $a = \frac{2s-n(n-1)d}{2n}$;

9) $d = \frac{2(s-an)}{n(n-1)}$;

10) $d = \frac{(u+a)(u-a)}{2s-(u+a)}$;

11) $d = \frac{2(nu-s)}{n(n-1)}$;

12) $d = \frac{u-a}{n-1}$;

13) $n = \frac{u-a+d}{d}$;

14) $n = \frac{2s}{a+u}$;

15) $n = \frac{-(2a-d)\pm\sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2}$;

$$16)\ n = \frac{(2u+d) \pm \sqrt{(2u+d)^2 - 8ds}}{2d};$$

$$17)\ s = [2a+(n-1)d] \cdot \frac{n}{2};$$

$$18)\ s = \frac{(a+u) \cdot n}{2};$$

$$19)\ s = (2u-(n-1)d] \cdot \frac{n}{2};$$

$$20)\ s = \frac{(u-a+d)(u-a)}{2d}.$$

Diese Formeln enthalten je zwey der fünf Buchstaben a, n, d, u und s, durch die drey übrigen ausgedrückt.

Anmerkung 1. Alle bis hierher entwickelten Gleichungen sind solche, die aus den Gleichungen (I.) und (II.) abgeleitet sind. Da nun diese beyden Gleichungen selber wieder hervorgehen, wenn man in ihnen statt: $\frac{u,\ a,\ d,}{a,\ u,\ -d}$ beziehlich setzt, so kann man durch dieselben Substitutionen die vorliegenden Gleichungen zum Theil auch auseinander ableiten.

Anmerkung 2. Die Gleichungen (3, 7, 15 und 16) sind quadratische, und geben daher zwey Auflösungen. Welcher von beiden Werthen aber jedesmal der brauchbare ist, muß immer erst durch die besondern Bedingungen der Aufgabe entschieden werden, welche zu diesen quadratischen Gleichungen geführt haben.

§. 339. Erklärung.

Das Produkt

$$a(a+d)(a+2d)(a+3d)\cdots[a+(n-1)d],$$

dessen Faktoren n auf einander folgende Glieder einer arithmetischen Reihe sind, bezeichnet man durch das Zeichen

$$a^{n]d}$$

und nennt dieses Zeichen eine Faktorielle, deren Basis a, Exponent n, und Differenz oder Unterschied d ist.

Anmerkung. Dieser Definition zu Folge, muß der Exponent n immer eine absolute ganze Zahl und >1 seyn, wenn die

Faktorielle $a^{n|d}$ eine Bedeutung haben soll. — Auch wird die Faktorielle der Null gleich, sobald einer der Faktoren der Null gleich wird. — Endlich geht die Faktorielle in eine Potenz über, wenn die Differenz d in Null übergeht.

§. 340. Lehrsätze.

Die Lehrsätze, welche lehren, wie man eine Faktorielle in eine andere mit entgegengesetzter Differenz verwandelt, wie zwey Faktoriellen mit einander multiplizirt oder durch einander dividirt werden, endlich wie eine Faktorielle mit einer Potenz multiplizirt wird, sind folgende:

1) $a^{n|d} = [a+(n-1)d]^{n|-d}$;

2) $a^{m+n|d} = a^{m|d} \cdot (a+md)^{n|d} = a^{n|d} \cdot (a+nd)^{m|d}$;

3) $a^{m-n|d} = \frac{a^{m|d}}{[a+(m-n)d]^{n|d}}$;

4) $\frac{a^{m|d}}{a^{n|d}} = (a+nd)^{m-n|d}$;

5) $h^m \cdot a^{m|d} = (ha)^{m|hd}$;

welche hier noch näher erörtert werden mögen.

Lehrsatz 1. Eine Faktorielle $a^{n|d}$ wird in eine andere mit entgegengesetzter Differenz verwandelt, wenn man den um 1 verminderten Exponenten, also $n-1$, mit der Differenz d multiplizirt, solches Produkt zu der Basis a addirt, den Exponenten n als solchen beybehält, die Differenz dagegen mit dem entgegengesetzten Zeichen versieht; d. h. es ist

$$a^{n|d} = [a+(n-1)d]^{n|-d}.$$

Beyspiele. So ist z. B.

$$2^{3|4} = [2+(3-1)4]^{3|-4} = 10^{3|-4};$$

die erstere Faktorielle bedeutet nämlich das Produkt $2 \cdot 6 \cdot 10$, die letztere dagegen das Produkt $10 \cdot 6 \cdot 2$. — Eben so ist:

$$2^{5|-\frac{1}{3}} = (\tfrac{2}{3})^{5|\frac{1}{3}},$$

weil die erstere Faktorielle das Produkt $2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot \frac{2}{3}$, die andere dagegen das Produkt $\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$ vorstellt. — Ferner ist

$$(-2)^{6|-\frac{3}{4}} = [-2+5\cdot(-\tfrac{3}{4})]^{6|\frac{3}{4}} = (-\tfrac{23}{4})^{6|\frac{3}{4}} = \frac{8\cdot 11\cdot 14\cdot 17\cdot 20\cdot 23}{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}.$$

Auch $4^{4|-1} = 1^{4|1} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$ —

Und $2^{3|-5} = (-8)^{3|5} = 2\cdot 3\cdot 8 = 48.$ — u. s. w. f.

Beweis. Denn die zweite Faktorielle $[a+(n-1)d]^{n|-d}$ bedeutet genau dasselbe Produkt, als die erste $a^{n|d}$, die Faktoren nur in umgekehrter Ordnung gelesen.

Lehrsatz 2. Zwey Faktoriellen $(a+md)^{n|d}$ und $a^{m|d}$, welche sich an einander anschließen, [d. h. welche eine gemeinschaftliche Differenz d haben, und von welcher die Basis, als erster Faktor der einen, ebenfalls um d größer *) ist, als der letzte Faktor der andern **)], geben, wenn sie mit einander multiplizirt werden, eine Faktorielle $a^{m+n|d}$ mit der Basis a der andern, derselben Differenz d, und der Summe $m+n$ der Exponenten als Exponent; oder:

Eine Faktorielle $a^{m+n|d}$, deren Exponent $m+n$ als eine Summe angesehen wird, läßt sich in ein Produkt zweyer Faktoriellen verwandeln, von denen die eine $a^{m|d}$ das Produkt der ersteren m Faktoren, die andere $(a+md)^{n|d}$ das Produkt der nun noch übrigen n Faktoren ausdrückt; d. h. es ist

$$a^{m+n|d} = a^{m|d}\cdot(a+md)^{n|d} = a^{n|d}\cdot(a+nd)^{m|d}.$$

Beyspiele. Man findet danach leicht

$2^{5|1} = 2^{3|1}\cdot 5^{2|1}$; $2^{5|-\frac{1}{3}} = 2^{3|-\frac{1}{3}}\cdot 1^{2|-\frac{1}{3}}$;

$7^{3|-2}\cdot 13^{3|-2} = 13^{3|-2}\cdot 7^{3|-2} = 13^{6|-2}$; $1^{8|1} = 1^{3|1}\cdot 4^{5|1}$;

$8^{8|-1} = 8^{2|-1}\cdot 6^{6|-1}$; $n^{n|-1} = n^{m|-1}\cdot(n-m)^{n-m|-1}$;

$1^{n|1} = 1^{m|1}(1+m)^{n-m|1}$; $5^{3|2}\cdot 11^{4|2} = 5^{7|2}$;

$9^{8|-2} = 9^{5|-2}(-1)^{3|-2}$; u. s. w. f.

---

*) In dem Sinne, daß er $u+d$ ist, wenn jener u seyn sollte, mag nun d selbst eine positive, eine negative, eine imaginäre oder eine allgemeine Zahl seyn.

**) Dies ist allemal der Fall, so oft die Basis der einen hervorgeht, wenn man von der andern den Exponenten mit der Differenz multiplizirt und das Produkt zu ihrer Basis addirt.

Beweis. Denn es ist $a^{m+n|d}$ ein Produkt von $m+n$ Faktoren, wo der erste a, jeder folgende um d größer *), der letzte aber $a+(m+n-1)d$ ist. Unter diesen Faktoren ist der m^{te} offenbar $= a+(m-1)d$, und der nun folgende $m+1^{te}$ nothwendig $= a+md$. Denkt man sich nun das Produkt der ersten m Faktoren in eine Faktorielle $a^{m|d}$ vereinigt, so bleibt noch das Produkt der übrigen n Faktoren, welches mit dem $m+1^{ten}$ Faktor $a+md$ beginnt, und welches daher durch die Faktorielle $(a+md)^{n|d}$ vorgestellt wird.

Lehrsatz 3. Eine Faktorielle $a^{m-n|d}$, deren Exponent als eine Differenz $m-n$ gedacht wird, kann in einen Quotienten zweyer Faktoriellen $a^{m|d}$ und $[a+(m-n)d]^{n|d}$, verwandelt werden, wenn man den Divisor so nimmt, daß er sich an die gegebene Faktorielle anschließt, und mit ihr multiplizirt, den Dividenden gibt, d. h. es ist

$$a^{m-n|d} = \frac{a^{m|d}}{[a+(m-n)d]^{n|d}}.$$

Beyspiele. So findet sich

$$4^{2|1} = \frac{4^{7|1}}{6^{5|1}}; \quad 4^{2|-1} = \frac{4^{7|-1}}{2^{5|-1}};$$

$$(-\tfrac{1}{2})^{3|-2} = \frac{(-\frac{1}{2})^{11|-2}}{(-6\frac{1}{2})^{8|-2}}; \quad 7^{5|-8} = \frac{7^{8|-8}}{(-33)^{3|-8}}.$$

Es ist nämlich

$$7^{8|-8} = 7\cdot(-1)\cdot(-9)\cdot(-17)\cdot(-25)\cdot(-33)\cdot(-41)\cdot(-49)$$

und $(-33)^{3|-8} = (-33)\cdot(-41)\cdot(-49)$,

so wie $7^{5|-8} = 7\cdot(-1)\cdot(-9)\cdot(-17)\cdot(-25)$;

und da fällt die Richtigkeit des Beyspiels sogleich in die Augen.

Beweis fällt aus (Lehrsatz 2.) unmittelbar in die Augen.

---

*) Wenn hier und in der Folge oft noch vorkommt, daß $a+d$ um d größer sey, als a (oder $a+7d$ um d größer als $a+6d$), so verstehe man darunter, daß zu dem letztern noch d addirt wird, wenn das erstere herauskommen soll. Wäre d allemal positiv, so wäre in der That $a+d>a$, $a+7d>a+6d$, u. s. w.; aber weil d allgemein, mithin positiv, negativ, imaginär seyn kann, so ist $a+d$ nicht nothwendig größer als a, im Sinne des (§. 112.); mithin ist der eben verbesserte Sprachgebrauch auch nur zugleich mit der Verbesserung beyzubehalten.

Oder auch: man dividire die Formel (2.) links und rechts durch $(a+md)^{n|d}$, nachdem man (vorher oder nachher) m—n statt m gesetzt hat, was allemal erlaubt ist, so lange unter m—n noch immer, wie in (2.) unter m, jede beliebige Zahl gedacht werden kann.

Lehrsatz 4. Zwey Faktoriellen $a^{m|d}$ und $a^{n|d}$, welche eine gemeinschaftliche Basis a und auch eine gemeinschaftliche Differenz d haben, werden durch einander dividirt, wenn man die Exponenten m und n von einander subtrahirt, die Differenz d beybehält, dagegen die neue Basis dadurch findet, daß man in dem Divisor $a^{n|d}$, den Exponenten n mit der Differenz d multiplizirt und zur Basis a addirt; d, h. es ist

$$\frac{a^{m|d}}{a^{n|d}} = (a+nd)^{m-n|d}.$$

Beyspiele. Hiernach ist

$$\frac{3^{8|-2}}{3^{5|-2}} = (-7)^{3|-2}; \quad \frac{4^{5|-\frac{1}{3}}}{4^{3|-\frac{1}{3}}} = 3^{2|-\frac{1}{3}};$$

$$\frac{1^{m|1}}{1^{n|1}} = (1+n)^{m-n|1}; \quad \frac{m^{m|-1}}{m^{n|-1}} = (m-n)^{m-n|-1}; \text{ u. s. w. s.}$$

Es ist nämlich $3^{8|-2} = 3\cdot1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdot(-7)\cdot(-9)\cdot(-11)$, und $3^{5|-2} = 3\cdot1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)$ und

$$(-7)^{3|-2} = (-7)\cdot(-9)\cdot(-11);$$

und so fällt die Richtigkeit des ersten Beyspiels in die Augen.

Beweis. Multiplizirt man den Ausdruck rechts $(a+nd)^{m-n|d}$, mit dem Divisor $a^{n|d}$, so kommt nach (Lehrsatz 2.) $a^{m|d}$, d. h. der Dividend heraus. Also ist die Formel (4.) richtig.

Oder auch: man dividire die (2.) rechts und links durch $a^{n|d}$, und setze nachgehends m—n statt m, was so lange erlaubt ist, als man sich unter m—n, wie in (2.) unter m, jede beliebige ganze Zahl gesetzt denkt.

Lehrsatz 5. Eine Faktorielle $a^{m|d}$, wird mit einer Potenz h^m, welche mit ihr einerlei Exponenten m hat, multiplizirt, wenn man die Basis a und die Differenz d, mit dem Dignanden h multiplizirt, den gemeinschaftlichen Exponenten m dagegen unverändert beybehält.

Oder auch:

Aus einer beliebigen Faktorielle $(ha)^{m|hd}$ kann eine Potenz h^m, welche mit ihr denselben Exponenten m hat, als Faktor herausgerückt werden, wenn man sowohl Basis ha, als auch die Differenz hd, durch den beliebig genommenen Dignanden h dividirt, den Exponenten m dagegen unverändert läßt; d. h. es ist $h^m \cdot a^{m|d} = (ha)^{m|hd}$.

Beyspiele. So ist z. B.

$4^3 \cdot (\frac{3}{4})^{3|-\frac{1}{2}} = (4 \cdot \frac{3}{4})^{3|-4 \cdot \frac{1}{2}} = 3^{3|-2}$; $(-2)^5 \cdot (-\frac{1}{2})^{5|-1} = 1^{5|2}$;

$(-6)^5 \cdot (-\frac{1}{2})^{5|\frac{1}{3}} = 3^{5|-2}$; $8^{3|4} = 4^3 \cdot 2^{3|1}$;

$(-8)^{3|-4} = (-4)^3 \cdot 2^{3|1}$; $7^{3|-5} = 2^3 \cdot (\frac{7}{2})^{3|-\frac{5}{2}}$; u. s. w. f.

Beweis. Denn es ist

$$a^{m|d} = a \cdot (a+d) \cdot (a+2d) \cdot \ldots \cdot [a+(m-1)d];$$

und $h^m = h \cdot h \cdot h \cdot \ldots \cdot h$;

also, wenn man links und rechts multiplizirt:

$$h^m \cdot a^{m|d} = (ha) \cdot (ha+hd) \cdot (ha+2hd) \cdot \ldots \cdot [ha+(m-1)hd],$$

d. h. $h^m \cdot a^{m|d} = (ha)^{m|hd}$.

Anmerkung. Dieses letztern Lehrsatzes bedient man sich besonders auch dann, wenn eine Faktorielle mit negativer Basis erscheint, z. B. $(-a)^{m|d}$, um sie in eine andere mit positiver Basis zu verwandeln. Da nämlich $(-1)^{2m} = (-1)^m \cdot (-1)^m = 1$ ist, so ist $(-a)^{m|d} = (-1)^m \cdot (-1)^m \cdot (-a)^{m|d} = (-1)^m \cdot a^{m|-d}$.

Und diese Faktorielle, welche eine negative Differenz $-d$ hat, kann man wieder nach (Nr. 1. §. 340.) in eine andere mit positiver Differenz verwandeln, und man erhält dann

$$(-a)^{m|d} = (-1)^m \cdot (a+d-md)^{m|d}.$$

§. 341. Zusatz.

Auch kann man in einer Faktorielle $a^{m|d}$ bald den ersten Faktor absondern, bald den letzten, so daß man hat:

1) $a^{m|d} = a \cdot (a+d)^{m-1|d}$; oder $a \cdot (a+d)^{n|d} = a^{n+1|d}$;

2) $a^{m|d} = a^{m-1|d} \cdot [a+(m-1)d]$; oder $a^{n|d} \cdot (a+nd) = a^{n+1|d}$.

Beyspiele. So zeigt sich

$2^{5|1} = 2 \cdot 3^{4|1} = 2^{4|1} \cdot 6$; $8^{4|-1} \cdot 9 = 9^{5|-1}$;

$4 \cdot 8^{4|-1} = 8^{4|-1} \cdot 4 = 8^{5|-1}$; $2^{5|1} = 1 \cdot 2^{5|1} = 1^{6|1}$; u. s. w. f.

Anmerkung. Was $a^{1|d}$, $a^{0|d}$, $a^{-3|d}$ u. dgl. bedeutet, ist in der Definition des (§. 339.) nicht enthalten. Will man aber, wie man früher von der ganzen Potenz zur Differenz-Potenz übergegangen ist (§§. 153—158.), jetzt auch von der ganzen Faktorielle zur Differenz-Faktorielle übergehen, so kann man sich dazu wieder der Formel (3.) des (§. 340.), nämlich

$$a^{m-n|d} = \frac{a^{m|d}}{[a+(m-n)d]^{n|d}}$$

bedienen, wenn man nur, nachdem die Definition der Differenz-Faktorielle festgestellt ist, untersucht, 1) ob dieselbe allemal auch wirklich eine Bedeutung, 2) ob sie allemal nur eine einzige, bestimmte Bedeutung habe, und 3) ob die Formeln des (§. 340.), nach welchen künftighin mit Faktoriellen operirt wird, auch noch für diese (allgemeinern) Differenz-Faktoriellen gelten.

§. 342. Erklärung.

Das Zeichen $a^{m|d}$, in welchem m eine Differenz $\alpha-\beta$ zweyer ganzen Zahlen α und β bedeutet, heiße von nun an Differenz-Faktorielle, und bedeute den Quotienten

$$\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}.$$

Was (§. 339.) als Faktorielle definirt worden ist, mag von nun an ganze Faktorielle genannt werden.

Anmerkung. Es erhellet sogleich, daß (wenn $\alpha > \beta$) die Differenz-Faktorielle zu gleicher Zeit eine ganze Faktorielle seyn kann, daß aber dann auch die Bedeutung der Differenz-Faktorielle, nach (§. 340. Nr. 3.), mit der Bedeutung der ganzen Faktorielle zusammenfällt.

§. 343. Zusatz.

Weil, wenn m die Differenz $\alpha-\beta$ vorstellt, man statt m auch die gleichen Differenzen $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ und $(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$ nehmen kann, so bedeutet, der vorliegenden Erklärung zu Folge, die Differenz-Faktorielle $a^{m|d}$ einmal den Quotienten

$$\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}},$$

ein andermal den Quotienten $\frac{a^{\alpha+\gamma|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta+\gamma|d}}$,

und dann wiederum den Quotienten $\frac{a^{\alpha-\gamma|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta-\gamma|d}}$;

und es fragt sich daher, ob diese drey Bedeutungen jedesmal in eine und dieselbe fallen, oder von einander verschieden seyn können? —

Es ist aber, weil α, β, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, $\alpha-\gamma$ und $\beta-\gamma$, durchaus als absolute (positive) ganze Zahlen angesehen werden müssen, nach (§. 340. Nr. 2.):

1) $a^{\alpha+\gamma|d} = a^{\alpha|d} \cdot (a+\alpha d)^{\gamma|d}$,

2) $[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta+\gamma|d} = [a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d} \cdot (a+\alpha d)^{\gamma|d}$;

und nach (§. 340. Nr. 3.):

3) $a^{\alpha-\gamma|d} = a^{\alpha|d} : [a+(\alpha-\gamma)d]^{\gamma|d}$,

4) $[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta-\gamma|d} = [a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d} : [a+(\alpha-\gamma)d]^{\gamma|d}$;

und dividirt man hier (1.) durch (2.), so wie (3.) durch (4.), so erhellet, daß rechts die gemeinschaftlichen Faktoren oder die gemeinschaftlichen Divisoren sich wegdividiren, daß also alle drey obigen Bedeutungen von $a^{m|d}$ einander gleich sind.

Es hat also die Differenz-Faktorielle allemal wirklich eine Bedeutung und zugleich auch allemal nur eine einzige, völlig bestimmte; d. h. sie ist allemal nur eindeutig.

§. 344. Zusatz.

Will man aber nun die Bedeutung von

$$a^{1|d}, \quad a^{0|d} \quad \text{und} \quad a^{-\beta|d}$$

wissen, so bemerke man, daß

$$1 = (\alpha+1)-\alpha,$$

$$0 = \alpha-\alpha,$$

und

$$-\beta = \alpha-(\alpha+\beta)$$

ist, unter α und β absolute ganze Zahlen gedacht; und daß also (nach §. 342.):

$a^{1|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha+1|d}}{(a+d)^{\alpha|d}}$,

$a^{0|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha|d}}{a^{\alpha|d}}$,

und $a^{-\beta|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha|d}}{(a-\beta d)^{\alpha+\beta|d}}$

vorstellt. — Weil aber nach (§. 341.)

$$a^{\alpha+1|d} = a \cdot (a+d)^{\alpha|d},$$

und nach (§. 340. Nr. 2.)

$(a-\beta d)^{\alpha+\beta|d} = (a-\beta d)^{\beta|d} \cdot a^{\alpha|d}$ ist, so findet sich demnach 1) $a^{1|d} = a$;

2) $a^{0|d} = 1$;

3) $a^{-\beta|d} = \frac{1}{(a-\beta d)^{\beta|d}} = \frac{1}{(a-d)^{\beta|-d}}$,

wenn man zugleich die Formel (§. 340. Nr. 1.) in Anwendung bringt.

§. 345. Zusatz.

Man muß nun untersuchen, ob die Lehrsätze des (§. 340. Nr. 1—5.) auch noch gelten werden, wenn die dortigen Faktoriellen solche allgemeinere Differenz-Faktoriellen sind,

d. h. wenn m die Differenz $\alpha-\beta$,
und n die Differenz $\gamma-\delta$,
also m+n die Differenz $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$,
und m—n die Differenz $(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)$
bedeuten, und dabei α, β, γ, δ positive ganze Zahlen sind.

Es bedeutet aber dann nach (§. 342.)

$a^{m|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}$

$[a+(m-1)d]^{m|-d}$ den Quotienten $\frac{[a+(\alpha-\beta-1)d]^{\alpha|-d}}{(a-d)^{\beta|-d}}$;

und die Formel (§. 340. Nr. 1.) ist offenbar noch jetzt richtig, wenn beyde letztern Quotienten einander gleich sind. Weil aber die in diesen Quotienten vorkommenden Faktoriellen ganze sind,

für welche die Formeln (§. 340.) bereits gelten, so kann man in dem letztern Quotienten

$$\frac{[a+(\alpha-\beta-1)d]^{\alpha|-d}}{(a-d)^{\beta|-d}}$$

die Faktoriellen mit der Differenz $-d$, in andere mit der Differenz $-(-d)$, d. h. $+d$ oder d verwandeln nach (§. 340. Nr. 1.), und erhält statt seiner dann diesen andern:

$$\frac{(a-\beta d)^{\alpha|d}}{(a-\beta d)^{\beta|d}};$$

und daß dieser jetzige Quotient dem erstern gleich ist, d. h. wirklich

$$\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}} = \frac{(a-\beta d)^{\alpha|d}}{(a-\beta d)^{\beta|d}}$$

ist, sieht man augenblicklich ein, sobald man diese beyden Brüche auf gleiche Benennung bringt und bemerkt, daß die beyden Zähler

$$(a-\beta d)^{\beta|d} \cdot a^{\alpha|d}$$

und

$$(a-\beta d)^{\alpha|d} \cdot [a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d},$$

alle beyde nach (§. 340. Nr. 2.)

$$= (a-\beta d)^{\alpha+\beta|d},$$

also auch beyde einander gleich sind.

Es gilt also die Formel (§. 340. Nr. 1.) auch noch, wenn die Faktoriellen beliebig positive oder negative ganze Zahlen oder auch Null zum Exponenten haben.

Was (§. 340. Nr. 2.) betrifft, so bedeutet jetzt

$a^{m+n|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha+\gamma|d}}{[a+(\alpha+\gamma-\beta-\delta)d]^{\beta+\delta|d}}$,

während

$a^{m|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}$

und

$(a+md)^{n|d}$ den Quotienten $\frac{[a+(\alpha-\beta)d]^{\gamma|d}}{[a+(\alpha+\gamma-\beta-\delta)d]^{\delta|d}}$

bedeutet; und die Gleichung (§ 340. Nr. 2.) ist offenbar noch jetzt richtig, sobald die beyden letztern dieser Quotienten, mit einander multiplizirt, den erstern geben; welche Thatsache jedoch

sogleich in die Augen fällt, wenn man Zähler und Nenner des zweyten Quotienten $\frac{\alpha^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}$ mit $(a+\alpha d)^{\gamma|d}$ multiplizirt, weil dann der Zähler desselben nach (§. 340. Nr. 2.) in $a^{\alpha+\gamma|d}$, der Nenner aber nach derselben (Nr. 2. des §. 340.) in $[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta+\gamma|d}$, d. h. in $[a+(\alpha-\beta)d]^{\gamma|d}\cdot[a+(\alpha+\gamma-\beta)d]^{\beta|d}$ übergeht, welcher sich gegen den Zähler des dritten Quotienten

$$\frac{[a+(\alpha-\beta)d]^{\gamma|d}}{[a+(\alpha+\gamma-\beta-\delta)d]^{\delta|d}}$$

aufhebt, wenn in letzterem Zähler nnd Nenner zugleich mit $[a+(\alpha+\gamma-\beta)d]^{\beta|d}$ multiplizirt wird.

Also gilt auch die Gleichung (§. 340. Nr. 2.) noch für diese (allgemeinern) Differenz-Faktoriellen.

Weil ferner

$a^{m|d}$ den Quotienten $\frac{a^{\alpha|d}}{[a+(\alpha-\beta)d]^{\beta|d}}$,

h^m den Quotienten $\frac{h^\alpha}{h^\beta}$,

und $(ha)^{m|hd}$ den Quotienten $\frac{(ha)^{\alpha|hd}}{[ha+(\alpha-\beta)hd]^{\beta|hd}}$

bedeutet, so wird auch (§. 340. Nr. 5.) für Differenz-Faktoriellen noch gelten, weil offenbar die beyden erstern Quotienten mit einander multiplizirt den letztern geben, sobald dieselbe (Nr. 5. des §. 340.), welche für ganze Faktoriellen dort schon erwiesen ist, hier bei dem Multipliziren der Zähler und Nenner zu Hilfe genommen wird.

Und weil für Differenz-Faktoriellen, der Satz (Nr. 2. des §. 340.), nämlich daß

$$a^{m+n|d} = a^{m|d}\cdot(a+md)^{n|d}$$

ist, bereits als wahr anerkannt worden, so erhält man auch noch, wenn man diese Gleichung abwechselnd durch den einen oder durch den andern der beyden Faktoren rechts dividirt:

$$\frac{a^{m+n|d}}{(a+md)^{n|d}} = a^{m|d}$$

und

$$\frac{a^{m+n|d}}{a^{m|d}} = (a+md)^{n|d},$$

welche die (Nr. 3 und 4. des §. 340.) sind, in so ferne in der erstern durchaus m—n statt m, und in der andern zuerst n statt m, und m statt n, und dann in der neu entstehenden Formel m—n statt m gesetzt werden kann, weil m, n, m—n beliebige Differenzen ganzer Zahlen vorstellen, also beliebige andere Differenzen ganzer Zahlen dafür gesetzt werden können *).

Es gelten also alle fünf Nummern des (§. 340) auch dann noch, wenn die dortigen Faktoriellen, solche allgemeine Differenz-Faktoriellen sind, d. h. wenn unter den Exponenten der dortigen Faktoriellen, beliebig bald ganze positive, bald ganze negative Zahlen, bald auch die Null, zu finden sind **).

---

*) Anfänger mögen zuerst u statt m, und v statt n setzen, und dann in den neuen Gleichungen statt u und v wieder das substituiren, was gerade Noth thut, um die Gleichungen (3 und 4. des §. 340.) genau in der dortigen Gestalt zu erhalten.

**) Es ist nicht möglich, einen Begriff der gebrochenen Faktorielle $a^{m|d}$ (unter der Voraussetzung, daß $m = \frac{\alpha}{\beta}$ ist) hinzustellen, für welchen alle fünf Nummern des (§. 340.) noch geltend bleiben. Und namentlich ist der Begriff der gebrochenen Faktorielle, wie solcher in den Anwendungen von Vandermonde, Kramp ꝛc. gebraucht werden, von der Art, daß für diese gebrochenen Faktoriellen nur die Formeln (1 und 2.), also natürlich auch die mit (2.) zugleich gegebenen (Nr. 3 und 4.) des (§. 340.) noch statt finden, nicht aber die Formel (Nr. 5. §. 340.). Wenn wir daher zuerst von Kramp stillschweigend, dann von Crelle ausdrücklich die allgemeine Faktorielle als ein Ding definirt finden, welches die in den (Nr. 1., 2. und 5. des §. 340.) ausgesprochenen Eigenschaften hat, so rächt sich dieses unlogische Verfahren sogleich dadurch, daß bey Kramp (Réfractions astronomiques et terrestres 1799, Chap. III.) sehr bedeutende, von ihm selbst zugestandene und ihm unbegreifliche Widersprüche hervorgehen, während bei Crelle „Theorie der analytischen Fakultäten 1824“ die wenigsten der Formeln wahr sind, ohne daß jedoch solches von dem Verfasser bemerkt worden wäre, weil sich derselbe nicht, wie Kramp gethan, auf spezielle Untersuchungen eingelassen, sondern nur allgemeine Formeln auf allgemeine Formeln gehäuft hat,

§. 346. Zusatz.

Weil aber $b = b^{1|d}$ ist, so finden sich sogleich noch folgende, für Differenz-Faktoriellen geltende Formeln, besonders aus (Nr. 5. §. 340.)

1) $a \cdot (a+d)^{m|d} = a^{m+1|d}$;

2) $a^{m|d} \cdot (a+md) = a^{m+1|d}$;

3) $(-a)^{m|d} = (-1)^m \cdot (+a)^{m|-d} = (-1)^m \cdot (a+d-md)^{m|d}$;

4) $a^{m|d} = a^m \cdot 1^{m|(d:a)}$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^{m|d} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot 1^{m|(db:a)}$;

6) $a^{m|d} = d^m \cdot \left(\frac{a}{d}\right)^{m|1}$;

7) $a^{m|d} = \left(\frac{d}{c}\right)^m \cdot \left(\frac{ac}{d}\right)^{m|c}$;

welche als Uebungsbeyspiele für die Anwendung der Formeln (2. und 5.) der (§§. 340. und 345.) angesehen werden können.

Anmerkung. Es lehren aber diese letztern Sätze (Nr. 3—7.), wie man Faktoriellen in andere verwandelt, bloß durch Anwendung der (Nr. 5. des §. 340.), welche entweder eine gegebene Basis, oder eine gegebene Differenz haben.

§. 347. Lehrsätze.

Ist m irgend eine Differenz ganzer Zahlen, also eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null, so ist allemal

I. 1) $a^{2m|d} = a^{m|2d} \cdot (a+d)^{m|2d}$;

2) $a^{2m+1|d} = a^{m+1|2d} \cdot (a+d)^{m|2d}$;

II. 1) $a^{3m|d} = a^{m|3d} \cdot (a+d)^{m|3d} \cdot (a+2d)^{m|3d}$;

2) $a^{3m+1|d} = a^{m+1|3d} \cdot (a+d)^{m|3d} \cdot (a+2d)^{m|3d}$;

3) $a^{3m+2|d} = a^{m+1|3d} \cdot (a+d)^{m+1|3d} \cdot (a+2d)^{m|3d}$;

u. s. w. f.

---

welche daher, als solche, größtentheils für todtgeboren gehalten werden müssen. — Je mehr Talent aber die eben genannten Mathematiker sonst bewährt haben, desto schwerer treffen solche Resultate unsere Analysis; sie lehren, daß unser bisheriges Verfahren, Analysis zu treiben, durchaus unwissenschaftlich und trügerisch war und ist.

Beweise. Ist m eine positive ganze Zahl, so erhellen diese Sätze unmittelbar aus der Definition des (§. 339.), indem das Produkt von 2m oder 2m+1, oder 3m oder 3m+1 oder 3m+2 Faktoren, in zwey oder drey Produkte zerlegt wird, aus den geraden oder ungeraden, oder aus jedem dritten Faktor zusammengesetzt.

Und ist m einer Differenz $\alpha-\beta$ zweyer ganzen Zahlen gleich, oder einer negativen ganzen Zahl $-\gamma$, so ergeben sich diese Sätze, genau nach (§. 345.) verfahrend, und dann noch etwas leichter, wenn man $-\gamma$ statt $\alpha-\beta$ setzt und (§. 344. Nr. 3.) in Anwendung bringt, dabey aber nicht vergißt, daß dieselben Formeln für ganze positive Exponenten bereits gelten, also für solche angewandt werden dürfen.

Auch diese Beweise durchzuführen, mag als eine Anzahl von Uebungsbeyspielen angesehen, und daher dem Anfänger überlassen werden.

§. 348. Erklärung.

Die Faktorielle $1^{m|1}$ oder $m^{m|-1}$, wo m eine Differenz $\alpha-\beta$ ganzer Zahlen ist, nennen wir insbesondere die m^{te} Fakultät, und es wird solche kürzer durch

m' oder durch $m!$ bezeichnet.

Beyspiele. Daher ist

$$0! = 1; \quad 1! = 1; \quad 2! = 2; \quad 3! = 6;$$
$$4! = 24; \quad 5! = 120; \quad 6! = 720; \quad \text{u. s. w. f.,}$$

und

$$(-1)! = \tfrac{1}{0}; \quad (-2)! = \tfrac{1}{0}; \quad (-3)! = \tfrac{1}{0}; \quad \text{u. s. w. f.}$$

So oft man daher mit m! operirt, so oft muß m selbst 0 oder eine ganze positive Zahl seyn, nach (§. 96.).

§. 349. Zusatz.

Ferner folgt noch aus (§. 340. Nr. 1., 3. und 4.) und (§. 346. Nr. 1. und 2.)

$$1)\ \frac{(m+n)!}{n!} = (m+n)^{m|-1} = (n+1)^{m|1};$$

$$2)\ \frac{(m+n)!}{m!\ n!} = \frac{(m+n)^{m|-1}}{m!} = \frac{(m+n)^{n|-1}}{n!};$$

$$3)\ \frac{(n+1)!}{n!} = n+1;$$

$$4)\ (n-1)! = \frac{n!}{n}.$$

Anmerkung. Auch diese Formeln betrachte man bloß als Uebungsbeyspiele über die Verwandlung der Ausdrücke, welche Faktoriellen enthalten. Um eine einzige davon näher zu rücken, nehmen wir das erste dieser Beyspiele und bemerken, daß $(m+n)!$ statt der Faktorielle $1^{m+n|1}$ oder $(m+n)^{m+n|-1}$, so wie $n!$ statt der Faktorielle $1^{n|1}$ oder $n^{n|-1}$ steht, so daß also

$$\frac{(m+n)!}{n!} = \frac{1^{m+n|1}}{1^{n|1}}, \text{ oder auch } = \frac{(m+n)^{m+n|-1}}{n^{n|-1}} \text{ ist.}$$

Der erstere Quotient $\frac{1^{m+n|1}}{1^{n|1}}$ gibt nach (§. 340. Nr. 4.) sogleich $(1+n)^{m|1}$; und dieses nach (§. 340. Nr. 1.) wiederum $(m+n)^{m|-1}$; welches letztere jedoch auch erhalten worden wäre, wenn man auf obigen zweyten Quotienten $\frac{(m+n)^{m+n|-1}}{n^{n|-1}}$ die Formel des (§. 340. Nr. 3.) in Anwendung gebracht hätte.

§. 350. Erklärung.

Den in der Folge sehr oft vorkommenden Quotienten

$\frac{x^{n|-1}}{n!}$ bezeichnen wir durch x_n,

wo x jeden Ausdruck, n aber jede Differenz ganzer Zahlen vorstellt.

In der Folge wird also jedes solche Zeichen, wie z. B. m_n, in dieser Bedeutung genommen, so daß man sich den Quotienten $\frac{m^{n|-1}}{n!}$ darunter vorgestellt denkt; so oft nämlich nicht ausdrücklich das Gegentheil festgesetzt wird.

Beyspiele. Es bedeutet also:

7_3 den Quotienten $\frac{7^{3|-1}}{3!}$ oder $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ oder 35;

7_4 ... . $\frac{7^{4|-1}}{4}$ oder $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ oder 35;

$(-\frac{1}{2})_2$ den Quot. $\frac{(-\frac{1}{2})^{2|-1}}{2!}$ oder $\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}$ oder $\frac{3}{8}$;

$(-5)_8$ den Quotienten $\frac{(-5)^{8|-1}}{8!}$

oder $\frac{(-5)(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)(-12)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ oder 495;

5_1 den Quotienten $\frac{5^{1|-1}}{1!}$ d. h. $\frac{5}{1}$ oder 5;

9_0 den Quotienten $\frac{9^{0|-1}}{0!}$ d. h. $\frac{1}{1}$ oder 1;

u. s. w. f.

Auch kann man sich leicht für die Werthe von m_n, je nachdem statt n und statt m nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ꝛc. ꝛc. gesetzt wird, folgende Tafel bilden:

	Werthe der Ausdrücke.								
Für die Werthe	m_0,	m_1,	m_2,	m_3,	m_4,	m_5,	m_6,	m_7,	m_8, etc.
von $m_, = 1$	1,	1,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0, etc.
2	1,	2,	1,	0,	0,	0,	0,	0,	0, etc.
3	1,	3,	3,	1,	0,	0,	0,	0,	0, etc.
4	1,	4,	6,	4,	1,	0,	0,	0,	0, etc.
5	1,	5,	10,	10,	5,	1,	0,	0,	0, etc.
6	1,	6,	15,	20,	15,	6,	1,	0,	0, etc.
7	1,	7,	21,	35,	35,	21,	7,	1,	0, etc.
8	1,	8,	28,	56,	70,	56,	28,	8,	1, etc.
9	1,	9,	36,	84,	126,	126,	84,	36,	9, etc.
10	1,	10,	45,	120,	210,	252,	210,	120,	45, etc.
11	1,	11,	55,	165,	330,	462,	462,	330,	165, etc.
12	1,	12,	66,	220,	495,	792,	924,	792,	495, etc.
13	1,	13,	78,	286,	715,	1287,	1716,	1716,	1287, etc.
14	1,	14,	91,	364,	1001,	2002,	3003,	3432,	3003, etc.
15	1,	15,	105,	455,	1365,	3003,	5005,	6435,	6435, etc.
16	1,	16,	120,	560,	1820,	4368,	8008,	11440,	12870, etc.

Und man bemerkt dabey, daß in diesen Reihen von Zahlen, eine jede derselben die Summe ist, aus der zunächst über ihr, und der dieser letzten am nächsten zur Linken stehenden Zahl.

Ferner findet sich:

$\left(\frac{19}{3}\right)_6 = \frac{13832}{6561} = 2\frac{710}{6561}$; und

$\left(\frac{17}{2}\right)_2 = 31\frac{7}{8}$; $\left(\frac{17}{2}\right)_3 = 69\frac{1}{16}$; $\left(\frac{17}{2}\right)_4 = 94\frac{123}{128}$;

$\left(\frac{17}{2}\right)_5 = 85\frac{119}{256}$; $\left(\frac{17}{2}\right)_6 = 49\frac{875}{1024}$; $\left(\frac{17}{2}\right)_7 = 17\frac{1649}{2048}$;

$$\left(\frac{17}{2}\right)_8 = 3\frac{11091}{32768}; \quad \left(\frac{17}{2}\right)_9 = \frac{12155}{65536}; \text{ u. s. w.}$$

Auch übe man sich noch an folgenden Beyspielen:

$$\left(\frac{p}{q}\right)_6 = \frac{p(p-q)p-2q)(p-3q)(p-4q)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot q^5};$$

$$(-p)_5 = -\frac{p(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = -(p+4)_5;$$

$$(-n)_2 = \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)_2;$$

$$(-n)_3 = -\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -(n+2)_3;$$

$$(-n)_4 = +\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = (n+3)_4;$$

$$(-n)_5 = -\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = -(n+4)_5;$$

$$(-n)_6 = +(n+5)_6; \quad (-n)_7 = -(n+6)_7; \text{ u. s. w.}$$

Als speziellere Beyspiele betrachte man:

$(-2)_2=3$; $(-2)_3=-4$; $(-2)_4=5$; $(-2)_5=-6$; $(-2)_6=7$;
$(-3)_2=6$; $(-3)_3=-10$; $(-3)_4=15$; $(-3)_5=-21$; $(-3)_6=28$;
$(-4)_2=10$; $(-4)_3=-20$; $(-4)_4=35$; $(-4)_5=-56$; $(-4)_6=48$;
$(-5)_2=15$; $(-5)_3=-35$; $(-5)_4=70$; $(-5)_5=-126$; $(-5)_6=210$.

Und wiederum für gebrochene Werthe von x:

$(\frac{1}{2})_2=-\frac{1}{8}$; $(\frac{1}{2})_3=\frac{1}{16}$; $(\frac{1}{2})_4=-\frac{5}{128}$; $(\frac{1}{2})_5=\frac{7}{256}$; $(\frac{1}{2})_6=-\frac{21}{1024}$; u. s. f.
$(\frac{1}{3})_2=-\frac{1}{9}$; $(\frac{1}{3})_3=\frac{5}{81}$; $(\frac{1}{3})_4=-\frac{10}{243}$; $(\frac{1}{3})_5=\frac{22}{729}$; $(\frac{1}{3})_6=-\frac{154}{6569}$; u. s. f.
$(\frac{2}{3})_2=-\frac{1}{9}$; $(\frac{2}{3})_3=\frac{4}{81}$; $(\frac{2}{3})_4=-\frac{7}{234}$; $(\frac{2}{3})_5=\frac{14}{729}$; $(\frac{2}{3})_6=-\frac{91}{6561}$; u. s. f.
$(\frac{5}{3})_2=\frac{5}{9}$; $(\frac{5}{3})_3=-\frac{5}{81}$; $(\frac{5}{3})_4=-\frac{5}{243}$; $(\frac{5}{3})_5=-\frac{7}{729}$; $(\frac{2}{3})_6=-\frac{35}{65561}$; u. s. f.
$(\frac{1}{4})_2=-\frac{3}{32}$; $(\frac{1}{4})_3=\frac{7}{128}$; $(\frac{1}{4})_4=-\frac{77}{2048}$; $(\frac{1}{4})_5=\frac{231}{8192}$; $(\frac{1}{4})_6=-\frac{1463}{65536}$;
$(\frac{3}{4})_2=-\frac{3}{32}$; $(\frac{3}{3})_3=\frac{5}{128}$; $(\frac{3}{4})_4=-\frac{45}{2048}$; $(\frac{3}{4})_5=\frac{117}{3192}$; $(\frac{3}{4})_6=-\frac{663}{65536}$;
$(-\frac{1}{3})_2=\frac{2}{9}$; $(-\frac{1}{3})_3=-\frac{14}{81}$; $(-\frac{1}{3})_4=\frac{35}{243}$; $(-\frac{1}{3})_5=-\frac{91}{729}$; $(-\frac{1}{3})_6=\frac{728}{6561}$;
$(-\frac{2}{3})_2=\frac{5}{9}$; $(-\frac{2}{3})_3=-\frac{40}{81}$; $(-\frac{2}{3})_4=\frac{110}{243}$; $(-\frac{2}{3})_5=-\frac{308}{729}$;
$(-\frac{2}{3})_6=\frac{2618}{6561}$; u. s. f.
$(-\frac{1}{4})_2=\frac{5}{23}$; $(-\frac{1}{4})_3=-\frac{15}{128}$; $(-\frac{1}{4})_4=\frac{195}{2048}$; $(-\frac{1}{4})_5=-\frac{663}{8192}$;
$(-\frac{1}{4})_6=\frac{4641}{65536}$; u. s. f.
$(-\frac{2}{4})_2=\frac{21}{32}$; $(-\frac{3}{4})_3=-\frac{77}{128}$; $(-\frac{3}{4})_4=\frac{1155}{2048}$; $(-\frac{3}{4})_5=-\frac{4389}{8192}$;
$(-\frac{3}{4})_6=\frac{33649}{65536}$; u. s. f.
$(\frac{1}{5})_2=-\frac{2}{25}$; $(\frac{1}{5})_3=\frac{6}{125}$; $(\frac{1}{5})_4=-\frac{21}{625}$; $(\frac{1}{5})_5=\frac{399}{15625}$; $(\frac{1}{5})_6=-\frac{1596}{78125}$
$(\frac{2}{5})_2=-\frac{3}{25}$; $(\frac{2}{5})_3=\frac{8}{123}$; $(\frac{2}{5})_4=-\frac{26}{652}$; $(\frac{2}{5})_5=\frac{468}{15625}$; $(\frac{2}{2})_6=-\frac{1794}{78125}$;
$(\frac{3}{5})_2=-\frac{3}{25}$; $(\frac{3}{5})_3=\frac{7}{125}$; $(\frac{3}{5})_4=-\frac{7}{125}$; $(\frac{3}{5})_5=\frac{357}{15625}$; $(\frac{3}{5})_6=-\frac{1309}{78125}$;
$(\frac{4}{5})_2=-\frac{2}{25}$; $(\frac{4}{5})_3=\frac{4}{125}$; $(\frac{4}{5})_4=-\frac{4}{125}$; $(\frac{4}{5})_5=\frac{176}{15625}$; $(\frac{4}{5})_6=-\frac{616}{78125}$;
$(-\frac{1}{5})_2=\frac{3}{25}$; $(-\frac{1}{5})_3=-\frac{11}{125}$; $(-\frac{1}{5})_4=\frac{44}{625}$; $(-\frac{1}{5})_5=-\frac{924}{15625}$;
$(-\frac{1}{5})_6=\frac{4004}{78125}$; u. s. f.

$(-\frac{2}{5})_2 = \frac{7}{25}$; $(-\frac{2}{5})_3 = -\frac{28}{125}$; $(-\frac{2}{5})_4 = \frac{119}{625}$; $(-\frac{2}{5})_5 = -\frac{2618}{15625}$;
$(-\frac{2}{5})_6 = \frac{11781}{78125}$; u. ſ. f.

$(-\frac{3}{5})_2 = \frac{12}{25}$; $(-\frac{3}{5})_3 = -\frac{52}{125}$; $(-\frac{3}{5})_4 = \frac{234}{625}$; $(-\frac{3}{5})_5 = -\frac{5382}{15625}$;
$(-\frac{3}{5})_6 = \frac{25116}{78125}$; u. ſ. f.

$(-\frac{4}{5})_2 = \frac{18}{25}$; $(-\frac{4}{5})_3 = -\frac{84}{125}$; $(-\frac{4}{5})_4 = \frac{399}{625}$; $(-\frac{4}{5})_5 = -\frac{9576}{15625}$;
$(-\frac{4}{5})_6 = \frac{46284}{78125}$; u. ſ. w. f.

§. 351. Zuſatz.

Sind m und n Null oder poſitive ganze Zahlen, ſo hat man, nach (§. 349. und §. 340.):

1) $\frac{(m+n)!}{m!\ n!} = (m+n)_m = (m+n)_n$;

2) $m_n = m_{(m-n)}$;

3) $m_m = m_0 = 1$;

4) $m_n = 0$, ſo oft $n > m$ iſt;

5) $(-m)_n = (-1)^n \cdot (m+n-1)_n = (-1)^n \cdot (m+n-1)_{m-1}$;

6) $(-1)^n \cdot (-m-1)_n = (-1)^m \cdot (-n-1)_m = \frac{(m+n)!}{m!\ n!}$.

Wir wollen bloß die Ableitung von (Nr. 5.) und (Nr. 6.) hierher ſetzen. Es iſt nämlich:

$$(-m)_n = \frac{(-m)^{n|-1}}{n!}; \quad \text{aber } (-m)^{n|-1} = (-1)^n \cdot m^{n|1}$$

und $m^{n|+1} = (m+n-1)^{n|-1}$; alſo

$$(-m)_n = (-1)^n \cdot \frac{(m+n-1)^{n|-1}}{n!}; \quad \text{d. h. } = (-1)^n (m+n-1)_n,$$

während nach (Nr. 2.) $(m+n-1)_n = (m+n-1)_{m-1}$ iſt.

Auf dieſelbe Weiſe findet ſich:

$$(-1)^n (-m-1)_n = (-1)^n \cdot \frac{(-m-1)^{n|-1}}{n!} = \frac{(m+1)^{n|1}}{n!}$$

$$= \frac{(m+n)^{n|-1}}{n!} = (m+n)_n = \frac{(m+n)!}{m!\ n!};$$

aber auch aus denſelben Gründen:

$$(-1)^m (-n-1)_m = (m+n)_m = \frac{(m+n)!}{m!\ n!}.$$

Beyspiele. So ist:

$$7_3 = 7_4; \quad 9_2 = 9_7; \quad 14_6 = 14_8; \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist nämlich $9_2 = \frac{9^{2|-1}}{2!} = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2}$; dagegen

$$9_7 = \frac{9^{7|-1}}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 36.$$

Ferner ist

$$9_3 = \frac{9!}{3!\ 6!}; \quad 8_5 = \frac{8!}{5!\ 3!}; \quad 10_3 = \frac{10!}{3!\ 7!};$$

es ist nämlich

$$10_3 = \frac{10^{3|-1}}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \text{ dagegen}$$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, und

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$; so wie $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

Dann hat man

$$5_5 = \frac{5^{5|-1}}{5!} = \frac{5!}{5!} = 1; \text{ dagegen}$$

$$3_5 = \frac{3^{5|-1}}{5!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 0.$$

Endlich ist

$(-5)_3 = (-1)^3 \cdot 7_3 = -7_3$; $(-7)_4 = (-1)^4 \cdot (10)_4 = (10)_4$;
$(-8)_5 = (-1)^5 \cdot (12)_5 = -(12)_5$; $(-8)_6 = (-1)^6 \cdot (13)_6 = (13)_6$;
u. s. w. f.

Es ist nämlich

$$(-8)_6 = \frac{(-8)^{6|-1}}{6!} = \frac{(-8)(-9)(-10)(-11)(-12)(-13)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$= \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = (13)_6;$$

und

$$(-8)_5 = \frac{(-8)^{5|-1}}{5!} = \frac{(-8)(-9)(-10)(-11)(-12)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$= -\frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = -(12)_5.$$

§. 352. Zusatz.

Ist aber x ein ganz allgemeiner Ausdruck, und sind dabey m und n noch immer Null oder ganze positive Zahlen, so findet sich noch:

1) $(m+n)_n \cdot x_{m+n} = x_m \cdot (x-m)_n = x_n \cdot (x-n)_m$;
2) $x_{n+1} + x_n = (x+1)_{n+1}$;
3) $(-x)_n = (-1)^n \cdot (x+n-1)_n$;
4) $x_0 = 1$; auch $0_0 = 1$;
5) $x_1 = x$; auch $1_1 = 1$;
6) $0_m = 0$, so lange m nicht Null ist.

Denn es ist

$$(m+n)_n \cdot x_{m+n} = \frac{(m+n)^{n|-1}}{n!} \cdot \frac{x^{m+n|-1}}{(m+n)!};$$

aber $(m+n)^{n|-1} = \frac{(m+n)!}{m!}$ und $x^{m+n|-1} = x^{m|-1} \cdot (x-m)^{n|-1}$;

und daraus folgt denn (Nr. 1.). — Ferner ist

$$x_{n+1} = \frac{x^{n+1|-1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n|-1} \cdot (x-n)}{(n+1)!},$$

$$x_n = \frac{x^{n|-1}}{n!} = \frac{x^{n|-1} \cdot (n+1)}{(n+1)!};$$

also, wenn man beyde Gleichungen addirt:

$$x_{n+1} + x_n = \frac{x^{n|-1}(x+1)}{(n+1)!} = \frac{(x+1)^{n+1|-1}}{(n+1)!};$$

und so erhellet (Nr. 2). —

Beyspiele. So ist

$$8_3 \cdot x_8 = x_5 \cdot (x-5)_3 = x_3 \cdot (x-3)_5;$$

es ist nämlich

$$8_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ und } x_8 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8};$$

und

$$x_3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}; \quad (x-3)_5 = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5};$$

oder

$$x_5 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}; \quad (x-5)_3 = \frac{(x-5)(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ferner ist

$x_4 + x_3 = (x+1)_4$; es ist nämlich:

$$x_4 = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}; \qquad x_3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

also, wenn man addirt:

$$x_4 + x_3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}[(x-3)+4] = \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

§. 353. Zusatz.

Endlich ist noch

1) $\left(\frac{p}{q}\right)_n = \frac{p^{n|-q}}{q^n \cdot n!} = \frac{(p+q-nq)^{n|q}}{q^n \cdot n!}$;

2) $\left(-\frac{p}{q}\right)_n = (-1)^n \cdot \frac{p^{n|q}}{q^n \cdot n!}$;

so wie früher schon

3) $(-p)_n = (-1)^n \cdot \frac{p^{n|1}}{n!} = (-1)^n \cdot (p+n-1)_n$

gefunden worden war, wenn nur n eine beliebige ganze positive Zahl oder Null ist, während p und q ganz allgemein seyn können.

Beyspiele. So findet sich:

$$\left(\frac{7}{4}\right)_5 = \frac{7^{5|-4}}{4^5 \cdot 5!} = \frac{(-9)^{5|4}}{4^5 \cdot 5!};$$

$$\left(-\frac{7}{4}\right)_5 = (-1)^5 \cdot \frac{7^{5|4}}{4^5 \cdot 5!} \quad ; \quad \text{u. s. w. s.}$$

Zweite Abtheilung.

Von den figurirten Zahlen.

---

§. 354. Erklärung.

Nimmt man die arithmetische Reihe

1, 2, 3, 4, 5, ...

und bildet man daraus neue Reihen, so daß ihr erstes Glied immer **1**, und jedes n^{te} Glied einer neuen Reihe, gleich ist der Summe der ersten n Glieder der nächstvorhergehenden Reihe, so erhält man unbegränzt viele neue Zahlen-Reihen, die man Reihen der figurirten Zahlen, oder auch figurirte Reihen nennt, und zwar beziehlich figurirte Reihen der

zweyten, dritten, vierten, ꝛc. ꝛc. m^{ten} Ordnung. Die erste angenommene Reihe **1, 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc. ꝛc.**, aus welcher alle abgeleitet sind, nennt man dann auch eine figurirte Reihe der ersten Ordnung, so wie sie auch die Reihe der natürlichen Zahlen genannt wird.

Die Reihen selbst sind in nachstehendem Schema enthalten:

I.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8, ...
II.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36, ...
III.	1,	4,	10,	20,	35,	56,	84,	120, ...
IV.	1,	5,	15,	35,	70,	126,	210,	330, ...
V.	1,	6,	21,	56,	126,	252,	462,	792, ...
VI.	1,	7,	28,	84,	210,	462,	924,	1716, ...
VII.	1,	8,	36,	120,	330,	792,	1716,	3432, ...

u. s. w. f.

§. 355. Zusatz.

Bezeichnet man durch

$$S_m^n$$

die Summe von n Gliedern der figurirten Reihe der m^{ten} Ordnung, so wie das n^{te} Glied derselben Reihe durch

$$T_m^n,$$

so folgt aus dieser Definition, wenn $n>1$, unmittelbar:

1) $T_m^n = S_{m-1}^n$, wo $m>1$,

und dabey 2) $T_m^n = S_m^n - S_m^{n-1}$;

also auch 3) $S_{m+1}^{n+1} = S_{m+1}^n + S_m^{n+1}$.

Anmerkung. Bezeichnet man durch S_m^1 das erste Glied der Reihe der m^{ten} Ordnung allein; denkt man sich ferner noch vor den Reihen im Schema (§. 354.), eine Reihe lauter 1, in welcher T_0^n wiederum das n^{te} Glied (also 1), und S_0^n die Summe von n Gliedern (also n selbst) bezeichnet, so gelten diese letztern Formeln auch noch für $n = 1$ und für $m = 1$.

§. 356. Lehrsätze.

Man hat allemal:

$$1)\ S_1^n = T_2^n = \frac{n^{2|1}}{2!}\ ;$$

$$2)\ S_2^n = T_3^n = \frac{n^{3|1}}{3!}\ ;$$

$$3)\ S_3^n = T_4^n = \frac{n^{4|1}}{4!}\ ;$$

$$4)\ S_4^n = T_5^n = \frac{n^{5|1}}{5!}\ ;$$

u. s. w. f.

und allgemein

$$\mathfrak{C})\ S_m^n = T_{m+1}^n = \frac{n^{m+1|1}}{(m+1)!}\ .$$

Beweise. Die Formel (1.) folgt unmittelbar aus (§. 335.).

In Bezug auf die übrigen Formeln versuche man zuerst, ob solche zutreffen, wenn man für n, die erstern Zahlen 2, 3, 4, 5, u. s. w. setzt. Man findet aber aus (2.):

$$S_2^2 = T_3^2 = \frac{2^{3|1}}{3!} = \frac{2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 4\ ;$$

$$S_2^3 = T_3^3 = \frac{3^{3|1}}{3!} = \frac{3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 10;$$

$$S_2^4 = T_3^4 = \frac{4^{3|1}}{3!} = \frac{4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 20;$$

$$S_2^5 = T_3^5 = \frac{5^{3|1}}{3!} = \frac{5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 35;$$

u. s. w. f.; d. h. die Summen der 2, 3, 4, 5 ersten Glieder der zweyten Ordnung (oder das 2te, 3te, 4te, 5te Glied der dritten Ordnung) finden sich nach der zu erweisenden Formel (2.) beziehlich = 4, 10, 20, 35; und vergleicht man dies mit dem Schema des (§. 354.), so findet man, daß diese Resultate zutreffen, für diese erstern Werthe von n.

Aber eben so findet sich aus (3.):

$$S_3^2 = T_4^2 = \frac{2^{4|1}}{4!} = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5\ ;$$

$$S_3^3 = T_4^3 = \frac{3^{4|1}}{4!} = \frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 15;$$

$$S_3^4 = T_4^4 = \frac{4^{4|1}}{4!} = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 35;$$

$$S_3^5 = T_4^5 = \frac{5^{4|1}}{5!} = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 70;$$

u. s. w. f.; d. h. die Summen der 2, 3, 4, 5 ersten Glieder der dritten Ordnung (oder das 2te, 3te, 4te, 5te Glied der vierten Ordnung) finden sich nach der zu erweisenden Formel, beziehlich 5, 15, 35, 70, welches wiederum mit dem Schema des (§. 354.) zusammentrifft.

Auf dieselbe Weise wird man finden, daß auch die folgenden speziellen Formeln (4.) u. s. w., zutreffen, wenn statt n die erstern Zahlen 2, 3, 4, 5 ꝛc. gesetzt werden; also auch, daß die allgemeine Formel (C) zutrifft, so oft für n und m, beliebige der erstern Zahlen 2, 3, 4 ꝛc. gesetzt werden.

Man sieht daher, wie es bloß darauf ankommt, nachzuweisen, daß dieselben Formeln auch noch zutreffen müssen, wenn man für n (und zuletzt auch für m) nach der Reihe, alle ganzen (positiven) Zahlen setzt; also nachzuweisen, daß, so oft diese Formeln zutreffen, wenn eine (einzige) bestimmte Zahl h statt n gesetzt wird, solche auch allemal zutreffen müssen, so oft man statt n die nächstfolgende Zahl h+1 nimmt.

Gesetzt also, man wüßte, daß für einen einzigen Werth h von n, wirklich zugetroffen hätte, die Gleichung (2.), d. h.

$$S_2^h = T_3^h = \frac{h^{3|1}}{3!},$$

d. h. daß wirklich die Summe von h ersten Gliedern der 2ten Ordnung (oder das hte Glied der 3ten Ordnung) sich gefunden hätte aus der Formel (2.), nämlich aus $\frac{h^{3|1}}{3!}$, so wollen wir nun daraus das nachstehende Glied T_3^{h+1} oder S_2^{h+1} finden. — Es ist aber

$$S_2^{h+1} = S_2^h + T_2^{h+1} = S_2^h + S_1^{h+1};$$

und aus (1.) folgt, weil solche schon erwiesen ist:

$$S_1^{h+1} = \frac{(h+1)^{2|1}}{2!} \quad \text{und} \quad S_2^h = \frac{h^{3|1}}{3!} \quad \text{soll für diese}$$

Zahl ebenfalls zugetroffen haben; also ist auch:

$$S_2^{h+1} = \frac{h^{3|1}}{3!} + \frac{(h+1)^{2|1}}{2!};$$

welches, wenn man beyde Brüche dadurch auf gleiche Benennung bringt, daß man Zähler und Nenner des 2ten mit 3 multiplizirt; und wenn man bey dem Addiren der Zähler den gemeinschaftlichen Faktor $(h+1)^{2|1}$ herausſetzt, ſogleich

$$S_2^{h+1} = \frac{(h+1)^{3|1}}{3!}$$ gibt;

d. h. man findet dann S_2^{h+1} ebenfalls aus der Formel (2.), wenn $h+1$ ſtatt n geſetzt wird.

Man hat ſich alſo überzeugt, daß wenn die Formel (2.) zutrifft, ſo oft irgend eine (einzige) Zahl h ſtatt n geſetzt wird, ſo trifft ſie auch ferner zu, wenn man die nächſtfolgende ganze Zahl $h+1$ ſtatt n nimmt. Und da ſie zugetroffen hat, für $n = 5$, ſo trifft ſie alſo nothwendig zu, wenn $n = 6$, aber eben deshalb wieder, wenn $n = 7$, und dann auch aus demſelben Grunde, wenn $n = 8$, u. ſ. w.; überhaupt wenn ſtatt n nach und nach alle auf einander folgenden ganzen Zahlen geſetzt werden.

So wie nun die Formel (2.) ganz allgemein erwieſen iſt, gerade eben ſo beweißt man die Formel (3.). Geſetzt nämlich, es hätte ſich ausgemittelt, daß (nicht für jeden Werth von n, ſondern) für einen einzigen Werth h von n, ſich wirklich gefunden hätte

$$S_3^h = T_4^h = \frac{h^{4|1}}{4!},$$

ſo hätte man

$$S_3^{h+1} = S_3^h + T_3^{h+1} = S_3^h + S_2^{h+1} = \frac{h^{4|1}}{4!} + \frac{(h+1)^{3|1}}{3!},$$

weil $S_2^{h+1} = \frac{(h+1)^{3|1}}{3!}$ aus der ſo eben bewieſenen Formel (2.) hervorgeht. Bringt man aber die beyden letztern Brüche unter einerlei Benennung, und ſondert man in den Zählern die gemeinſchaftlichen Faktoren ab, ſo erhält man hieraus:

$$S_3^{h+1} = \frac{h \cdot (h+1)^{3|1} + (h+1)^{3|1} \cdot 4}{4!} = \frac{(h+1)^{3|1} \cdot (h+4)}{4!} = \frac{(h+1)^{4|1}}{4!}.$$

Alſo findet ſich für S_3^{h+1} genau daſſelbe, was die Formel (3.) auch gibt, wenn $h+1$ ſtatt n geſetzt wird. Alſo gilt die Formel (3.) für jede nächſtfolgende Zahl $h+1$ ſtatt n, ſo oft ſie für $n = h$ zugetroffen hat. Und weil ſie für $n = 5$ zugetroffen hat, ſo gilt ſie alſo für $n = 6$, und deshalb wieder für $n = 7$, u. ſ. f. für alle ganzen Zahlen, welche der Reihe nach ſtatt n geſetzt werden.

Eben ſo wird nun die Formel (4.) allgemein erwieſen; u. ſ. w. f.

Aber eben wenn nun diese frühern Formeln (1—4.) allgemein für jedes positive ganze n erwiesen sind, so trifft die allgemeine Formel (C) wieder zu, so oft 1, 2, 3, 4 statt m gesetzt wird, weil sie dann in die Formeln (1—4.) übergeht, deren allgemeine Giltigkeit bereits anerkannt ist. Um daher zu zeigen, daß die Formel (C) für alle ganze Zahlen von n und m richtig seyn müsse, zeige man nur wieder, daß sie allemal richtige Resultate liefert, wenn die nächstfolgende Zahl k+1 statt m gesetzt wird, so oft sie für eine (einzige) gewisse Zahl k statt m gesetzt, in ein als richtig bekanntes Resultat übergeht.

Gesetzt also, man hätte bereits gefunden, daß nicht für jeden Werth von m, sondern nur für einen (einzigen) bestimmten Werth k von m, die Formel (C) wirklich zutreffe, so daß man hat

$$1)\quad S_k^h = \frac{n^{k+1|1}}{(k+1)!};$$

gesetzt ferner, daß nicht für jeden Werth von n, sondern für einen einzigen Werth h von n, die Formel für die k+1te Ordnung ebenfalls zutreffe, also daß richtig sey

$$2)\quad S_{k+1}^h = \frac{h^{k+2|1}}{(k+2)!},$$

so hat man sogleich, genau wie vorher verfahrend, nach (§. 355. Nr. 3.)

$$S_{k+1}^{h+1} = S_{k+1}^h + S_k^{h+1} = \frac{h^{k+2|1}}{(k+2)!} + \frac{(h+1)^{k+1|1}}{(k+1)!},$$

nach den hier gemachten Voraussetzungen (1. und 2.).

Oder, wenn man des zweyten Quotienten Zähler und Nenner mit k+2 multiplizirt, um beyde Quotienten auf einerlei Benennung zu bringen, und wenn man ferner von dem Dividenden des erstern Quotienten den ersten Faktor h absondert,

$$3)\quad S_{k+1}^{h+1} = \frac{(h+1)^{k+1|1}(h+k+2)}{(k+2)!} = \frac{(h+1)^{k+2|1}}{(k+2)!}.$$

Weil aber diese Formel auch aus der zu erweisenden (C) hervorgeht, so trifft demnach diese Formel (C) allemal zu für die Summe von h+1 Gliedern in der k+1 Ordnung, so oft sie für die Summe von h Gliedern in derselben Ordnung zutrifft, und dabey für die vorhergehende kte Ordnung bereits als allgemein wahr anerkannt ist. Da sie nun für $n = h = 2$ liefert

$$S_{k+1}^2 = T_{k+2}^2 = \frac{2^{k+2|1}}{(k+2)!} = \frac{(k+3)!}{(k+2)!} = k+3;$$

dieses aber nach der Ansicht des Schema des (§. 354.) ein richtiges Resultat ist, so gilt dieselbe Formel also auch noch für $n = 3$, und

dann auch für $n = 4$, so wie für alle ganze Zahlen, welche nach und und nach statt n gesetzt werden.

Es liefert also die Formel (ℂ) für S^n_{k+1} ein völlig richtiges Resultat, so oft sie für S^n_k ein solches liefert. Da sie nun für S^n_2, S^n_3 richtige Resultate liefert, wie solches in den Formeln (1., 2. und 3.) des Lehrsatzes bereits erwiesen ist, so liefert sie also allemal richtige Resultate, wenn nach und nach alle ganze Zahlen statt m gesetzt werden.

Anmerkung. Nach (Anmerkung §. 355.) gilt die Formel (ℂ) auch noch, wenn $n = 1$, so wie auch noch, wenn $m = 0$.

§. 357. Zusatz.

Bringt man hiermit die frühern Formeln der Faktoriellen und Fakultäten in Verbindung, so lassen sich diese Formeln des vorhergehenden Lehrsatzes auch so schreiben:

$$1)\ T^n_0 = 1 = \frac{n^{0|1}}{0!};$$

$$2)\ T^n_1 = S^n_0 = n = \frac{n^{1|1}}{1!} = \frac{n^{1|-1}}{1!} = n_1 = n_{n-1} = \frac{n^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{2^{n-1|1}}{(n-1)!};$$

$$3)\ T^n_2 = S^n_1 = \frac{n^{2|1}}{2!} = \frac{(n+1)^{2|-1}}{2!} = (n+1)_2 = (n+1)_{n-1} = \frac{(n+1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{3^{n-1|1}}{(n-1)!};$$

$$4)\ T^n_3 = S^n_2 = \frac{n^{3|1}}{3!} = \frac{(n+2)^{3|-1}}{3!} = (n+2)_3 = (n+2)_{n-1} = \frac{(n+2)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{4^{n-1|1}}{(n-1)!};$$

$$5)\ T^n_4 = S^n_3 = \frac{n^{4|1}}{4!} = \frac{(n+3)^{4|-1}}{4!} = (n+3)_4 = (n+3)_{n-1} = \frac{(n+3)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{5^{n-1|1}}{(n-1)!};$$

und allgemein:

$$\odot)\ T^n_m = S^n_{m-1} = \frac{n^{m|1}}{m!} = \frac{(n+m-1)^{m|-1}}{m!} = (n+m-1)_m = (n+m-1)_{n-1} = \frac{(n+m-1)^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{(m+1)^{n-1|1}}{(n-1)!}.$$

Schluß-Anmerkung.

Es sind aber die hier eben betrachteten figurirten Reihen, spezielle Fälle nur, der sogenannten arithmetischen Reihen der höhern Ordnungen, welche später mit den Reihen überhaupt näher betrachtet werden sollen. Jene spätern Betrachtungen, eben weil sie von einem allgemeinern Standpunkte ausgehen, werden dann auf das hier Vorgetragene in so ferne noch das nöthige Licht werfen, als man den Zusammenhang der verschiedenen Betrachtungen gehörig in das Auge fassen und den erfindenden analytischen, von dem hier befolgten begründenden synthetischen Gange immer mehr unterscheiden lernen kann.

Zahlenlehre.

Sechszehntes Kapitel.

Die kombinatorische Analysis in ihren ersten Elementen.

Erste Abtheilung.

Von den Permutationen, kombinatorischen Variationen und Kombinationen.

§. 358. Erklärung.

Eine [logische *)] Verbindung mehrer, durch Buchstaben oder andere Zeichen repräsentirten Elemente, ist ohne Wiederholungen (z. B. abcd), wenn dasselbe Element nicht zwey oder mehrere Male in ihr vorkommt; außerdem aber ist sie eine Verbindung mit Wiederholungen (z. B. aab oder bab). Die gegebenen Elemente in einer bestimmten Ordnung neben einander geschrieben, bilden den Zeiger oder Index, und eine Verbindung heißt wohlgeordnet, wenn in ihr kein im Zeiger später folgendes Element einem frühern vorangeht; (z. B. adef oder addg, aber nicht daef, oder dadg, u. s. w.; wenn nämlich a, b, c, d, e, f, g etc. der Zeiger ist).

*) D. h. eine Verbindung von noch völlig unbestimmter Art, so daß die Elemente z. B. noch eben so gut addirt, als auch mit einander multiplizirt gedacht werden können.

Anmerkung 1. Die Verbindungen gegebener Elemente zu bilden, gehört übrigens nicht der Mathematik, sondern der Logik zu. — Wohl aber ist es eine Anwendung der Zahlenlehre, die Anzahl der Verbindungen a priori zu bestimmen, welche aus gegebenen Elementen, die auf eine bestimmte Weise mit einander verbunden werden sollen, hervorgehen.

Anmerkung 2. Ist kein Zeiger bemerkt, sind dagegen die Elemente durch Buchstaben oder durch numerische ganze Zahlen dargestellt, so setzt man immer voraus, daß der Zeiger die Buchstaben in der Ordnung des Alphabets, die Zahlen dagegen in ihrer natürlichen Folge anzugeben hat.

§. 359. Zusatz.

Die Verbindungen selbst heißen auch beziehlich: Unionen, Binionen oder Amben, Ternionen oder Ternen, Quaternionen oder Quaternen, Quinternen oder Quinen u. s. w. f., je nachdem sie aus einem, zwey, drey, vier, fünf, oder mehr Elementen bestehen.

§. 360. Erklärung.

Eine gegebene Verbindung, z. B. abc oder aabccd, heißt permutirt oder versetzt, wenn man dieselben Elemente in allen möglichen Anordnungen zu neuen Verbindungen vereinigt hat. Das Schema aller solchen entstandenen Verbindungen heißt dann eine zweyte, dritte, vierte ꝛc. ꝛc. oder mte Permutations-Klasse, je nachdem die gegebene Verbindung aus 2, 3, 4, oder m Elementen besteht. Eine solche Permutations-Klasse endlich wird bezeichnet durch

$$\overset{3}{P}(abc) \quad \text{oder} \quad \overset{6}{P}(aabccd);$$

indem man über den Buchstaben P die Klassenzahl schreibt, d. h. die Anzahl der Elemente, die permutirt werden sollen.

Beyspiele. Man findet:

$\overset{3}{P}(abc)$	$\overset{5}{P}(aabbb)$	$\overset{4}{P}(abcd)$	
		abcd	cabd
abc	aabbb	abdc	cadb
acb	ababb	acbd	cbad
bac	abbab	acdb	cbda
bca	abbba	adbc	cdab
cab	baabb	adcb	cdba
cba	babab	bacd	dabc
	babba	badc	dacb
	bbaab	bcad	dbac
	bbaba	bcda	dbca
	bbbaa	bdac	dcab
		bdca	dcba.

§. 361. Erklärung.

Ist eine Anzahl z. B. m von Elementen

a, b, c, d, e, etc. etc.

gegeben, und denkt man sich diese Elemente erst paarweise, dann zu dreyen, zu vieren u. s. w. auf alle mögliche Weise und in jeder möglichen Anordnung der Elemente mit einander verbunden, so erhält man durch Aufzählung aller dieser Verbindungen die kombinatorischen Variationen aus diesen m Elementen, und zwar die zweyte, dritte, vierte, ꝛc. ꝛc. nte Klasse derselben, je nachdem die Verbindungen aus 2, 3, 4, ꝛc. ꝛc. oder n Elementen bestehen.

Die Variationen sind mit oder ohne Wiederholungen, je nachdem die Verbindungen zu der erstern oder zu der andern Art gehören.

Die Variationen bezeichnet man mit dem Buchstaben V des größern lateinischen Alphabets mit untergesetztem Zeiger, und, wenn eine bestimmte Klasse ausgedrückt werden soll, mit übergeschriebener Klassenzahl.

Dabey bezeichnet dasselbe V mit einem Strich, nämlich V', Variationen mit Wiederholungen, dagegen das bloße V, ohne Strich, auch allemal Variationen ohne Wiederholungen.

Diesem nach wird die Bedeutung der Zeichen

$$V'^{n} \quad \text{und} \quad V^{n}$$

$$(a, b, c, \ldots) \qquad (1, 2, 3, 4, \ldots)$$

unmittelbar erkannt.

Man kann sich auch eine erste Klasse denken.

§. 362. Aufgabe.

Aus gegebenen Elementen a, b, c, ... die Variationen mit Wiederholungen zu entwickeln.

Auflösung. 1) Man schreibe die gegebenen Elemente, durch Kommata getrennt, hin, so hat man die erste Klasse.

2) Jedem dieser Elemente setze man jedes Element vor, so hat man die zweyte Klasse.

3) Jeder Verbindung dieser zweyten Klasse setze man jedes Element vor, so gibt dies die dritte Klasse.

4) So fahre man fort, einer jeden Verbindung irgend einer Klasse jedes Element vorzusetzen, und allemal erhält man die nächstfolgende Klasse; und zwar in's Unendliche fort.

§. 363. Zusatz.

Durch dasselbe Verfahren erhält man auch die Variationen ohne Wiederholungen, wenn bey dem jedesmaligen Vorsetzen der einzelnen Elemente, jede Verbindung übergangen wird, welche dieses Element schon enthält. Hier erhält man aber nur so viele Klassen, als Elemente gegeben sind, und die letzte Klasse muß allemal eine reine Permutations-Klasse seyn.

Beyspiele.

$\overset{1}{V}$ (a, b, c)	a, b, c

$\overset{2}{V}$ (a, b, c)	aa, ab, ac ba, bb, bc ca, cb, cc

$\overset{3}{V}$ (a, b, c)	aaa, aab, aac aba, abb, abc aca, acb, acc baa, bab, bac bba, bbb, bbc bca, bcb, bcc caa, cab, cac cba, cbb, cbc cca, ccb, ccc

$\overset{4}{V}$ (a, b, c)	aaaa, aaab, aaac aaba, etc. etc. etc, etc. etc.

$\overset{1}{V}$ (a, b, c)	a, b, c

$\overset{2}{V}$ (a, b, c)	ab, ac ba, bc ca, cb

$\overset{3}{V}$ (a, b, c)	abc, acb bac, bca cab, cba

§. 364. Erklärung.

Da die Variationen alle möglichen Verbindungen mit allen möglichen Anordnungen der Elemente enthalten, so muß in ihnen

jede wohlgeordnete Verbindung zugleich mit allen ihren Permutionen oder Versetzungen vorkommen. — Sondert man nun diese wohlgeordneten Verbindungen ab, und wirft alle übrigen weg, so erhält man durch Aufzählung aller dieser Verbindungen, die Kombinationen der gegebenen Elemente, und zwar ebenfalls mit oder ohne Wiederholungen, die dann auch wieder in Klassen und zwar in die erste, zweyte, dritte, ꝛc., nte Klasse getheilt werden.

Die Kombinationen bezeichnet man durch den Buchstaben des größern lateinischen Alphabets

C

mit übergesetzter Klassenzahl, untergesetztem Zeiger, und fügt noch überdies einen Strich zur Rechten bey, wenn man Kombinationen mit Wiederholungen bezeichnen will, während das bloße C (ohne Strich), allemal Kombinationen ohne Wiederholungen ausdrückt.

Die Zeichen

$$\overset{n}{C}{}' \qquad \text{und} \qquad \overset{n}{C}$$

$$(a, b, c, d, \ldots) \qquad (a, b, c, d, \ldots)$$

haben dann eine völlig bestimmte Bedeutung.

§. 365. Zusatz.

Es erhellet sogleich aus dieser Erklärung, daß man durch das (§. 362.) gelehrte Verfahren für Variationen, auch alle Kombinationen aus gegebenen Elementen erhalten wird, wenn man bey dem jedesmaligen Vorsetzen der Elemente darauf sieht, einer Verbindung kein späteres Element vorzusetzen, als das Anfangs-Element dieser Verbindung ist. — Zugleich erhält man die Verbindungen mit Wiederholungen ohne weitere Vorsicht, dagegen diejenigen ohne Wiederholungen, wenn man bey dem Vorsetzen der einzelnen Elemente auch noch diejenigen Verbindungen übergeht, welche dasselbe Anfangs-Element haben, als das vorzusetzende ist.

Beyspiele. Kombinationen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d.

$\overset{1}{C}$ (a, b, c, d)	a,	b,	c,	d
$\overset{2}{C}$ (a, b, c, d)	aa,	ab,	ac,	ad
		bb,	bc,	bd
			cc,	cd
				dd
$\overset{3}{C}$ (a, b, c, d)	aaa,	aab,	aac,	aad
		abb,	abc,	abd
			acc,	acd
				add
	bbb,	bbc,		bbd
		bcc,		bcd
				bdd
			ccc,	ccd
				cdd
				ddd
$\overset{4}{C}$ (a, b, c, d)	aaaa,	aaab,	aaac,	aaad
		aabb,	etc.	etc.
			etc.	etc.
				etc.
		bbbb,	bbbc,	etc.
			etc.	etc.

Kombinationen ohne Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d, e.

$\overset{1}{C}$ (a, b, c, d, e)	a,	b,	c,	d,	e
$\overset{2}{C}$ (a, b, c, d, e)	ab,	ac,	ad,		ae
		bc,	bd,		be
			cd,		ce
					de
$\overset{3}{C}$ (a, b, c, d, e)	abc,	abd,			abe
		acd,			ace
					ade
		bcd,			bce
					bde
					cde
$\overset{4}{C}$ (a, b, c, d, e)	abcd,	abce			
		abde			
		acde			
		bcde			
$\overset{5}{C}$ (a, b, c, d, e)	abcde				

§. 366. Zusatz.

Bei den Kombinationen mit Wiederholungen geht die Zahl der Klassen in's Unendliche fort; dagegen gibt es bey denen ohne Wiederholungen nie mehr Klassen, als Elemente gegeben sind, und die höchste Klasse enthält nur eine einzige Verbindung, welche aus der wohlgeordneten Verbindung aller gegebenen Elemente besteht.

§. 367. Lehrsätze.

Bezeichnet man die Anzahl der Verbindungen einer Permutations-, Variations-, oder Kombinations-Klasse, durch ein dem Zeichen der Klasse vorgesetztes

Ns. (numerus specierum)

und drücken Zeichen, wie a^{α}, b^{β} und dergl., wenn sie im Zeiger vorkommen, (nicht Potenzen, sondern) bloß aus, daß das Element a, αmal und das Element b, βmal ꝛc. ꝛc. wiederholt seyn soll, so gelten folgende Formeln:

I. $\text{Ns. } \overset{m}{P}(a, b, c, d, \cdots) = m!$;

II. $\text{Ns. } \overset{m}{P}'(a^{\alpha}, b^{\beta}, c^{\gamma} \cdots) = \frac{m!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma! \cdots}$;

III. $\text{Ns. } \overset{n}{V}_{(a,b,c\cdots)} = m^{n|-1} = [m-(n-1)]^{n|1}$;

IV. $\text{Ns. } \overset{n}{V}'_{(a,b,c\cdots)} = m^{n}$;

V. $\text{Ns. } \overset{n}{C}_{(a,b,c\cdots)} = \frac{m^{n|-1}}{n!} = m_n$;

VI. $\text{Ns. } \overset{n}{C}'_{(a,b,c\cdots)} = \frac{m^{n|1}}{n!} = \frac{[m+(n-1)]^{n|-1}}{n!} = [m+(n-1)]_n$;

wo überall m die Anzahl der Elemente des Zeigers ausdrückt.

Beweis von I.

1. Zwey Elemente a und b lassen zwey Versetzungen zu: ab und ba.

2. Bey drey Elementen kann jedes das erste seyn, und weil dann die beyden andern immer noch zwey Versetzungen zulassen, so erhält man 2·3 Versetzungen oder 3! Versetzungen für 3 Elemente.

3. Bey m+1 Elementen kann jedes das erste seyn; lassen dann die m übrigen Elemente immer m! Versetzungen zu, so erhält man für alle (m+1) Elemente (m+1)! Versetzungen.

4. Die Formel (I.) gilt also allemal für die nächstfolgende Zahl, sobald sie für irgend eine bestimmte Zahl gilt; und da sie für $m = 2$ und $m = 3$ statt hat, so hat sie dann nothwendig auch für jede absolute ganze Zahl statt, die für m genommen werden kann.

Beweis von II.

1. Man denke sich alle m Elemente verschieden, so lassen sie m! Versetzungen zu, welche man sich als wirklich entwickelt vorstellen kann.

2. Von diesen Verbindungen, die aus m von einander verschiedenen Elementen bestehen, nehme man eine beliebige heraus, und in ihr wieder beliebige Elemente in beliebigen Stellen, deren Anzahl α seyn mag; nehme dann von diesen α Elementen alle Versetzungen (deren Anzahl $= \alpha!$), und denke sich dabey die übrigen Elemente der herausgehobenen Verbindung in ihren Stellen verbleibend, so entstehen aus der herausgehobenen Verbindung eine Zahl $\alpha!$ von Verbindungen, welche nothwendig alle, unter allen Verbindungen in (Nr. 1.) enthalten seyn müssen.

3. Es läßt sich daher die ganze mte Klasse in (Nr. 1.) in Parthien theilen, so daß jede Parthie aus $\alpha!$ Verbindungen besteht, welche sich bloß durch Versetzungen der α herausgehobenen Elemente von einander unterscheiden, nnd daher in eine einzige Verbindung zusammenfallen, sobald diese α Elemente nicht mehr als verschieden, sondern als dieselben gedacht werden.

4. Die Anzahl dieser Parthien ist nun ohnstreitig $= \frac{m!}{\alpha!}$, und so groß also auch die Anzahl der Verbindungen, die man erhält, wenn unter den m Elementen eine Anzahl α derselben, bloße Wiederholungen sind, weil dann jede Parthie in eine einzige Verbindung zusammenfällt.

5. Diese $\frac{m!}{\alpha!}$ Verbindungen kann man nun aber wiederum in Parthien abtheilen, so daß die Verbindungen in jeder Parthie sich nur durch Versetzung von β ihrer Elemente, während die übrigen in ihren Stellen verbleiben, von einander unterscheiden; welche daher, sobald

diese β Elemente bloße Wiederholungen werden, in eine einzige zusammenfallen.

6. Sobald daher β dieser Elemente bloße Wiederholungen sind, dagegen von den vorigen verschieden, so gibt es wieder nur so viele Verbindungen, als es in (Nr. 5.) Parthien von Verbindungen gab, nämlich $\frac{m!}{\alpha!} : \beta!$ oder $\frac{m!}{\alpha!\ \beta!}$.

7. So fortfahrend fällt die Richtigkeit des Lehrsatzes in die Augen.

Beweis von III.

1. Die Anzahl der Verbindungen der ersten Klasse ist ohnstreitig $= m$, also auch $= m^{1|-1}$.

2. Um die zweyte Klasse zu erhalten, wird jedes Element den übrigen $m-1$ Elementen vorgesetzt (weil keine Wiederholungen vorkommen sollen), und daher die Anzahl der Verbindungen der zweyten Klasse $= m(m-1) = m^{2|-1}$.

3. Um die dritte Klasse zu erhalten, werden allen Verbindungen der zweyten Klasse die $m-2$ übrigen Elemente vorgesetzt, die sie nicht schon hat; folglich die Anzahl aller Verbindungen der dritten Klasse $= m(m-1)(m-2) = m^{3|-1}$.

4. Gesetzt es sey die Anzahl aller Verbindungen der pten Klasse $= m^{p|-1}$, so wird man daraus alle Verbindungen der $p+1$ten Klasse erhalten, wenn man jeder der pten Klasse, die übrigen $m-p$ Elemente vorsetzt, die sie nicht schon enthält (damit keine Wiederholungen entstehen); folglich ist dann die Anzahl der Verbindungen der $p+1$ten Klasse $= m^{p|-1} \cdot (m-p) = m^{p+1|-1}$.

5. Gilt also die Formel (III.) für $n = p$, so gilt sie auch allemal für die nächstgrößere Zahl $p+1$, die statt n gesetzt wird. Da sie nun gilt für $n = 2$ und auch für $n = 3$, so gilt sie auch für $n = 4$, $n = 5$, u. s. w., überhaupt für jede absolute ganze Zahl, die statt n gesetzt werden mag.

Beweis von IV. fällt unmittelbar in die Augen.

Beweis von V.

Weil die Kombinationen lauter Verbindungen ohne Wiederholungen haben, und jede Verbindung der nten Klasse demnach aus n verschiedenen Elementen besteht, so läßt jede Verbindung der nten Klasse, n! Versetzungen zu. Weil nun die nte Klasse der Variationen erhalten wird, wenn man dieselbe Klasse der Kombinationen zugleich

mit allen Versetzungen ihrer Verbindungen nimmt, so muß man die Anzahl der Verbindungen der nten Kombinations-Klasse erhalten, wenn man die Anzahl derer der Variations-Klasse noch durch die Versetzungszahl, d. h. durch n! dividirt; weshalb sich diese gesuchte Zahl $= \frac{m^{n|-1}}{n!}$ ergibt.

Beweis von VI.

Um diesen Beweis anschaulicher zu machen, bemerke man zuvörderst folgendes:

Stellt f(m) die Anzahl der Verbindungen vor, einer nten Klasse der Variationen oder Kombinationen mit oder ohne Wiederholungen aus den m Elementen a, b, c, d ... entwickelt, und will man wissen, wie viele darunter sind, welche das Element a nicht enthalten, so darf man nur m—1 statt m setzen; d. h. f(m—1) drückt die Zahl der Verbindungen derselben Klasse aus, die das Element a gar nicht enthalten. — Denkt man sich nämlich das Element a ganz weg, so bleiben m—1 Elemente, und die nte Klasse aus diesen, welche f(m—1) Verbindungen haben wird, muß dann nothwendig alle diejenigen Verbindungen enthalten, welche in derselben nten Klasse aus allen m Elementen entwickelt, vorkommen und das Element a nicht enthalten.

Auf dieselbe Weise erhält man f(m—2) für die Anzahl der Verbindungen in der nten Klasse aus allen m Elementen, die weder a noch b enthalten. Nicht minder erhält man für die Anzahl der Verbindungen in derselben Klasse, die weder a, noch b, noch c, enthalten, die Zahl f(m—3); u. s. w. f.

Dies vorausgesetzt, kann man nun schließen:

1. Die erste Klasse hat m Elemente, also m oder $\frac{m^{1|1}}{1!}$ Verbindungen, welche Zahl auch durch T_1^m ausgedrückt ist (§. 357.).

2. Aus der Art, wie diese Klassen entwickelt werden, folgt aber ferner, daß die Zahl der Verbindungen der 2ten Klasse seyn muß =

$$T_1^m + T_1^{m-1} + T_1^{m-2} + \cdots + T_1^1,$$

oder S_1^m, oder $\frac{m^{2|1}}{2!}$, oder T_2^m (§. 354. und §. 357.).

3. Aus demselben Grunde muß dann die Zahl der Verbindungen der dritten Klasse seyn =

$$T_2^m + T_2^{m-1} + T_2^{m-2} + \cdots + T_2^1,$$

oder S_2^m, oder $\frac{m^{3|1}}{3!}$, oder T_3^m.

4. Nicht weniger ist dann die Anzahl der Verbindungen der vierten Klasse =

$$T_3^m + T_3^{m-1} + T_3^{m-2} + \cdots + T_3^1 = S_3^m = m^{4|1} = T_4^m.$$

5. Ist endlich die Anzahl der Verbindungen in der pten Klasse $= S_{p-1}^m = T_p^m$, so ist die Anzahl der Verbindungen der p+1ten Klasse =

$$T_p^m + T_p^{m-1} + T_p^{m-2} + \cdots + T_p^1 = S_p^m = T_{p+1}^m$$

oder $= \frac{m^{p+1|1}}{(p+1)!}$ [wie aus der Art der Entwicklung der Klassen hervorgeht (§. 365.)].

6. Gilt also die Formel (VI.) für irgend eine bestimmte Zahl, die statt n gesetzt wird, so gilt sie dann nothwendig auch für die nächstgrößere Zahl; und da sie gilt für $n = 2$, $n = 3$, so gilt sie nothwendig auch für $n = 4$, $n = 5$, überhaupt für alle absoluten ganzen Zahlen, die statt n gesetzt werden.

§. 368. Zusatz.

1) Die Buchstaben α, β, γ, etc. in (§. 367. II.) nennt man auch Wiederholungs-Exponenten.

2) Die Formel (II. §. 367.) gilt auch dann noch, wenn einer der Wiederholungs-Exponenten Null oder 1 ist, wenn man nur annimmt, daß das Element (der Buchstabe), auf den sich der Wiederholungs-Exponent bezieht, im ersten Fall gar nicht, im andern Fall aber nur einmal vorkommt.

§. 369. Erklärung.

Nimmt man zu Elementen die Null und beliebige numerische Zahlen, und zählt man alle Verbindungen aus zwey, drey, vier ꝛc. oder n der gegebenen Elemente auf, so aber, daß in jeder Verbindung die Summe aller Elemente $= m$ ist, so hat man die Variationen oder die Kombinationen zur bestimmten Summe m, je nachdem alle Verbindungen zugleich mit allen Anordnungen ihrer Elemente, oder bloß die wohlgeordneten Verbindungen genommen werden.

Auch diese Variationen und Kombinationen theilt man noch in Klassen, nach der Zahl der Elemente, die in den Verbindungen

vorkommen, und die Bezeichnung dieser Variationen und Kombinationen unterscheidet sich dadurch nur von der (§§. 361. und 365.) angegebenen, daß zur Linken noch die bestimmte Summe beygeschrieben wird.

Auch werden wir bey diesen Variationen und Kombinationen zur bestimmten Summe, hier bloß solche solche mit Wiederholungen näher betrachten, daher immer nur solche verstehen.

Die Bedeutung der Zeichen

$$^{m}V^{n}_{\cdot} \qquad ^{m}C^{n}_{\cdot}$$

ist dem zu Folge nicht zu verkennen.

§. 370. Zusatz.

Man erhält daher die nte Klasse der Variationen zur bestimmten Summe m, wenn man in der nten Kombinations-Klasse zur Summe m aus denselben Elementen, jede Verbindung mit allen ihren Versetzungen nimmt. — Umgekehrt ist es auch nicht schwer, die letztere aus der ersteren abzuleiten.

§. 371. Aufgabe.

Die nte Klasse der Variationen zur Summe m zu entwickeln, aus den Elementen **0, 1, 2, 3, . . .**

Auflösung. **1)** Man schreibe **n—1** Nullen nebeneinander und in die nte Stelle die Zahl **m**, so hat man die erste Verbindung.

2) Aus jeder gefundenen Verbindung wird die nächstfolgende so abgeleitet:

α) Ist das letzte Element >0, so vermindere man es um **1**, und vermehre dagegen das nächstvorhergehende um eben so viel; z. B. auf **0004** folgt **0013.**

β) Ist dies letzte Element; oder sind vom Ende ab, mehrere Elemente $= 0$, so erhöhe man von der letzten Null zur Linken ab, das nächstzweyte Element um **1**, lasse die Ziffern neben der erhöhten linker Hand unverändert, in die Stellen rechter Hand aber setze man durchgehends **0**, bis

auf die letzte Stelle, in welche die Ergänzung zur bestimmten Summe m kommt; z. B. nach **12200** kommt unmittelbar **13001**; auf **3100** folgt **4000**.

γ) Gibt es keine zweyte Ziffer zur Linken der in (β) gedachten Null, welche noch erhöht werden könnte, so ist diese Verbindung die letzte in ihrer Klasse.

§. 372. Zusatz.

Wollte man dieselbe Klasse zu derselben Summe aus den Elementen (**1, 2, 3, ···**) entwickeln, so würde man, um die erste Verbindung zu erhalten, die **1** neben einander hinschreiben **n—1** mal, und als nte Stelle die Ergänzung **m—(n—1)**. — Die Verbindungen aus einander werden dann gerade so abgeleitet, wie im vorhergehenden Paragraphen gelehrt wurde, nur daß man, wo dort Null steht, hier immer **1** zu setzen hat.

Man könnte auch die nte Klasse zur Summe **m—n**, aus den Elementen **0, 1, 2, 3, ···** entwickeln, und dann jedes Element um **1** erhöhen, und man würde wiederum die nte Klasse zur Summe **m**, aus den Elementen **1, 2, 3, ···** haben.

Beyspiele.

$^{4}V_{3}$ (0, 1, 2, ···)

0	0	0	3
0	0	1	2
0	0	2	1
0	0	3	0
0	1	0	2
0	1	1	1
0	1	2	0
0	2	0	1
0	2	1	0
0	3	0	0
1	0	0	2
1	0	1	1
1	0	2	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	2	0	0
2	0	0	1
2	0	1	0
2	1	0	0
3	0	0	0

$^{4}V_{7}$ (1, 2, 3, ···)

1	1	1	4
1	1	2	3
1	1	3	2
1	1	4	1
1	2	1	3
1	2	2	2
1	2	3	1
1	3	1	2
1	3	2	1
1	4	1	1
2	1	1	3
2	1	2	2
2	1	3	1
2	2	1	2
2	2	2	1
2	3	1	1
3	1	1	2
3	1	2	1
3	2	1	1
4	1	1	1

§. 373. Zusatz.

1) Setzt man in der nten Variations-Klasse zur Summe m, statt des Zeigers 1, 2, 3, . . ., beziehlich den Zeiger a, a+d, a+2d, ..., so erhält man die nte Variationsklasse zur Summe na+(m—n)d aus den Elementen

a, a+d, a+2d, etc. etc.

Denn die erste Verbindung, welche n—1 mal die 1, und dann noch das Element m—(n—1) enthält, bekommt jetzt n—1 mal das Element a, und hernach noch a+(m—n)d; also machen alle n Elemente zusammen na+(m—n)d aus. In jeder der folgenden Verbindungen wird aber irgend eine Stelle um 1, jetzt um d erhöht, und dagegen irgend eine andere um eben so viel erniedrigt; also bleibt dieselbe Summe.

2) Setzt man dagegen in der nten Variations-Klasse zur Summe m aus den Elementen 0, 1, 2, 3, ..., statt dieses Zeigers den andern

a, a+d, a+2d, a+3d, etc. etc. etc.

so erhält man die nte Variations-Klasse aus den Elementen a, a+d, a+2d . . . zur Summe na+md.

3) Wäre daher die nte Klasse der Variationen zur Summe p aus den Elementen a, a+d, a+2d, a+3d . . . zu entwikkeln, so setze man:

$$na+(m-n)d = p, \quad \text{oder} \quad na+md = p,$$

bestimme daraus:

$$m = \frac{p+n(d-a)}{d}, \quad \text{oder} \quad m = \frac{p-na}{d},$$

entwickle die nte Klasse der Variationen zur Summe $\frac{p+n(d-a)}{d}$ aus den Elementen 1, 2, 3, 2c., oder zur Summe $\frac{p-na}{d}$ aus den Elementen 0, 1, 2, 3, . . ., und setze überall

statt 1, 2, 3, 4, ... im ersten Fall, oder
statt 0, 1, 2, 3, ... im andern,
beziehlich a, a+d, a+2d, a+3d, ...

Anmerkung. Man sieht auch sogleich, daß diese letztere Aufgabe nicht immer möglich ist, und nur für solche Werthe von a, d und p möglich wird, für welche $\frac{p-na}{d}$ eine absolute ganze Zahl ist.

§. 374. Aufgabe.

Die nte Klasse der Kombinationen zur Summe m aus den Elementen 0, 1, 2, 3 ... zu entwickeln.

Auflösung. 1) Die erste Verbindung findet man genau, wie in (§. 371. Nr. 1.).

2) Aus jeder Verbindung leitet man die nächstfolgende so ab:

α) Ist die letzte Ziffer um mehr als 1 größer, als die vorletzte, so vermindere man diese um 1, und vermehre dagegen die vorletzte um eben so viel.

β) Ist die letzte Ziffer der vorletzten gleich oder nur um 1 größer, so gehe man zu der zur Linken folgenden fort, und suche die nächste Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist, als die letzte. Diese erhöhe man um 1, die Ziffern linker Hand lasse man unverändert, und in die Stellen rechter Hand setze man lauter der erhöheten gleiche Ziffern, bis auf die letzte Stelle, in welche die Ergänzung zur bestimmten Summe gesetzt wird, die aber nie kleiner als die vorhergehende Ziffer werden darf; z. B. auf 0122 folgt 1112.

γ) Hat die Verbindung keine Ziffer, die um mehr als 1 kleiner ist, als die letzte, so ist diese die End-Verbindung der Klasse.

§. 375. Zusatz.

Wollte man die nte Klasse der Kombinationen zur Summe m aus den Elementen 1, 2, 3, ... oder aus den Elementen a, a+d, a+2d ... entwickeln, so müßte man das hier angegebene Verfahren auf dieselbe Weise modifiziren, wie das (§. 371.) angegebene durch die (§§. 372. und 373.) modifizirt wurde.

Beyspiele.

0007		1118	
0016		1127	
0025		1136	
0034		1145	
0115	${}_7C^4$	1226	${}_{11}C^4$
0124	(0, 1, 2, 3, ...)	1235	(1, 2, 3 ...)
0133		1244	
0223		1334	
1114		2225	
1123		2234	
1222		2333	

Anmerkung. Die Entwicklung der Variationen und Kombinationen zur bestimmten Summe war früher unter dem Namen der beyden Diszerptions-Probleme bekannt.

Zweyte Abtheilung.

Anwendung der vorhergehenden Lehren zur Auflösung einiger unbestimmten Aufgaben der Zahlenlehre.

---

§. 376. Aufgabe.

Man hat eine Gleichung

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu = m,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma \cdots \mu$ lauter Unbekannte sind, deren Anzahl n ist; man soll alle möglichen zusammengehörigen Werthe dieser Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma \cdots \mu$ finden, die Null oder absolute ganze Zahlen sind, und welche der gegebenen Gleichung unter der Voraussetzung Genüge leisten, daß m entweder Null, oder eine absolute ganze Zahl ist.

Auflösung und Beweis. Man entwickle die nte Klasse der Variationen zur Summe m aus den Elementen (0, 1, 2, 3 ...), und nehme die Elemente jeder dieser Verbindungen beziehlich statt $\alpha, \beta, \gamma \cdots \mu$, so hat man die gesuchten Werthe.

Hat man z. B.

$$\alpha + \beta + \gamma = 3,$$

so erhält man

α	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	2,	2, 3
β	0,	1,	2,	3,	0,	1,	2,	1,	0, 0
γ	3,	2,	1,	0,	2,	1,	0,	0,	1, 0

so daß je drey in einer und derselben Vertikal-Reihe stehende Werthe von α, β, γ, der gegebenen Gleichung genügen, während man dabey zugleich alle möglichen Auflösungen hat.

§. 377. Aufgabe.

Alle möglichen zusammengehörigen Werthe der Unbekannten $\beta, \gamma \cdots \mu$ zu finden, welche Null oder absolute ganze Zahlen sind, und welche der Gleichung

$$1 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma + 3 \cdot \delta + \cdots + n \cdot \mu = p$$

ein Genüge leisten, unter der Voraussetzung, daß p entweder Null, oder eine absolute ganze Zahl ist.

Auflösung. 1) Man bilde den Zeiger

$$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & \cdots & n \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \cdots & \mu \end{Bmatrix}.$$

2) Man entwickle alle Klassen der Kombinationen zur Summe p aus den Elementen 1, 2, 3 ··· n. (Ein höheres Element als n darf nicht vorkommen, weshalb man bey dem Entwickeln dieser Kombinationen aus einem unbegrenzten Zeiger (1, 2, 3···) nach (§. 374. und §. 375.) sogleich diejenigen Verbindungen weglassen muß, welche höhere Elemente als n enthalten.)

3) Die Zahl, die anzeigt, wie vielmal in einer jeden Verbindung (einer jeden Klasse) ein jedes Element vorkommt, ist allemal ein Werth des unter demselben Element im Zeiger stehenden Unbekannten, wenn man nur statt derjenigen Unbekannten, deren im Zeiger übergesetztes Element in der Verbindung gar nicht vorkommt, Null setzt.

Beyspiel. Es sey gegeben die Gleichung

$$1 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma + 3 \cdot \delta + 4 \cdot \varepsilon = 9.$$

Der Zeiger ist hier:

$$\begin{Bmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \end{Bmatrix}.$$

Die Kombinationen aus den Elementen 1, 2, 3, 4 stehen links, die aus jeder Verbindung hervorgehenden zusammengehörigen Werthe der Unbekannten aber rechts:

	$\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$
144 . . .	1, 0, 0, 2
234 . . .	0, 1, 1, 1
333 . . .	0, 0, 3, 0
1134 . . .	2, 0, 1, 1
1224 . . .	1, 2, 0, 1
1233 . . .	1, 1, 2, 0
2223 . . .	0, 3, 1, 0
11124 . . .	3, 1, 0, 1
11133 . . .	3, 0, 2, 0
11223 . . .	2, 2, 1, 0
12222 . . .	1, 4, 0, 0
111114 . . .	5, 0, 0, 1
111123 . . .	4, 1, 1, 0
111222 . . .	3, 3, 0, 0
1111113 . . .	6, 0, 1, 0
1111122 . . .	5, 2, 0, 0
11111112 . . .	7, 1, 0, 0
111111111 . . .	9, 0, 0, 0

Je 4 in einer Reihe rechts stehende Zahlen, beziehlich statt $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ gesetzt, thun der Gleichung $1 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma + 3 \cdot \delta + 4 \cdot \varepsilon = 9$ ein Genüge; und man hat zugleich alle möglichen Auflösungen.

Beweis fällt bald in die Augen.

§. 378. Zusatz.

Sollte den beyden Gleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \mu = m$$

und $$1 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma + \cdots + n \cdot \mu = p;$$

welche $n+1$ Unbekannte $\alpha, \beta, \cdots \mu$ enthalten, zugleich Genüge geleistet werden, so würde das Verfahren dasselbe bleiben, nur müßte man, statt alle Klassen der Kombinationen zu entwickeln, aus dem Zeiger 1, 2, 3, ··· n, diejenigen Klassen weglassen, deren Klassen-Zahl größer als m wäre, weil in der Auflösung des vorhergehenden (§. 377.) die Klassenzahl der links stehenden Kombinations-Verbindung allemal der Summe $\beta + \gamma + \delta + \cdots + \mu$ gleich kommt, diese Summe aber hier nie größer als m werden

kann. Dabey müßte aber für jede der Auflösungen der zweyten Gleichung der zugehörige Werth von α, aus der ersten bestimmt werden, wie bey dem bloßen Anblick der Gleichungen in die Augen fällt.

Beyspiele. Es seyen gegeben die beyden Gleichungen

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 5$$
$$1 \cdot \beta + 2 \cdot \gamma + 3 \cdot \delta = 9,$$

so entwickle man zuerst alle Klassen der Kombinationen zur Summe 9 aus den Elementen 1, 2, 3, mit Uebergehung aller der Klassen, welche die 5te übersteigen; und daraus die zusammengehörigen Werthe, welche der zweyten Gleichung entsprechen.

Man hat dann:

	$\beta, \gamma, \delta,$
333	0, 0, 3
1233	1, 1, 2
2223	0, 3, 1
11133	3, 0, 2
11223	2, 2, 1
12222	1, 4, 0

und hieraus die Auflösungen

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$
2, 0, 0, 3
1, 1, 1, 2
1, 0, 3, 1
0, 3, 0, 2
0, 2, 2, 1
0, 1, 4, 0,

welche alle den beyden Gleichungen entsprechen, und zugleich alle möglichen Auflösungen sind.

§. 379. Zusatz.

Haben zwey gegebene Gleichungen,

z. B. $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = d$ und $\mu + \nu + \pi + \cdots = q$,

denen unter derselben Voraussetzung genügt werden soll, gar keinen Unbekannten gemeinschaftlich, so erhält man ihre Auflösungen *alle*, wenn man jede einzelne Auflösung der einen, mit jeder einzelnen Auflösung der zweyten verbindet.

Es seyen z. B. gegeben die beyden Gleichungen

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{und} \quad \mu + \nu = 3,$$

so sind die Auflösungen

der ersten:		der zweyten:	
α	0, 1, 2,	μ	0, 1, 2, 3,
β	2, 1, 0,	ν	3, 2, 1, 0,

und die Auflösungen beyder Gleichungen:

α	0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2,
β	2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0,
μ	0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3,
ν	3, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 0.

Beyde Gleichungen in Verbindung haben daher 12 Auflösungen.

Man kann dies auch leicht für den Fall erweitern, wo drey und mehr solche Gleichungen gegeben wären, die keinen der Unbekannten gemeinschaftlich haben.

§. 380. Lehrsatz.

Der Ausdruck

$$a^{\alpha}\ b^{\beta}\ c^{\gamma}\ d^{\delta} \cdots m^{\mu}$$

gibt die nte Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c, d, ··· m, wenn man statt $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu$, alle aus der Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \mu = n$$

nach (§. 376.) erhaltenen Werthe setzt, dabey aber, so oft ein Wiederholungs-Exponent z. B. β den Werth 0 hat, seinen zugehörigen Buchstaben b ganz und gar wegläßt.

Beweis ist sehr leicht zu führen.

Beyspiele. So gibt

$$a^{\alpha}\ b^{\beta}$$
$$\alpha + \beta = m$$

die mte Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den beyden Elementen a und b. Die Gleichung

$$\alpha + \beta = m$$

gibt nämlich zu Auflösungen, nach (§. 376.)

α	m, m−1, m−2, ··· 2, 1, 0,
β	0, 1, 2, ··· m−2, m−1, m,

und daher die Verbindungen der bezeichneten Kombinations-Klasse

$$a^m,\ a^{m-1}b,\ a^{m-2}b^2,\ a^{m-3}b^3,\ \ldots\ldots\ldots,\ a^2b^{m-2},\ ab^{m-1},\ b^m.$$

Eben so gibt

$$a^\alpha\quad b^\beta\quad c^\gamma$$
$$\alpha+\beta+\gamma = 4$$

die vierte Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den Elementen a, b, c. — Die Gleichung

$$\alpha+\beta+\gamma = 4$$

gibt nämlich zu Auflösungen

α	4,	3,	3,	2,	2,	2,	1,	1,	1,	1,	0,	0,	0,	0,	0,
β	0,	1,	0,	2,	1,	0,	3,	2,	1,	0,	4,	3,	2,	1,	0,
γ	0,	0,	1,	0,	1,	2,	0,	1,	2,	3,	0,	1,	2,	3,	4,

und daher die fragliche Kombinations-Klasse

$$a^4,\ a^3b,\ a^3c,\ a^2b^2,\ a^2bc,\ a^2c^2,\ ab^3,$$
$$ab^2c,\ abc^2,\ ac^3,\ b^4,\ b^3c,\ b^2c^2,\ bc^3,\ c^4.$$

§. 381. Zusatz.

Der Ausdruck

$$(ax^0)^\alpha\cdot(bx^1)^\beta\cdot(cx^2)^\gamma\cdots(mx^n)^\mu,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma\cdots\mu$ wiederum, wie vorher, Wiederholungs-Exponenten sind, gibt von der νten Kombinations-Klasse mit Wiederholungen aus den Elementen

$$ax^0,\ bx^1,\ cx^2,\ dx^3,\ \cdots mx^n,\ \text{oder}$$
$$a,\ bx,\ cx^2,\ dx^3,\ \cdots mx^n,$$

bloß diejenigen Verbindungen, in welchen die Summe der Exponenten von x, gerade der Zahl p gleich ist, wenn man statt der Wiederholungs-Exponenten $\alpha, \beta, \gamma\cdots\mu$, alle Werthe setzt, welche sich nach (§. 378.) durch Auflösung der beyden Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\mu = \nu,\ \text{und}$$
$$1\cdot\beta+2\cdot\gamma+\cdots+n\cdot\mu = p$$

ergeben, dabey aber im Falle der Wiederholungs-Exponent Null ist, dies für ein Zeichen nimmt, daß das zugehörige Element gar nicht genommen werden darf.

Beyspiel. So gibt der Ausdruck

$$(ax^0)^\alpha \cdot (bx^1)^\beta \cdot (cx^2)^\gamma \cdot (dx^3)^\delta$$
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 6$$
$$1\beta + 2\gamma + 3\delta = 10$$

von der sechsten Klasse der Kombinationen aus den vier Elementen a, bx, cx^2, dx^3, nur diejenigen Verbindungen, in welchen die Summe der Exponenten von x jedesmal gerade 10 ist.

Zahlenlehre.

Siebenzehntes Kapitel.

Fortsetzung der kombinatorischen Analysis. Von den kombinatorischen Aggregaten *).

§. 382. Erklärung.

Von nun an soll jeder Buchstabe des kleinen deutschen Alphabets ohne Ausnahme Null oder eine ganze positive Zahl vorstellen.

Wenn ein solcher deutscher Buchstabe eine völlig bestimmte ganze Zahl vorstellt, soll er ein stehender Werth genannt werden; so oft er aber nach und nach jeden der Werthe **0, 1, 2, 3, 4, 5,** ꝛc. ꝛc. erhalten soll, mag er ein durchlaufender heißen, und im letzten Falle ist er wieder ein unbeschränkt durchlaufender oder ein beschränkt durchlaufender, je nachdem für ihn nach und nach alle Werthe der in's Unendliche fortgehenden Reihe **0, 1, 2, 3, 4, 5** ꝛc. ꝛc., oder nur alle diejenigen nach einander gesetzt werden sollen, welche noch gegebenen (gewöhnlich in Gleichungen ausgedrückten) Bedingungen entsprechen.

---

*) Diese wichtige Erfindung des Professors G. A. Rothe zu Erlangen, ist in der Schrift: **Theorie der comb. Integrale, Nürnberg 1820,** zum erstenmale bekannt gemacht.

Beyspiele. So stellt z. B. a^a, wenn a ein durchlaufender Werth ist, die Glieder vor: a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, etc. etc. in infin. Dagegen stellt

der Ausdruck a^a
mit der Beschränkung $a+b=4$
bloß die fünf Glieder vor

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3 \text{ und } a^4;$$

weil nun, wegen der Beschränkung $a+b=4$, der Buchstabe a keinen Werth bekommen kann, der größer als 4 wäre, in so ferne außerdem b negativ werden würde, was gegen die eben gemachte Annahme streitet, daß jeder kleine deutsche Buchstabe 0 oder eine positive ganze Zahl vorstellen soll.

Ferner wird der Ausdruck

$$a^a\ b^b,$$

wenn a und b durchlaufendende Werthe sind, alle folgende Glieder vorstellen:

a^0b^0, a^1b^0, a^2b^0, a^3b^0, a^4b^0, etc. in inf.
a^0b^1, a^1b^1, a^2b^1, a^3b^1, a^4b^1, etc. in inf.
a^0b^2, a^1b^2, a^2b^2, a^3b^2, a^4b^2, etc. in inf.
a^0b^3, a^1b^3, a^2b^3, a^3b^3, etc. etc. in inf.
in inf. in inf.,

in so ferne nicht bloß statt b, 0 und alle ganze Zahlen, sondern, während b irgend einen Werth hat, auch zugleich statt a wiederum 0 und alle ganzeu Zahlen gesetzt werden müssen. — Wollte man

den Ausdruck $a^a\ b^b$
mit der Beschränkung $a+b=c$

nehmen, so würde, ist c ein durchlaufender Werth, erstlich c nach und nach Null und alle ganzen Zahlen-Werthe erhalten, während für jeden Werth von c, dem a und b wiederum Null und alle ganzen Zahlen-Werthe gegeben werden müssen, welche der Gleichung $a+b=c$ entsprechen, und man bekäme wieder dieselben unendlich mal unendlich vielen Glieder, wie eben vorher auch, nur anders geordnet, nämlich:

a^0b^0, a^1b^0, a^0b^1, a^2b^0, a^1b^1, a^0b^2, a^3b^0, a^2b^1, a^1b^2, a^0b^3, a^4b^0,
a^3b^1, a^2b^2, a^1b^3, a^0b^4, a^5b^0, a^4b^1 etc. etc. etc.

Wäre dagegen c ein stehender Werth, so würde

der Ausdruck $a^a\ b^b$
mit der Beschränkung $a+b=c$
bloß $c+1$ Glieder vorstellen, nämlich die Glieder

$$a^cb^0,\ a^{c-1}b^1,\ a^{c-2}b^2,\ a^{c-3}b^3,\ \ldots\ a^2b^{c-2},\ a^1b^{c-1},\ a^0b^c.$$

So wird die (§. 333.) definirte arithmetische Reihe
$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \ldots\ldots$ in's Unendliche fort, durch den Ausdruck $a+ad$
vorgestellt, unter der Voraussetzung, daß a ein durchlaufender Werth ist. Dagegen stellt, unter derselben Voraussetzung, der Ausdruck $a+ad$
mit der Beschränkung $a+b = m-1$,
wenn auch b ein durchlaufender Werth ist, bloß die m ersten Glieder
$$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\ldots a+(m-1)d,$$
vor, weil $m-1$ der größte Werth jetzt ist, den a haben kann, ohne daß b negativ wird. — Ist dagegen b ein stehender Werth, so hat a nur den einzigen Werth $m-1-b$, und dann stellt $a+ad$ auch nur das einzige Glied $a+(m-1-b)d$ vor.

Eben so stellen, wenn a ein durchlaufender Werth ist, die Ausdrücke

$$\frac{(a+1)^{1|1}}{1!}, \quad \frac{(a+1)^{2|1}}{2!}, \quad \frac{(a+1)^{3|1}}{3!}, \quad \frac{(a+1)^{4|1}}{4!}, \text{ u. s. w. f.}$$

die figurirten Reihen bis in's Unendliche, beziehlich der
1ten, 2ten, 3ten, 4ten, u. s. w.
Ordnung vor, während der Ausdruck

$$\frac{(a+1)^{m|1}}{m!}$$

alle Glieder der figurirten Reihe der mten Ordnung liefert, so oft a als ein durchlaufender Werth angesehen wird. [Solches folgt aus der Formel $T^n_m = \frac{n^{m|1}}{m!}$ des (§. 357.)]. — Tritt aber zu einem dieser Ausdrücke z. B. zu

$$\frac{(a+1)^{4|1}}{4!}$$

die Beschränkung $a+b = n-1$ hinzu, so stellt derselbe Ausdruck, unter der Voraussetzung, daß auch b ein durchlaufender Werth ist, nur noch die ersten n Glieder derselben Reihe (der figurirten Zahlen der 4ten Ordnung) vor. — Wird statt der Beschränkung $a+b = n-1$ lieber diese andere $a-b = n$ oder $a = n+b$ hinzugefügt, so drückt derselbe Ausdruck alle Glieder der figurirten Reihe der 4ten Ordnung aus, aber mit dem $n+1$ten Gliede anfangend, also die ersten n Glieder nicht mit begriffen, weil jetzt der geringste Werth von a, n selber ist, wenn nämlich b ein durchlaufender Werth ist. — Und wird zu dieser letzten Beschränkung $a-b = n$, noch diese neue hinzugedacht $b+c = p$, wo b und c durchlaufende Werthe seyn sollen, so ist der

größte Werth, den b haben kann, p selbst, also n+p der größte Werth, den a haben kann, und derselbe Ausdruck

$$\frac{(a+1)^{\underline{4}|1}}{4!} \quad \text{mit den Beschränkungen} \quad \left\{\begin{matrix} a-b=n \\ b+c=p \end{matrix}\right\}$$

gibt nun die Glieder der figurirten Reihe vom n+1ten anfangend bis zum n+p+1ten fortschreitend, aber außer diesen p+1 Gliedern, weder frühere noch spätere Glieder derselben Reihe.

Ferner folgt aus (§. 380.), daß

der Ausdruck $a^a\ b^b\ c^c\ d^d$
mit der Beschränkung $a+b+c+d=m$

die mte Klasse der Kombinationen aus den 4 Elementen a, b, c, d mit Wiederholungen liefert, während

der Ausdruck $a^a \cdot (bx)^b \cdot (cx^2)^c \cdot (dx^3)^d$ oder $a^a b^b c^c d^d \cdot x^{b+2c+3d}$
mit den Beschränkungen $a+b+c+d=5$ und $b+2c+3d=7$,

dem (§. 381.) zu Folge, von der 5ten Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den vier Elementen a, bx, cx^2 und dx^3, nur diejenigen Verbindungen liefert, welche, wenn man sie als Produkte ansieht, die Potenz x7 als Faktor enthalten; immer unter der Voraussetzung, daß a, b, c, d, durchlaufende Werthe vorstellen. — Wollte man letztere Glieder alle entwickeln, so müßte man zuvor alle möglichen Werthe finden, welche a, b, c, d nach und nach annehmen können. Man hätte zu dem Ende, nach (§. 378.):

			a, b, c, d
	133	und	2, 1, 0, 2
	223		2, 0, 2, 1
$^7C_{(1,2,3)}$	1123		1, 2, 1, 1
	1222		1, 1, 3, 0
	11113		0, 4, 0, 1
	11122		0, 3, 2, 0

und da nur diese 6 zusammengehörige Werthe von a, b, c, d, existiren, welche beyden gegebenen Beschränkungen, nämlich daß

$$a+b+c+d=5 \quad \text{und} \quad b+2c+3d=7$$

seyn soll, entsprechen, so erhält man die 6 Glieder:

$$a^2b^1c^0d^2 \cdot x^7, \quad a^2b^0c^2d^1 \cdot x^7, \quad a^1b^2c^1d^1 \cdot x^7,$$
$$a^1b^1c^3d^0 \cdot x^7, \quad a^0b^4c^0d^1 \cdot x^7, \quad a^0b^3c^2d^0 \cdot x^7;$$

und sollten diese alle addirt werden, so gäbe dies den Ausdruck

$$[a^2bd^2+a^2c^2d+ab^2cd+abc^3+b^4d+b^3c^2] \cdot x^7.$$

§. 383. Erklärung.

Die Summe aller Glieder, welche ein, solche deutsche Buchstaben enthaltender Ausdruck A liefert, wenn die deutschen Buchstaben unbeschränkte oder beschränkte durchlaufende Werthe sind, bezeichne man durch ein dem Ausdruck vorgesetztes S, nachdem letzterer selbst in eckige Klammern eingeschlossen ist, und die beschränkenden Gleichungen so dicht wie möglich unter ihn gesetzt worden sind. — Der Ausdruck A selbst, welcher der Repräsentant von allen diesen Gliedern ist, heißt dann das allgemeine Glied dieser Summe, und die so bezeichnete Summe selbst ein kombinatorisches Aggregat.

Beyspiele. Die Summe von n Gliedern der figurirten Reihe der mten Ordnung, welche (§. 355.) durch S_m^n bezeichnet worden ist, kann z. B. jetzt durch das kombinatorische Aggregat

$$S\left[\frac{(a+1)^{m|1}}{m!}\right]_{a+b=n-1}$$

vorgestellt werden;

und die Lehrsätze des (§. 356.) schreiben sich jetzt sehr leicht so:

1) $$S\left[\frac{(a+1)^{1|1}}{1!}\right]_{a+b=n-1} = \frac{n^{2|1}}{2!} \quad ;$$

2) $$S\left[\frac{(a+1)^{2|1}}{2!}\right]_{a+b=n-1} = \frac{n^{3|1}}{3!} \quad ;$$

3) $$S\left[\frac{(a+1)^{3|1}}{3!}\right]_{a+b=n-1} = \frac{n^{4|1}}{4!} \quad ;$$

4) $$S\left[\frac{(a+1)^{4|1}}{4!}\right]_{a+b=n-1} = \frac{n^{5|1}}{5!} \quad ;$$

(C) $$S\left[\frac{(a+1)^{m|1}}{m!}\right]_{a+b=n-1} = \frac{n^{m+1|1}}{(m+1)!};$$

und es hat diese Art zu schreiben den großen Vortheil, daß man links die einzelnen Glieder der Reihe (der Summe) selber wirklich hat, und nicht bloße Zeichen, welche die Stellen der wirklichen Glieder einnehmen (Lokalzeichen), an denen aber nicht die wirkliche Zusammensetzung derselben durch die Operationen erkannt wird.

Und das Aggregat

$$S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!}a^a b^b\right]_{a+b=4}$$

stellt vor die Summe

$$\frac{4!}{4!\ 0!}a^4b^0+\frac{4!}{3!\ 1!}a^3b^1+\frac{4!}{2!\ 2!}a^2b^2+\frac{4!}{1!\ 3!}a^1b^3+\frac{4!}{0!\ 4!}a^0b^4\ ;$$

oder auch, weil $\frac{(m+n)!}{m!\ n!} = (m+n)_m = (m+n)_n$ ist,
die Summe

$$a^4+4_1\cdot a^3b+4_2\cdot a^2b^2+4_3\cdot ab^3+b^4;$$

oder, wenn man $4_1 = 4$, $4_2 = 6$, $4_3 = 4_1 = 4$ berechnet hat,
die Summe

$$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

von welcher wir nach (§. 49. Lehrsatz 1.) wissen, daß sie $= (a+b)^4$ ist.

Ferner stellt das Aggregat

$$S\left[(-1)^b\cdot m_b\cdot a^a b^b\right]_{a+b=m,}$$

wo m eine positive ganze Zahl ist, die Summe

$$m_0\cdot a^m+m_1\cdot a^{m-1}b+m_2\cdot a^{m-2}b^2+m_3\cdot a^{m-3}b^3+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{m-2}\cdot m_{m-2}\cdot a^2b^{m-2}+(-1)^{m-1}\cdot m_{m-1}\cdot ab^{m-1}+(-1)^m\cdot m_m\cdot b^m$$

vor, während $m_0 = 1$, $m_1 = m$, $m_2 = \frac{m(m-1)}{2}$,

$m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, u. s. w. $m_{m-2} = m_2$, $m_{m-1} = m_1$

und $m_m = m_0 = 1$ ist; wo endlich statt $(-1)^{m-2}$, $(-1)^m$ entweder $+1$, oder -1 gesetzt wird, je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, während
$(-1)^{m-1} = -(-1)^m$, entweder -1 oder $+1$ gibt. —

Also würde das Aggregat

$$S\left[(-1)^a\cdot 4_a\cdot a^a b^b\right]_{a+b=4}$$

die Summe

$$a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$

vorstellen, von welcher wir nach (§. 49. Lehrsatz 1.) wissen, daß sie $= (a-b)^4$ ist.

Endlich stellt das kombinatorische Aggregat

$$S\left[\begin{matrix} a^a \cdot b^b \cdot c^c \cdot d^d \cdot x^p \\ a+b+c+d=5,\quad b+2c+3d=p \end{matrix}\right]$$

die Summe vor

$$\begin{aligned}
&a^5+a^4b\cdot x+(a^4c+a^3b^2)\cdot x^2+(a^4d+a^3bc+a^2b^3)\cdot x^3\\
&+(a^3bd+a^3c^2+a^2b^2c+ab^4)\cdot x^4\\
&+(a^3cd+a^2b^2d+a^2bc^2+ab^3c+b^5)\cdot x^5\\
&+(a^3d^2+a^2bcd+ab^3d+a^2c^3+ab^2c^2+b^4c)\cdot x^6\\
&+(a^2bd^2+a^2c^2d+ab^2cd+b^4d+abc^3+b^3c^2)\cdot x^7\\
&+(a^2cd^2+ab^2d^2+abc^2d+b^3cd+ac^4+b^2c^3)\cdot x^8\\
&+(a^2d^3+abcd^2+b^3d^2+ac^3d+b^2c^2d+bc^4)\cdot x^9\\
&+(abd^3ac^2d^2+b^2cd^2+bc^3d+c^5x)\cdot x^{10}\\
&+(acd^3+b^2d^3+bc^2d^2+c^4d)\cdot x^{11}+(ad^4+bcd^3+c^3d^2)\cdot x^{12}\\
&+(bd^4+c^2d^3)\cdot x^{13}+cd^4\cdot x^{14}+d^5\cdot x^{15};
\end{aligned}$$

welche aus 56 Gliedern besteht, die hier in 16 Glieder zusammengefaßt sind. Man erhält aber diese Glieder alle, wenn man dem p nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen vorstellen läßt, dann aber zu jedem Werth von p, alle möglichen Werthe von a, b, c, d, sucht, welche den gegebenen Beschränkungen

$$a+b+c+d=5 \quad \text{und} \quad b+2c+3d=p$$

entsprechen, alle diese zusammengehörigen Werthe in das allgemeine Glied des Aggregats setzt, und zuletzt die Summe aller der dadurch hervorgehenden Glieder nimmt. Es kann dabey offenbar p nicht größer als 15 genommen werden, weil jeder größere Werth von p, für a, b, c, d keine Auflösungen mehr liefert.

§. 384. Zusatz.

Der Werth eines kombinatorischen Aggregats hängt also ab:

1) von dessen allgemeinem Gliede, durch welches die Form der einzelnen Glieder bestimmt wird; aber besonders
2) von den beschränkenden Gleichungen, welche die Menge (die Anzahl) der einzelnen Glieder bedingen, und welche so beschränkend seyn können, daß das Aggregat unendlich viele Glieder, vielleicht aber auch nicht ein einziges Glied haben kann. [Man vergleiche die Beyspiele zu (§. 382.)].

Anmerkung. Von nun an soll in jedem Aggregat jeder deutsche Buchstabe als ein durchlaufender angesehen werden, so lange nicht ausdrücklich gesagt wird, daß er ein stehender geworden ist.

§. 385. Zusatz.

Aus diesen Begriffen gehen sogleich nachstehende Folgerungen hervor:

1) In jedem kombinatorischen Aggregat haben die durchlaufenden deutschen Buchstaben keine bestimmte Bedeutung, sondern bloß eine von den beschränkenden Gleichungen abhängige. Also kann man statt eines jeden dieser Buchstaben einen beliebigen neuen setzen, (d. h. aber überall, wo er vorkommt, sowohl in dem allgemeinen Gliede, als auch in den beschränkenden Gleichungen).

So ist z. B.

$$S\left[(-1)^a \cdot x^b \cdot y^a\right]_{a+b=n} = S\left[(-1)^c \cdot x^b \cdot y^c\right]_{b+c=n} = S\left[(-1)^c \cdot x^d \cdot y^c\right]_{c+d=n}.$$

2) Da die beschränkenden Gleichungen bloß dazu dienen, den durchlaufenden deutschen Buchstaben nicht mehr und nicht weniger zusammengehörige Werthe zu geben und zu lassen, als sie gerade haben sollen, so kann man die Anzahl dieser Gleichungen nach Belieben vermehren oder vermindern, so oft dadurch den durchlaufenden deutschen Buchstaben nicht mehr und nicht weniger, sondern genau dieselben zusammengehörigen Werthe gegeben werden.

So kann man z. B. zu dem Aggregat

$$S\left[\frac{x^{a+c}}{a!\ c!}\right]_{a+b=4,\ c+d=5}$$

noch die beschränkende Gleichung $a+c=e$ hinzufügen, weil dadurch offenbar dem a und c noch genau alle die Werthe zukommen, welche den andern Beschränkungen $a+b=4$ und $c+d=5$ entsprechen. Dann kann man aber auch jenes Resultat noch so schreiben:

$$S\left[\frac{x^e}{a!\ c!}\right]_{\substack{a+b=4,\ c+d=5,\\ a+c=e.}}$$

Und da, wenn man von den drey beschränkenden Gleichungen

$$a+b=4, \qquad c+d=5, \qquad a+c=e,$$

die beyden ersten addirt, $a+c+b+d=9$, oder $e+b+d=9$

hervorgeht, so wird man statt dieser drey beschränkenden Gleichungen auch diese vier anderen

$$a+b=4, \quad c+d=5, \quad a+c=e \quad \text{und} \quad e+f=9$$

nehmen können, so daß obiges Resultat auch noch so geschrieben werden kann:

$$S\left[\frac{x^e}{a!\ c!}\right]_{\substack{a+b=4,\ c+d=5\\ a+c=e,\ e+f=9}}.$$

Die letzte dieser beschränkenden Gleichungen gibt für e nach und nach die Werthe

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

und zu jedem Werthe von e, ergeben sich die Werthe von a und c aus der Gleichung $a+c=e$, wenn man nur dabey die beyden erstern Beschränkungen beachtet, daß nämlich $a+b=4$ und $c+d=5$ werden muß, d. h. daß a nicht größer wie 4, und c nicht größer als 5 genommen wird. Man erhält hiernach für a, c, e, folgende Werthe:

e	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	7	8	8	9
a	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	1	2	3	4	2	3	4	3	4	4
c	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	5	4	3	2	5	4	3	5	4	5.

Und da man auf diese Weise 30 zusammengehörige Werthe von a und c hat, so repräsentirt obiges Aggregat eine Summe von 30 Gliedern, welche sich jedoch sogleich in eine Summe von 10 Gliedern zusammen fassen läßt, nämlich in die Summe

$$1+2\cdot x+\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right)\cdot x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\cdot x^3$$
$$+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{1!\ 3!}+\frac{1}{2!\ 2!}+\frac{1}{3!\ 1!}+\frac{1}{4!}\right)\cdot x^4$$
$$+\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{1!\ 4!}+\frac{1}{2!\ 3!}+\frac{1}{3!\ 2!}+\frac{1}{4!\ 1!}\right)\cdot x^5$$
$$+\left(\frac{1}{1!\ 5!}+\frac{1}{2!\ 4!}+\frac{1}{3!\ 3!}+\frac{1}{4!\ 2!}\right)\cdot x^6$$
$$+\left(\frac{1}{2!\ 5!}+\frac{1}{3!\ 4!}+\frac{1}{4!\ 3!}\right)\cdot x^7+\left(\frac{1}{3!\ 5!}+\frac{1}{4!\ 4!}\right)\cdot x^8+\frac{1}{4!\ 5!}\cdot x^9;$$

oder, wenn die Fakultäten berechnet und die Brüche addirt werden, in die Summe:

$$1+2x+2x^2+\tfrac{4}{3}x^3+\tfrac{2}{3}x^4+\tfrac{31}{120}x^5+\tfrac{7}{90}x^6+\tfrac{13}{720}x^7+\tfrac{1}{320}x^8+\tfrac{1}{2880}x^9.$$

3) Eben deshalb kann man in einem Aggregat die beschränkenden Gleichungen ganz weglassen, wenn sie von der Art sind, daß sie nicht beschränken, sondern daß die durchlaufenden deutschen

Buchstaben des Aggregats deshalb nicht mehr und nicht weniger und nicht andere Werthe bekommen.

Ist z. B. gegeben das Aggregat

$$S\left[\frac{x^e}{a!\ c!}\right]_{a+c=e}$$

unter der Voraussetzung, daß a, r, e, durchlaufende Werthe sind, und läßt man hier die beschränkende Gleichung $a+c=e$ weg, setzt aber zuvor in dem allgemeinen Gliede $a+c$ statt e, so liefert das Aggregat

$$S\left[\frac{x^{a+c}}{a!\ c!}\right]$$

nicht mehr und nicht weniger Werthe und auch keine anderen, als das vorhergehende, weil jetzt wie oben, statt a und r nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen gesetzt werden müssen. In beyden Fällen erhält man daher unendlich mal unendlich viele einzelne Glieder, deren Summe durch das Aggregat selbst vorgestellt ist.

§. 386. Lehrsatz.

Setzt man zu einem kombinatorischen Aggregat A, in dessen allgemeinem Gliede allein, oder auch zugleich in seinen beschränkenden Gleichungen der deutsche Buchstabe a, nicht aber der andere k vorkommt, zu den beschränkenden Gleichungen noch diese

$$a = 2k,$$

oder diese andere $a = 2k+1,$

hinzu, so hat man im erstern Fall ein Aggregat A_1, in welchem nicht mehr alle Glieder von A vorkommen, sondern nur diejenigen, in denen a eine gerade Zahl ist; im andern Falle dagegen hat man ein Aggregat A_2, in welchem nur diejenigen Glieder von A vorkommen, in denen a eine ungerade Zahl ist. Aber eben deswegen ist dann nothwendig

$$A = A_1 + A_2$$

oder

$$A = \underset{a=2k}{A} + \underset{a=2k+1}{A}.$$

Beweis ist unnöthig.

Beyspiele. So ist z. B.

$$S\left[(-1)^a x^a y^b\right]_{a+b=7} = S\left[(-1)^a x^a y^b\right]_{\substack{a+b=7 \\ a=2k}} + S\left[(-1)^a x^a y^b\right]_{\substack{a+b=7 \\ a=2k+1}}.$$

Es stellt nämlich das Aggregat zur Linken die Summe vor:

$$y^7 - xy^6 + x^2y^5 - x^3y^4 + x^4y^3 - x^5y^2 + x^6y - x^7;$$

während das erste Aggregat zur Rechten, weil in ihm statt α nur 0, oder jede gerade Zahl gesetzt werden kann, nur die Summe:

$$y^7 + x^2y^5 + x^4y^3 + x^6y$$ vorstellt,

und das zweyte Aggregat zur Rechten, weil in ihm statt α nur ungerade Zahlen gesetzt werden können, die Summe:

$$-(xy^6 + x^3y^4 + x^5y^2 + x^7)$$ repräsentirt.

§. 387. Zusatz.

Da es aber einerlei ist, ob man die beschränkenden Gleichungen $\alpha = 2\mathfrak{E}$, oder $\alpha = 2\mathfrak{E}+1$ hinschreibt, oder ob man lieber sogleich $2\mathfrak{E}$ statt α setzt, oder $2\mathfrak{E}+1$ statt α, sowohl im allgemeinen Gliede, als in den beschränkenden Gleichungen des Aggregats; so ist jedes kombinatorische Aggregat A, der Summe zweyer andern A_1 und A_2 gleich, von denen A_1 erhalten wird, wenn man in A, $2\mathfrak{E}$ statt α setzt, während das andere A_2 hervorgeht, wenn in A, $2\mathfrak{E}+1$ statt α gesetzt wird.

Und eben weil in A_1 und A_2 der Buchstabe α nicht mehr, sondern dafür $2\mathfrak{E}$ und $2\mathfrak{E}+1$ vorkommt, so kann man nach (§. 385. Nr. 1.) statt $\mathfrak{E}$, (jeden nicht vorkommenden andern deutschen Buchstaben, also namentlich) wieder α setzen, so daß A_1 und A_2 erhalten werden, wenn in A zuerst 2α, dann $2\alpha+1$ statt α gesetzt wird.

Beyspiel. So findet sich z. B.

$$S\left[\frac{(-1)^a x^a}{a!}\right]_{a+b=n} = S\left[\frac{(-1)^{2a} x^{2a}}{(2a)!}\right]_{2a+b=n} + S\left[\frac{(-1)^{2a+1} x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]_{2a+b+1=n};$$

oder, weil $(-1)^{2a} = +1$ und $(-1)^{2a+1} = -1$ ist,

$$S\left[\frac{(-1)^a x^a}{a!}\right]_{a+b=n} = S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]_{2a+b=n} - S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]_{2a+b=n-1}.$$

Eben so ist:

$$S\left[\frac{(-1)^a \cdot x^a y^b z^c}{(a+1)(b+1)(c+1)}\right]_{a+b+c=5} = S\left[\frac{x^{2a} y^b z^c}{(2a+1)(b+1)(c+1)}\right]_{2a+b+c=5} - S\left[\frac{x^{2a+1} y^b z^c}{(2a+2)(b+1)(c+1)}\right]_{2a+b+c=4}.$$

Um nämlich die Glieder zu finden, deren Summe das erste Aggregat bildet, muß man alle Auflösungen von $a+b+c=5$ suchen, und da findet man für a, b, c, folgende Werthe:

c	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
b	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
a	5	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0

und das Aggregat zur Linken stellt also vor die Summe:

$$-\frac{x^5}{6}+\frac{x^4y}{5\cdot2}-\frac{x^3y^2}{4\cdot3}+\frac{x^2y^3}{3\cdot4}-\frac{xy^4}{2\cdot5}+\frac{y^5}{6}+\frac{x^4z}{5\cdot2}-\frac{x^3yz}{4\cdot2\cdot2}+\frac{x^2y^2z}{3\cdot3\cdot2}-\frac{xy^3z}{2\cdot4\cdot2}$$
$$+\frac{y^4z}{5\cdot2}-\frac{x^3z^2}{4\cdot3}+\frac{x^2yz^2}{3\cdot2\cdot3}-\frac{xy^2z^2}{2\cdot3\cdot3}+\frac{y^3z^2}{4\cdot3}+\frac{x^2z^3}{3\cdot4}-\frac{xyz^3}{2\cdot2\cdot4}+\frac{y^2z^3}{3\cdot4}-\frac{xz^4}{2\cdot5}$$
$$+\frac{yz^4}{2\cdot5}+\frac{z^5}{6}.$$

Um aber die Glieder zu finden, deren Summe das erste Aggregat zur Rechten bildet, findet man zunächst aus der beschränkenden Gleichung $2a+b+c=5$, für a, b, c folgende Werthe:

a	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
b	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	0	1
c	5	4	3	2	1	0	3	2	1	0	1	0,

so daß dieses erste Aggregat zur Rechten die Summe vorstellt:

$$\frac{z^5}{6}+\frac{yz^4}{2\cdot5}+\frac{y^2z^3}{3\cdot4}+\frac{y^3z^2}{4\cdot3}+\frac{y^4z}{5\cdot2}+\frac{y^5}{6}+\frac{x^2z^3}{3\cdot4}+\frac{x^2yz^2}{3\cdot2\cdot3}+\frac{x^2y^2z}{3\cdot3\cdot2}+\frac{x^2y^3}{3\cdot4}$$
$$+\frac{x^4z}{5\cdot2}+\frac{x^4y}{5\cdot2}.$$

Um endlich die Glieder zu finden, deren Summe durch das zweyte Aggregat zur Rechten vorgestellt wird, hat man aus $2a+b+c=4$, die Werthe für a, b, c,

a	0	0	0	0	0	1	1	2
b	0	1	2	3	4	0	1	2	0
c	4	3	2	1	0	2	1	0	0,

so daß dieses zweyte Aggregat zur Rechten vorstellt die Summe:

$$\frac{xz^4}{2\cdot5}+\frac{xyz^3}{2\cdot2\cdot4}+\frac{xy^2z^2}{2\cdot3\cdot3}+\frac{xy^3z}{2\cdot4\cdot2}+\frac{xy^4}{2\cdot5}+\frac{x^3z^2}{4\cdot3}+\frac{x^3yz}{4\cdot2\cdot2}+\frac{x^3y^2}{4\cdot3}+\frac{x^5}{6};$$

und letztere Summe von der nächst vorhergehenden Summe subtrahirt, läßt augenfällig die allererste übrig, wie unser Satz solches geliefert hat.

§. 388. Zusatz.

Aus demselben Grunde ist aber jedes kombinatorische Aggregat A, der Summe dreyer andern A_1, A_2 und A_3 gleich, welche aus A hervorgehen, wenn man statt eines seiner deutschen Buchstaben z. B. α, zuerst 3α, dann $3\alpha+1$, und endlich $3\alpha+2$ substituirt; d. h. es ist

$$A = \underset{\alpha=3k}{A} + \underset{\alpha=3k+1}{A} + \underset{\alpha=3k+2}{A}.$$

Und auf dieselbe Weise läßt sich ein Aggregat A in die Summe von 4, 5, und mehr andern auf ähnliche Art aus ihm hervorgegangenen, verwandeln.

§. 389. Lehrsatz.

Setzt man in einem Aggregat A, statt eines seiner deutschen Buchstaben, z. B. statt α zuerst 0, so erhält man ein Aggregat A_1, welches alle diejenigen Glieder von A enthält, für welche $\alpha = 0$ ist. Fügt man aber zu A noch die beschränkende Gleichung $\alpha = k+1$ hinzu, oder, was dasselbe ist, setzt man $k+1$ statt α, so bekommt man ein Aggregat A_2, welches genau alle diejenigen Glieder von A enthält, in welchen α nicht Null geworden ist. Daher ist nothwendig

$$A = A_1 + A_2,$$

oder

$$A = \underset{\alpha=0}{A} + \underset{\alpha=k+1}{A}$$

Es ist also jedes kombinatorische Aggregat A, der Summe zweyer anderen A_1 und A_2 gleich, welche aus α hervorgehen, wenn man zuerst 0, dann $\alpha+1$, statt α setzt.

Beweis ist überflüssig.

Beyspiel. So ist, um das Beyspiel des (§. 387.) noch einmal anzuziehen:

$$S\left[\underset{a+b+c=5}{\frac{(-1)^a x^a y^b z^c}{(a+1)(b+1)(c+1)}}\right] = S\left[\underset{b+c=5}{\frac{y^b z^c}{(b+1)(c+1)}}\right] + S\left[\underset{a+b+c=4}{\frac{(-1)^{a+1} \cdot x^{a+1} y^b z^c}{(a+2)(b+1)(c+1)}}\right],$$

in so ferne sich die Gleichung $(a+1)+b+c = 5$ auf $a+b+c = 4$ reduzirt.

§. 390. Zusatz.

Umgekehrt ist aber dann wieder

$$A_2 = A - A_1,$$

d. h. jedes kombinatorische Aggregat A_2 ist der Differenz $A - A_1$ zweyer anderen A und A_1 gleich, von denen das erste A aus dem gegebenen A_2 hervorgeht, wenn man daselbst $a-1$ statt a setzt, während das andere A_1 wiederum aus diesem A erhalten wird, wenn man im letzteren 0 statt a setzt *).

§. 391. Lehrsatz.

Fügt man einem kombinatorischen Aggregat A, in welchem der deutsche Buchstabe a, nicht aber k vorkommt, noch die beschränkende Gleichung $a+k = \mu$ hinzu, so liefert dieses neue Aggregat A_1 bloß diejenigen Glieder von A, in welchen a nicht größer als μ ist, unter μ eine ganze Zahl vorausgesetzt. Fügt man aber dem Aggregat A die beschränkende Gleichung $a = k+1+\mu$ hinzu, so liefert dieses neue Aggregat A_2 offenbar alle diejenigen Glieder von A, in welchen a größer als μ. — Also ist nothwendig

$$A = A_1 + A_2,$$

oder

$$A = \underset{a+k=\mu}{A} + \underset{a=k+1+\mu}{A}.$$

Anmerkung. Setzt man hier $\mu = 0$, so gibt dies den Lehrsatz des vorhergehenden (§. 389.).

§. 392. Zusatz.

Dieser Lehrsatz gilt aber offenbar noch, wenn statt μ selbst wieder ein deutscher in A vorkommender Buchstabe, z. B. b gesetzt werden sollte, weil dann A_1 alle diejenigen Glieder von A enthält, in welchen a nie größer als der zugehörige Werth von b

---

*) Dieses letztere A_1 wird offenbar auch direkt aus A_2 erhalten, wenn man daselbst -1 statt a setzt.

wird, während A_2 alle die übrigen Glieder von A enthalten muß, in welchen a allemal größer als die zugehörigen Werthe von b gefunden wird.

Es ist also allemal

$$A = A_1 + A_2,$$

wenn A_1 aus A dadurch erhalten ist, daß man in letzterem (nämlich in A) $a+b$ statt b gesetzt hat, und wenn A_2 aus A sich ergibt, indem $a+b+1$ statt a gesetzt worden ist; denn im ersten Fall ist das, was für b gesetzt worden ist, nämlich $a+b$, offenbar $=$ oder $> a$, also $a =$ oder $<$ als dieses statt b gesetzte; und im andern Fall ist das, was für a gesetzt worden, nämlich $a+b+1$, offenbar größer als b.

Beyspiele. So ist, um das Aggregat des (§. 387.) noch einmal aufzufassen:

$$S\left[\frac{(-1)^a x^a y^b z^c}{(a+1)(b+1)(c+1)}\right]_{a+b+c=5} = S\left[\frac{(-1)^a x^a y^{a+b} z^c}{(a+1)(a+b+1)(c+1)}\right]_{2a+b+c=5}$$
$$+ S\left[\frac{(-1)^{a+b+1} x^{a+b+1} y^b z^c}{(a+b+2)(b+1)(c+1)}\right]_{a+2b+c=4}.$$

Es gibt nämlich die Gleichung $a+2b+c = 4$, für a, b, c folgende Werthe:

a	0	1	2	3	4	0	1	2	0
b	0	0	0	0	0	1	1	1	2
c	4	3	2	1	0	2	1	0	0 ;

und das letztere Aggregat zur Rechten (des $=$Zeichens) stellt daher die Summe vor:

$$\frac{xz^4}{2\cdot 5} + \frac{x^2z^3}{3\cdot 4} - \frac{x^3z^2}{4\cdot 3} + \frac{x^4z}{5\cdot 2} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^2yz^2}{3\cdot 2\cdot 3} - \frac{x^3yz}{4\cdot 2\cdot 2} + \frac{x^4y}{5\cdot 2} - \frac{x^3y^2}{4\cdot 3},$$

welche alle diejenigen Glieder des Aggregats zur Linken enthält, in welchen $a > b$, d. h. der Exponent von x größer als der Exponent von y ist. Das erstere Aggregat zur Rechten, weil die Gleichung $2a+b+c = 5$ für a, b, c, die Werthe liefert:

a	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2
b	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	0	1
c	5	4	3	2	1	0	3	2	1	0	1	0,

stellt dagegen die Summe vor:

$$\frac{z^5}{6}+\frac{yz^4}{2\cdot5}+\frac{y^2z^3}{3\cdot4}+\frac{y^3z^2}{4\cdot3}+\frac{y^4z}{5\cdot2}+\frac{y^5}{6}-\frac{xyz^3}{2\cdot2\cdot4}-\frac{xy^2z^2}{2\cdot3\cdot3}-\frac{xy^3z}{2\cdot4\cdot2}-\frac{xy^4}{2\cdot5}$$
$$+\frac{x^2y^2z}{3\cdot3\cdot2}+\frac{x^2y^3}{3\cdot4},$$

welche genau alle diejenigen Glieder des Aggregates zur Linken sind, in denen $a \lessgtr b$, d. h. in welchen der Exponent von x nicht größer ist, als der Exponent von y.

§. 393. Lehrsatz.

Zwey kombinatorische Aggregate, welche dieselben beschränkenden Gleichungen haben, werden zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, wenn man ihre allgemeinen Glieder addirt oder subtrahirt, dabey aber dieselben gemeinschaftlichen beschränkenden Gleichungen beybehält. — Damit jedoch dieselben beschränkenden Gleichungen zwischen denselben deutschen Buchstaben in beyden Aggregaten wirklich statt finden, ist es oft nöthig, nach (§. 385. Nr. 1.), in dem einen derselben statt der vorkommenden deutschen Buchstaben neue zu setzen.

Beyspiele. So findet sich z. B.

$$S\left[\underset{a+b=n}{x_a}\right]+S\left[\underset{c+d=n}{x_{c+1}}\right]=S\left[\underset{a+b=n}{x_a+x_{a+1}}\right];$$

und weil nach (§. 352. Nr. 2.) für jeden einzelnen stehenden Werth von a,

$$x_a+x_{a+1}=(x+1)_{a+1}$$

ist, so erhält man hieraus noch

$$S\left[\underset{a+b=n}{x_a}\right]+S\left[\underset{c+d=n}{x_{c+1}}\right]=S\left[\underset{a+b=n}{(x+1)_{a+1}}\right],$$

welche Gleichung lehrt, daß die beyden Summen

$$x_0+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n \text{ und } x_1+x_2+x_3+x_3+\cdots+x_{n+1},$$

welche beyde aus gleichvielen Gliedern bestehen, zu einander addirt, die Summe

$$(x+1)_1+(x+1)_2+(x+1)_3+\cdots+(x+1)_{n+1}$$

geben, welche dadurch erhalten wird, daß man beyde erstern Summen mit ihren gleichvielen Gliedern unter einander geschrieben, und dann die unter einander stehenden Glieder addirt sich denkt, während zuletzt alle diese einzelnen Resultate wiederum zu einander addirt, d. h. mittelst des (+) Zeichens mit einander verbunden werden.

Beweis. Addirt oder subtrahirt man nämlich nach diesem Lehrsatze, so addirt oder subtrahirt man, statt die ganzen Summen zu addiren oder zu subtrahiren, ihre gleichvielten Glieder, welches bekanntlich dasselbe Endresultat gibt.

§. 394. Zusatz.

Um diesen Lehrsatz anwenden zu können, ist es zuweilen nöthig, die Aggregate nach den frühern (§§.) zuvor umzuformen. —

Gesetzt man hätte zu addiren:

$$S\left[\underset{a+b=m}{m_b \cdot a^{a+1} b^b}\right] \quad \text{und} \quad S\left[\underset{a+b=m}{m_b \cdot a^a b^{b+1}}\right],$$

so verwandle man das erstere nach (§. 389.), indem $b = 0$ und $b+1$ statt b gesetzt wird, in die Summe:

$$S\left[\underset{a=m}{m_0 \cdot a^{a+1}}\right] + S\left[\underset{a+b=m-1}{m_{b+1} \cdot a^{a+1} b^{b+1}}\right],$$

wobey der erste Summand, weil a den einzigen Werth m hat, bloß aus dem einzigen Gliede $m_0 \cdot a^{m+1}$, d. h. a^{m+1} besteht, weil $m_0 = 1$ ist. Und verwandelt man das zweyte oben gegebene Aggregat, nach demselben (§. 389.), indem man $a = 0$ und $a+1$ statt a setzt, so erhält man für selbiges die Summe:

$$b^{m+1} + S\left[\underset{a+b=m-1}{m_b \cdot a^{a+1} b^{b+1}}\right].$$

Addirt man nun beyde gegebene Aggregate, so ergibt sich aus unserm Lehrsatze die Summe:

$$a^{m+1} + b^{m+1} + S\left[\underset{a+b=m-1}{(m_{b+1} + m_b) a^{a+1} b^{b+1}}\right],$$

oder auch, nach (§. 352. Nr. 2.), die Summe:

$$a^{m+1} + b^{m+1} + S\left[\underset{a+b=m-1}{(m+1)_{b+1} \cdot a^{a+1} b^{b+1}}\right],$$

oder auch, wenn man (§. 390.) in Anwendung bringt, und zuerst $a-1$ statt a, setzt,

$$b^{m+1} + S\left[\underset{a+b=m}{(m+1)_{b+1} \cdot a^a b^{b+1}}\right],$$

welches Resultat, wenn derselbe Satz noch einmal angewandt wird, so daß man zuerst **b—1** statt **b** setzt, in

$$S\left[(m+1)_b \cdot a^a \cdot b^b\right]_{a+b=m+1}$$ übergeht.

Um dies noch näher zu beleuchten, denke man sich den speziellen Fall dieses Beyspiels, in welchem $m = 6$ ist, so waren zu addiren die beyden Summen:

$$a^7 + 6_1 \cdot a^6 b + 6_2 \cdot a^5 b^2 + 6_3 \cdot a^4 b^3 + 6_4 \cdot a^3 b^4 + 6_5 \cdot a^2 b^5 + 6_6 \cdot ab^6$$
und $a^6 b + 6_1 \cdot a^5 b^2 + 6_2 \cdot a^4 b^3 + 6_3 \cdot a^3 b^4 + 6_4 \cdot a^2 b^5 + 6_5 \cdot a\, b^6 + 6_6 \cdot b^7$.

Weil aber hier die gleichvielten Glieder nicht bequem zusammenaddirt werden können, so muß man von der ersten Summe das erste Glied absondern, von der andern Summe das letzte, und hat dann außer $a^7 + b^7$, noch zu addiren die Summen:

$$6_1 \cdot a^6 b + 6_2 \cdot a^5 b^2 + 6_3 \cdot a^4 b^3 + 6_4 \cdot a^3 b^4 + 6_5 \cdot a^2 b^5 + 6_6 \cdot ab^6$$
und $a^6 b + 6_1 \cdot a^5 b^2 + 6_2 \cdot a^4 b^3 + 6_3 \cdot a^3 b^4 + 6_4 \cdot a^2 b^5 + 6_5 \cdot ab^6$,

in welchen nun die gleichvielten Glieder bequem zusammenaddirt werden können, so daß man mit Anwendung des Satzes (§. 352. Nr. 2.), nach welchem $x_n + x_{n+1} = (x+1)_{n+1}$ ist, erhält

$$7_1 \cdot a^6 b + 7_2 \cdot a^5 b^2 + 7_3 \cdot a^4 b^3 + 7_4 \cdot a^3 b^4 + 7_5 \cdot a^2 b^5 + 7_6 \cdot ab^6;$$

zu welchem Resultat vorn hin noch das obige a^7, und hinten hin noch das obige b^7 hinzugefügt werden kann, wenn man das ganze Endresultat in der Ordnung haben will, wie solche in dem Aggregat

$$S\left[7_b \cdot a^a b^b\right]_{a+b=7}$$ ausgesprochen ist.

§. 396. Lehrsatz.

Soll ein kombinatorisches Aggregat **A**, mit einem Ausdruck **M** multiplizirt werden, welcher von den durchlaufenden Werthen der deutschen Buchstaben unabhängig ist, also immer denselben Werth behält, so darf man nur das allgemeine Glied von **A**, mit **M** multipliziren, alles übrige aber unverändert lassen.

Beweis. Denn dadurch, daß das allgemeine Glied des Aggregats den Faktor **M** erhält, erhalten alle einzelnen Glieder der durch **A** vorgestellten Summe, den Faktor **M**; also ist die ganze Summe mit diesem **M** multiplizirt.

Beyspiele. So ist z. B.

$$m!\, S\left[\frac{x^a y^b}{a!\ b!}\right]_{a+b=m} = S\left[\frac{m!}{a!\ b!} x^a y^b\right]_{a+b=m},$$

und

$$a \cdot S\left[\frac{x^a y^b}{a!\ b!}\right]_{a+b=3} = S\left[\frac{a \cdot x^a y^b}{a!\ b!}\right]_{a+b=3}.$$

Das Produkt zur Linken stellt nämlich vor:

$$a \cdot \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2 y}{2!} + \frac{x y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right);$$

und das Aggregat zur Rechten stellt vor die Summe:

$$a \cdot \frac{x^3}{3!} + a \cdot \frac{x^2 y}{2!} + a \cdot \frac{x y^2}{2!} + a \cdot \frac{y^3}{3!}.$$

§. 396. Zusatz.

Umgekehrt, enthält das allgemeine Glied eines Aggregats A, den Faktor M, welcher von den durchlaufenden Werthen der deutschen Buchstaben unabhängig ist, so kann man selbigen außerhalb des Summenzeichens als Faktor hinsetzen.

§. 397. Lehrsatz.

Sollen aber zwey Aggregate A und B mit einander multiplizirt werden, so multiplizire man ihre allgemeinen Glieder mit einander, und gebe dem neuen Aggregat, alle die beschränkenden Gleichungen, welche A und B zusammen genommen haben; wenn man nur vorher, nach (§. 385. Nr. 1.), in dem einen der Aggregate statt derjenigen deutschen durchlaufenden Buchstaben, welche zu gleicher Zeit in dem andern vorkommen, neue, in den gegebenen Aggregaten noch nicht vorkommende deutsche Buchstaben setzt.

Beyspiel. So findet sich:

$$S\left[\frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=4} \times S\left[\frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=5}$$

$$= S\left[\frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=4} \times S\left[\frac{x^c}{c!}\right]_{c+b=5} = S\left[\frac{x^{a+c}}{a!\ c!}\right]_{a+b=4,\ c+b=5}.$$

Es bedeutet nämlich $S\left[\frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=4}$ die Summe:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!};$$

und das andere Aggregat $S\left[\frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=5}$

bedeutet die Summe:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}.$$

Multiplizirt man nun diese Summen mit einander, so muß jedes Glied der einen Summe, welche alle durch $\frac{x^a}{a!}$ vorgestellt sind, mit jedem Gliede der andern Summe, welche alle durch $\frac{x^c}{c!}$ vorgestellt sind, multiplizirt werden; also stellt $\frac{x^a}{a!}\cdot\frac{x^c}{c!}$ eines dieser Produkte, und dann alle diese Produkte vor, wenn während dem a irgend ein Werth gegeben wird, dem c noch jeder mögliche Werth gegeben werden kann, welches letztere eben dadurch bezweckt wurde, daß man in dem zweyten Aggregat deutsche Buchstaben eingeführt hat, welche dem erstern Aggregat völlig fremd sind. — Untersucht man, welche Summe durch das obige Resultat zur Rechten:

$$S\left[\frac{x^{a+c}}{a!\ c!}\right]_{a+b=4,\ c+d=5}$$

vorgestellt ist, so muß man vor allem die Werthe suchen, welche a, b, c, d aus den Gleichungen $a+b=4$, $c+d=5$ erhalten, und da findet man, als Werthe von a und b, welche der erstern Gleichung $a+b=4$ entsprechen,

a	0	1	2	3	4
b	4	3	2	1	0 ;

und als Werthe von c und d, welche der Gleichung $c+d=5$ entsprechen:

c	0	1	2	3	4	5
d	5	4	3	2	1	0 ;

folglich sind die zusammengehörigen Werthe von a, b, c und d, welche beyden Gleichungen zugleich entsprechen:

a	0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4
b	4 4 4 4 4 4 3 3 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0
c	0 1 2 3 4 5 0 1 2 3 4 5 0 1 2 3 4 5 0 1 2 3 4 5 0 1 2 3 4 5
d	5 4 3 2 1 0 5 4 3 2 1 0 5 4 3 2 1 0 5 4 3 2 1 0 5 4 3 2 1 0

und das Aggregat selbst stellt also die Summe vor, welche im Beyspiel zu (§. 385. Nr. 2.) bereits entwickelt steht, obgleich hier die Glieder in anderer Anordnung sich ergeben, während dort dadurch, daß man noch die neue beschränkende Gleichung $a+c = e$ hinzugefügt, und nachgehends dem e die Werthe 0, 1, 2, 3, ꝛc. gegeben hat, um dann die jedesmaligen Werthe von a und c dazu zu finden, die einzelnen Glieder der Summe, sogleich nach den auf einander folgenden Potenzen von x, geordnet erschienen sind.

Beweis. Denn da in den beyden allgemeinen Gliedern und in den zugehörigen beschränkenden Gleichungen nicht ein und derselbe deutsche Buchstabe vorkommt, so sind nicht bloß die Repräsentanten der einzelnen Glieder mit einander multiplizirt, sondern es können und müssen auch, während der eine Faktor ein beliebiges Glied der erstern Summe vorstellt, statt des andern Faktors nach und nach alle einzelnen Glieder der andern Summe gesetzt werden, weil die Werthe der in diesem andern Faktor vorkommenden deutschen Buchstaben, von den bestimmten Werthen, welche eben jetzt die deutschen Buchstaben des erstern Faktors bekommen haben, ganz und völlig unabhängig sind. Es stellt also das neue Aggregat die Summe der Produkte vor, welche man erhält, wenn jedes einzelne Glied der einen Summe (des erstern Aggregats) mit jedem einzelnen Gliede der andern Summe (des andern gegebenen Aggregats) multiplizirt wird, gerade wie solches nach den bekannten Regeln der Multiplikation seyn muß.

Bemerkung. Bildete man aus:

$$S\left[\frac{x^a}{a!}\right]_{a+b=4} \text{ und } S\left[\frac{y^a}{a!}\right]_{a+b=4}$$

das neue Aggregat:

$$S\left[\frac{x^a \cdot y^a}{a! \; a!}\right]_{a+b=4},$$

so würde dies nicht das Produkt der beyden erstern Summen seyn, sondern nur die Summe derjenigen Produkte vorstellen,

welche man erhält, wenn die beyden gegebenen erstern Summen:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$$

und

$$1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!},$$

so unter einander gesetzt werden, und dann nicht jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern, sondern nur jedes Glied der einen mit dem genau unter ihm stehenden Gliede der andern multiplizirt wird.

§. 398. Zusatz.

Umgekehrt ist klar, daß wenn sich das allgemeine Glied eines Aggregats Σ, als ein Produkt zweyer Faktoren A und B darstellen läßt, welche keinen der deutschen durchlaufenden Buchstaben mit einander gemein haben, und wenn zu gleicher Zeit die beschränkenden Gleichungen in zwey Parthien sich absondern lassen, von denen die eine bloß die deutschen durchlaufenden Buchstaben des einen Faktors, die andere Parthie aber bloß die des andern Faktors enthält, — daß dann dieses Aggregat Σ in ein Produkt zweyer Aggregate verwandelt werden kann, von denen jedes die einzelnen Faktoren A oder B zum allgemeinen Gliede, und von den beschränkenden Gleichungen nur diejenigen hat, welche gerade die deutschen Buchstaben seines allgemeinen Gliedes enthalten.

So ist z. B.

$$S\Big[\underset{a+c=m,\ b+d=n}{m_a \cdot n_b \cdot x^a \cdot y^b}\Big] = S\Big[\underset{a+c=m}{m_a \cdot x^a}\Big] \times S\Big[\underset{b+d=n}{n_b \cdot y^b}\Big].$$

§. 399. Lehrsatz.

In dem allgemeinen Gliede A eines Aggregats S[A], kann selber wieder ein Aggregat S[B] vorkommen (mit eigenen deutschen durchlaufenden Buchstaben), welches das allgemeine Glied B hat. — In diesem Falle ist solches S[A] einem neuen Aggregate S[C] gleich, dessen allgemeines Glied C sich von A nur

dadurch unterscheidet, daß wo in A das Aggregat S[B] vorkommt, in C dafür bloß das allgemeine Glied B gesetzt wird; — und dessen beschränkende Gleichungen, die von S[A] und von S[B] zusammengenommen sind.

Beyspiel 1. So ist z. B.

$$S\left[\frac{z^b}{b!}\cdot S\left[\frac{x^b y^c}{b!\ c!}\right]_{b+c=a}\right]_{a+b=3} = S\left[\frac{x^b y^c z^b}{b!\ c!\ b!}\right]_{b+c=a,\ a+b=3} = S\left[\frac{x^b y^c z^b}{b!\ c!\ b!}\right]_{b+c+b=3}.$$

Denn es stellt für jeden stehenden Werth a, welcher 0, 1, 2, oder 3 seyn kann, das Aggregat:

$$S\left[\frac{x^b y^c}{b!\ c!}\right]_{b+c=a} \text{ bald } \frac{x^0 y^0}{0!\ 0!}, \text{ bald } \frac{x^0 y^1}{0!\ 1!}+\frac{x^1 y^0}{1!\ 0!}, \text{ bald}$$

$$\frac{x^0 y^2}{0!\ 2!}+\frac{x^1 y^1}{1!\ 1!}+\frac{x^2 y^0}{2!\ 0!}, \text{ bald } \frac{x^0 y^3}{0!\ 3!}+\frac{x^1 y^2}{1!\ 2!}+\frac{x^2 y^1}{2!\ 1!}+\frac{x^3 y^0}{3!\ 0!}$$

vor, je nachdem $a = 0, 1, 2,$ oder 3 ist. Und das ganze Aggregat zur Linken stellt die Summe aller dieser Summen vor, nachdem vorher die erstere noch mit $\frac{z^3}{3!}$, die andere mit $\frac{z^2}{2!}$, die dritte mit $\frac{z^1}{1!}$ und die vierte mit $\frac{z^0}{0!}$ (d. h. mit 1, d. h. gar nicht) multiplizirt worden ist. — Dagegen gibt das Aggregat zur Rechten, wegen $b+c+b = 3$, für b, c, b die Werthe:

b	0	1	2	3	0	1	2	0	1	0
c	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0
b	0	0	0	0	1	1	1	2	2	3

und diese Auflösungen liefern genau dieselben Glieder.

Beyspiel 2. Gesetzt, man wüßte, was wirklich nach (§. 49. Lehrsatz 1.) zutrifft, daß für jeden zwischen 0 und 4 incl. befindlichen stehenden Werth von a,

$$(x+y)^a = S\left[\frac{a!}{b!\ c!}\ x^b y^c\right]_{b+c=a}$$

wäre, so würde in dem Aggregat

$$S\left[\frac{(x+y)^a}{a!}\right]_{a+b=4},$$

statt $(x+y)^a$ selber das ihm gleiche Aggregat gesetzt werden können,

und der Fall des Paragraphen wäre nun eingetreten. Dann erhielte man aber, nach diesem Lehrsatze, sogleich das einfache Aggregat

$$S\left[\frac{a!}{b!\ c!}\cdot x^b y^c\right]_{a+b=4,\ b+c=a,}$$

oder auch, weil sich hier $a!$ wegdividirt, und statt a gesetzt werden kann $b+c$, dieses andere:

$$S\left[\frac{x^b y^c}{b!\ c!}\right]_{b+c+b=4}$$ als Resultat.

Der Beweis fällt in die Augen, und beruht darauf, daß die beschränkenden Gleichungen von S[B], während die obigen deutschen Buchstaben irgend Werthe haben, immer für ihre deutschen Buchstaben dieselben Werthe liefern, in dem einen Falle wie in dem andern, während die Form der einzelnen Glieder ebenfalls jedesmal links wie rechts dieselbe bleibt.

§. 400. Zusatz.

Sehr wichtig wird dieser Satz, wenn man ihn umkehrt. — Hat man nämlich ein Integral S[C], dessen allgemeines Glied C aus B und noch andern Ausdrücken zusammengesetzt ist, und dessen beschränkende Gleichungen dergestalt abgesondert werden können, daß die eine Parthie a derselben, die in B vorkommenden deutschen Buchstaben gar nicht enthält, während letztere in der andern Parthie b dieser beschränkenden Gleichungen vorkommen; so ist solches Aggregat S[C] allemal einem andern S[A] gleich, welches die Parthie a der beschränkenden Gleichungen, und ein allgemeines Glied A hat, das aus S[B] mit den beschränkenden Gleichungen b, genau so zusammengesetzt ist, wie C selbst aus B zusammengesetzt war.

Beyspiel. Hat man z. B.

$$S\left[\frac{x^a y^b z^c}{a!\ b!\ c!}\right]_{a+b+c=4},$$

so kann man statt $a+b+c=4$ schreiben $a+b=d$, $c+d=4$; und dann statt dieses Aggregats, dieses andere:

$$S\left[\frac{z^c}{c!}\times S\left[\frac{x^a y^b}{a!\ b!}\right]_{a+b=d}\right]_{a+b+c=4}$$

setzen. — Kann man dann vielleicht später sich überzeugen, daß für jeden stehenden Werth von d,

$$S\left[\frac{x^a y^b}{a!\ b!}\right]_{a+b=d} = \frac{(x+y)^d}{d!} \quad \text{ist,}$$

so ist unser gegebenes Aggregat wieder

$$= S\left[\frac{z^c \cdot (x+y)^d}{c!\ d!}\right]_{c+d=4},$$

von welchem man sich wieder überzeugen müßte, daß solches

$$= \frac{(x+y+z)^4}{4!} \quad \text{ist.}$$

Zahlenlehre.

Achtzehntes Kapitel.

Von dem binomischen und polynomischen Lehrsatz für Potenzen und Faktoriellen mit ganzen Exponenten. Von den Binomial-Produkten.

Erste Abtheilung.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

§. 401. Lehrsatz.

Sind a und b ganz willkührliche Zeichen (Ausdrücke), m dagegen Null oder eine absolute ganze Zahl, so ist allemal

$$\text{I.} \qquad (a+b)^m = S\left[\underset{a+b=m}{m_b \cdot a^a b^b}\right] = S\left[\underset{a+b=m}{m_b \cdot a^{m-b} b^b}\right];$$

oder welches dasselbe ist:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots[m-(m-2)]}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)} a b^{m-1} + \frac{m(m-1)\cdots[m-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdots m} b^m;$$

oder, weil $m_n = m_{m-n}$ (§. 351. Nr. 2.):

$$(a+b)^m = a^m + m_1 \cdot a^{m-1} b + m_2 \cdot a^{m-2} b^2 + \cdots$$

$$+ m_n \cdot a^{m-n} b^n + \cdots + m_2 \cdot a^2 b^{m-2} + m_1 \cdot a b^{m-1} + b^m.$$

Beweis. 1) Multiplizirt man $a+b$ mit $a+b$, so erhält man $aa+ab+ba+bb$; multiplizirt man dies nochmals mit $a+b$, so wird jedem Gliede a und hernach auch jedem Gliede b als Faktor vorgesetzt, und alle einzelnen Produkte werden zuletzt zu einander addirt. Verfolgt man daher dieses Multipliziren, bis man m mal $a+b$ genommen hat, so erhellet, daß das Endresultat dieser Multiplikation nichts weiter ist, als die Summe, die man erhält, wenn man die mte Klasse der Variationen mit Wiederholungen aus den beyden Elementen a und b entwickelt, die Verbindungen als Produkte betrachtet, und diese Produkte addirt.

2) Weil aber die mte Klasse der Variationen aus der mten Klasse der Kombinationen erhalten wird, wenn man die Verbindungen der letztern zugleich mit allen ihren Versetzungen nimmt; weil ferner alle Verbindungen, die aus denselben Elementen bestehen, wenn sie als Produkte betrachtet werden, einander gleich sind, folglich die Summe aller dieser erhalten wird, wenn man die eine davon mit der Anzahl aller, d. h. mit der Versetzungszahl multiplizirt; — so erhält man eine gleiche Summe, wenn man die mte Klasse der Kombinationen mit Wiederholungen aus den beyden Elementen a und b entwickelt, die Verbindungen als Produkte betrachtet, ihnen ihre Versetzungszahl als Faktor vorsetzt, und dann diese Produkte zu einander addirt.

3) Nun stellt aber

$$\underset{\alpha+\beta=m}{a^{\alpha}\cdot b^{\beta}}$$

eine jede Verbindung dieser erwähnten mten Klasse der Kombinationen vor (§. 380.). Die Versetzungszahl dieser Verbindung ist dagegen nach (§. 367. II.)

$$= \frac{m!}{\alpha!\,\beta!}, \text{ oder } = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!}$$

$$= (\alpha+\beta)_{\beta} \qquad = m_{\beta} \qquad \text{(§. 351.).}$$

Folglich ist das Produkt einer jeden Verbindung in ihre Versetzungs-Zahl $= m_{\beta}\cdot a^{\alpha}\cdot b^{\beta}$,

wo $\alpha+\beta = m$ ist.

4) Und da endlich das Aggregat:

$$\underset{a+b=m}{S[m_b\cdot a^a b^b]}$$

die Summe aller dieser Produkte vorstellt, so ist nach (2.) dieses Aggregat $= (a+b)^m$.

§. 402. Zusatz.

Weil dieser Satz so höchst wichtig ist, so mag er hier noch einmal in seinen verschiedenen Formen stehen, deren jede in besondern Fällen der Anwendung, ihre eigenthümliche Bequemlichkeit gewährt. Es ist nämlich, wenn m entweder 0 oder eine ganze positive Zahl ist:

$$(a+b)^m$$

$$= S\left[\underset{a+b=m}{m_b \cdot a^a b^b}\right] = S\left[\underset{a+b=m}{m_b \cdot a^{m-b} b^b}\right] = S\left[m_b \cdot a^{m-b} b^b\right] *)$$

$$= S\left[\underset{a+b=m}{\frac{m^{\underline{b}}}{b!} a^a b^b}\right] = S\left[\underset{a+b=m}{\frac{m^{\underline{a}}}{a!} a^a b^b}\right] = S\left[\frac{m^{\underline{b}}}{b!} a^{m-b} b^b\right]$$

$$= S\left[\underset{a+b=m}{\frac{m!}{a!\ b!} a^a b^b}\right] = S\left[\underset{a+b=m}{\frac{(a+b)!}{a!\ b!} \cdot a^a b^b}\right] = m! S\left[\underset{a+b=m}{\frac{a^a\ b^b}{a!\ b!}}\right]$$

$$= S\left[m^{\underline{b}} \frac{a^{m-b} b^b}{b!}\right] = \text{etc. etc. etc.}$$

Und man kann dem Anfänger nicht dringend genug anrathen, alle diese Formen, unter denen immer derselbe Satz wieder erkannt werden kann, sich recht tief einzuprägen, weil fast alle spätern Untersuchungen auf diesen Satz zurückgeführt werden, und auf ihn sich gründen.

Auch mag hier noch eine Form stehen, wie sie in den Elementen zuweilen brauchbar gefunden wird. Dividirt man nämlich das $n+1$te Glied (wo $b = n$ genommen ist), nämlich

---

*) Es scheint zwar, daß indem hier die beschränkende Gleichung $a+b = m$ weggelassen wird, dem b dadurch alle Werthe zukommen können, welche größer wie m sind, und daß der Ausdruck (das Aggregat) jetzt eine Summe von unendlich vielen Gliedern vorstelle, statt daß es kurz vorher nur eine Summe von $m+1$ Gliedern repräsentirte. Und dem ist in der That so. Allein wenn man bedenkt, daß nach (§. 351. Nr. 4.) m_b allemal Null wird, so oft man $b > m$ nimmt, so erkennt man sogleich, daß diese letztern, nach dem $m+1$ten, folgende Glieder alle $= 0$ sind, daher eben so gut hinzugedacht, als auch wiederum weggelassen werden können.

$m_n a^{m-n} b^n$, durch das nte Glied, nämlich durch $m_{n-1} a^{m-n+1} b^{n-1}$, so erhält man, weil $\frac{m_n}{m_{n-1}} = \frac{m^{n|-1}}{n!} : \frac{m^{n-1|-1}}{(n-1)!} = \frac{m-n+1}{n}$ ist, zum Quotienten $\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{b}{a}$. Umgekehrt erhält man also das $n+1$te Glied aus dem nächstvorhergehenden nten Gliede, wenn man letzteres mit $\frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{b}{a}$ multiplizirt. Wird daher das erste Glied a^m der Summe:

$$a^m + m \cdot a^{m-1} b + m_2 \cdot a^{m-2} b^2 + \cdots\cdots + b^m,$$

welche $= (a+b)^m$ ist, durch P_0, die übrigen Glieder aber der Reihe nach durch $P_1, P_2, P_3, \cdots P_{n-1}, P_n, \cdots$ bezeichnet, so finden sich diese einzelnen Glieder so auseinander:

$$\begin{aligned}
P_0 &= a^m \quad , \\
P_1 &= m \cdot \frac{b}{a} \cdot P_0 \quad , \\
P_2 &= \frac{m-1}{2} \cdot \frac{b}{a} \cdot P_1 \quad , \\
P_3 &= \frac{m-2}{3} \cdot \frac{b}{a} \cdot P_2 \quad , \\
P_4 &= \frac{m-3}{4} \cdot \frac{b}{a} \cdot P_3 \quad , \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
P_n &= \frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{b}{a} \cdot P_{n-1},
\end{aligned}$$

u. s. w. f.

Endlich machen wir noch auf die letzte der obigen Formen aufmerksam, nämlich auf die Form:

$$(a+b)^m = S\left[m^{b|-1} a^{m-b} \cdot \frac{b^b}{b!}\right],$$

welche auf gewöhnliche Weise so geschrieben werden muß:

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}\cdot b + m(m-1)a^{m-2}\cdot\frac{b^2}{2!}$$
$$+ m(m-1)(m-2)a^{m-3}\cdot\frac{b^3}{3!} + m(m-1)(m-2)(m-3)a^{m-4}\cdot\frac{b^4}{4!}$$
$$+ m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)a^{m-5}\cdot\frac{b^5}{5!} + \ldots\ldots$$

Denn man sieht hier, wie die einzelnen Glieder der Summe zur Rechten nach ganzen Potenzen von b fortlaufen, und wie von den Koeffizienten;

a^m, ma^{m-1}, $m(m-1)a^{m-2}$, $m(m-1)(m-2)a^{m-3}$, etc. etc. etc.

dieser Potenzen: $\frac{b^0}{0!}$, $\frac{b^1}{1!}$, $\frac{b^2}{2!}$, $\frac{b^3}{3!}$, etc. etc. etc., jeder aus seinem nächstvorhergehenden gefunden wird, dadurch daß man ihn mit seinem Exponenten von a multiplizirt, nachgehends aber den Exponenten der Potenz von a, um eine Einheit vermindert. — Ein Gesetz, was wir später für die Summen solcher Potenzen, etwa von der Form:

$$A(a+b)^m + B(a+b)^n + C(a+b)^p + \text{ etc. etc.},$$

in Anspruch nehmen werden, wenn es darauf ankommt, für das ganze Resultat der Umwandlung in eine nach Potenzen von b fortlaufende Summe, bequeme mechanische Vorschriften zu erhalten.

§. 403. Zusatz.

Setzt man aber $-b$ statt b, so erhält man noch:

$$(a-b)^m = S\left[(-1)^b\cdot m_b\cdot a^{m-b}b^b\right] = S\left[(-1)^b\cdot\frac{m!}{a!\ b!}\cdot a^a b^b\right]_{a+b=m}$$
$$= S\left[(-1)^b(a+b)_b\cdot a^a b^b\right]_{a+b=m} = m!\cdot S\left[(-1)^b\cdot\frac{a^a\ b^b}{a!\ b!}\right]_{a+b=m}$$
$$= S\left[(-1)^b\frac{(a+b)!}{a!\ b!}a^a b^b\right]_{a+b=m} = S\left[(-1)^b\cdot\frac{m^{\underline{b}|-1}}{b!}a^a b^b\right]_{a+b=m}$$
$$= S\left[(-1)^b\frac{m^{\underline{b}|-1}}{b!}a^{m-b}\cdot b^b\right] = S\left[(-1)^b m^{\underline{b}|-1}a^{m-b}\cdot\frac{b^b}{b!}\right];$$

d. h.

$$(a-b)^m = a^m - m\cdot a^{m-1}b + m_2\cdot a^{m-2}b^2 - m_3\cdot a^{m-3}b^3 + m_4\cdot a^{m-4}b^4 - \text{etc. etc. etc.}$$

wo $m_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$, $m_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$,

$m_4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$, u. s. w. f. ist.

Anmerkung 1. Der Satz des (§. 401.) heißt gewöhnlich der binomische Lehrsatz. Man hätte ihn auch dadurch erweisen können, daß man seine Gültigkeit nach und nach für alle auf einander folgende ganzen positiven Zahlen erwiesen, und zu dem Ende gezeigt hätte, wie er für $m = h+1$ gelten müsse, so oft er für $m = h$ gilt, während die ersten Versuche lehren, daß er für $m = 2, 3,$ ꝛc. ꝛc. zutrifft. — Es muß aber die Formel für $m = h$ nochmal mit $a+b$ multiplizirt, und dann der Satz (§. 352. Nr. 2.) angewandt werden. Dieser Beweis wird dann ebenfalls sehr einfach.

Anmerkung 2. Setzt man in dem binomischen Lehrsatze statt m, nach und nach 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ꝛc., so erhält man, besonders leicht, sobald die Tabelle der (pag. 19.) zu Hilfe genommen wird:

1) $(a\pm b)^1 = a\pm b$;
2) $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
3) $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;
4) $(a\pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$;
5) $(a\pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$;
6) $(a\pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$;
7) $(a\pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm 6^7$;
8) $(a\pm b)^8 = a^8 \pm 8a^7b + 28a^6b^2 \pm 56a^5b^3 + 70a^4b^4 \pm 56a^3b^5 + 28a^2b^6 \pm 8ab^7 + b^8$;
9) $(a\pm b)^9 = a^9 \pm 9a^8b + 36a^7b^2 \pm 84a^6b^3 + 126a^5b^4 \pm 126a^4b^5 + 84a^4b^6 \pm 36a^2b^7 + 9ab^8 \pm b^9$;

u. s. w. f.

Anmerkung 3. Setzt man in den (§§. 401. und 403.) 1 statt a, und c statt b, so erhält man noch die Formen:

$$(1+c)^m = S\left[\ m_a\cdot c^a\ \right] = S\left[\ \frac{m^{a|-1}}{a!}\ c^a\ \right] = \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

$$\text{und } (1-c)^m = S\left[(-1)^a\cdot m_a\cdot c^a\right] = S\left[(-1)^a\cdot\frac{m^{a|-1}}{a!}\ c^a\right] = \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

Umgekehrt kann man aber auch aus diesen speziellen Formeln die

frühern wiederum ableiten, wenn man $\frac{b}{a}$ statt c setzt, und dann noch links und rechts mit a^m multiplizirt.

§. 404. Lehrsatz.

Ist m Null oder eine absolute ganze Zahl, so hat man:

$$\text{II.}\quad (a+b+c)^m = S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!}\cdot a^a\cdot b^b\cdot c^c\right]_{a+b+c=m}$$

$$= S\left[\frac{m^{b+c|-1}}{b!\,c!}a^{m-b-c}b^b c^c\right].$$

Beweis ist ganz derselbe, wie der (§. 401.) geführte, der also nur mit sehr geringen Modifikationen hier wiederholt werden darf.

Beyspiel. Es sey $(a+b+c)^4$ zu entwickeln; so hat man:

$$a+b+c = 4,$$

also die Werthe von a, b, c,

a	4	3	3	2	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0
b	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
c	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4;

und deshalb liefert die Formel (II.) 15 Glieder, nämlich:

$$(a+b+c)^4 = a^4+4a^3b+4a^3c+6a^2b^2+12a^2bc+6a^2c^2+4ab^3$$
$$+12ab^2c+12abc^2+4ac^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4.$$

§. 405. Zusatz.

Man kann aber diesen Satz auch sehr leicht unmittelbar aus dem binomischen Lehrsatz (§. 401.) selbst ableiten. Es ist nämlich:

$$(a+b+c)^m = [(a+(b+c)]^m = S\left[\frac{(a+e)!}{a!\,e!}\cdot a^a\cdot(b+c)^e\right]_{a+e=m}.$$

Aber es ist auch:

$$(b+c)^e = \left[\frac{e!}{b!\,c!}\cdot b^b\cdot c^c\right]_{b+c=e},$$

wo b und c als durchlaufend anzusehen sind; folglich nach (§. 399.):

$$(a+b+c)^m = S\left[\frac{(a+e)!\ e!}{a!\ e!\ b!\ c!} \cdot a^a \cdot b^b \cdot c^c\right]_{a+e=m,\ b+c=e}$$

$$= S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!} \cdot a^a \cdot b^b \cdot c^c\right]_{a+b+c=m} \text{ (§. 385.).}$$

§. 406. Zusatz.

Ist ferner m eine absolute ganze Zahl, so ist noch:

III. $$(a+b+c+d)^m = S\left[\frac{m!}{a!\ b!\ c!\ d!} \cdot a^a \cdot b^b \cdot c^c \cdot d^d\right]_{a+b+c+d=m};$$

und allgemein:

IV. $$(a+b+c+d+\cdots)^m = S\left[\frac{m!}{a!\ b!\ c!\ d!\cdots} \cdot a^a \cdot b^b \cdot c^c \cdot d^d \cdots\right]_{a+b+c+d+\cdots=m};$$

welches sowohl nach Art des (§. 341.) geführten Beweises, als auch nach (§. 405.) abgeleitet werden kann.

Auch könnten (II. III. und IV.) nach (Anmerk. §. 403.) bewiesen werden.

Anmerkung. Der Satz (II.) heißt gewöhnlich der trinomische, (III.) dagegen der quatrinomische; so wie der allgemeine (IV.) der polynomische Lehrsatz genannt wird.

§. 407. Aufgabe.

Weil die Faktoriellen in Potenzen übergehen, so oft die Differenz $= 0$ gesetzt wird, so entsteht die Frage, ob nicht, so wie eben für die Potenz $(a+b)^m$, so auch für die Faktorielle $(a+b)^{m|r}$ eine ähnliche Entwickelung (Umformung) in eine Summe von, nach ähnlichem Gesetze fortlaufenden Gliedern statt finden werde.

Auflösung. Es ist nach (§. 344. und §. 341.):

$$a^{1|r} = a,\ b^{1|r} = b \text{ und } a^{k|r} \cdot (a+kr) = a^{k+1|r};\quad \text{also:}$$

1) $$(a+b)^{1|r} = a+b.$$

Multiplizirt man hier mit $a+b+r$, links und rechts, und zwar rechts erstlich a, dann b, so kann man $a+b+r$ bald so

trennen, daß $(a+r)+b$, bald aber so trennen, daß $a+(b+r)$ daraus wird, und man erhält dann:

$$(a+b)^{2|r} = a(a+r)+2ab+b(b+r),$$

d. h. 2) $(a+b)^{2|r} = a^{2|r} +2\cdot a^{1|r}b^{1|r}+b^{2|r}$.

Multiplizirt man hier wieder links und rechts mit $a+b+2r$, so aber, daß man bey dem Multipliziren den Multiplikator $a+b+2r$, bald in $(a+2r)+b$, bald in $(a+r)+(b+r)$, zuletzt in $a+(b+2r)$ umwandelt, je nachdem rechts das erste, das zweyte oder das dritte Glied multiplizirt wird, so ergibt sich augenblicklich, wenn man zuletzt die gleichnamigen Glieder addirt:

3) $(a+b)^{3|r} = a^{3|r}+3\cdot a^{2|r}b^{1|r}+3\cdot a^{1|r}b^{2|r}+b^{3|r}$.

Multiplizirt man hier nochmals links und rechts mit $a+b+3r$, bald als $(a+3r)+b$, bald als $(a+2r)+(b+r)$, bald als $(a+r)+(b+2r)$, bald als $a+(b+3r)$ geschrieben, je nachdem rechts das erste, zweyte, dritte oder vierte Glied multiplizirt wird, so erhält man sogleich, wie vorhin:

4) $(a+b)^{4|r} = a^{4|r}+4\cdot a^{3|r}b^{1|r}+6\cdot a^{2|r}b^{2|r}+4\cdot a^{1|r}b^{3|r}+b^{4|r}$.

Man könnte so fortfahren, links und rechts mit $a+b+4r$, $a+b+5r$, u. s. w. f. zu multipliziren, und würde, ähnliche Zerlegungen des Multiplikators vornehmend, für $(a+b)^{5|r}$, $(a+b)^{6|r}$, etc. etc. eine Summe von Gliedern erhalten, welche, so wie die vorstehenden vier ersten, in den Koeffizienten, wie in den Exponenten, genau mit denen der Potenz-Umwandlungen für $(a+b)^1$, $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, etc. etc. übereinstimmen.

Um nun dieses Gesetz allgemein zu bestätigen, darf man nur nachweisen, daß wenn solches für irgend einen Exponenten h gilt, dasselbe für den nächstfolgenden Exponenten $h+1$ jedesmal auch gelten müsse. — Gesetzt also, es treffe zu, daß (nicht für jeden ganzen Werth von h, sondern) nur für einen einzigen ganzen Werth von h,

5) $(a+b)^{h|r} = S[h_b\cdot a^{h-b|r}\cdot b^{b|r}]$

gefunden worden sey (wie solches z. B. wirklich in (Nr. 4.)

gefunden ist, für $h = 4$), so multiplizire man links und rechts mit $a+b+hr$, diesen Faktor jedoch für jedes einzelne zu multiplizirende Glied, anders, und namentlich für das durch $h_b \cdot a^{h-b|r} b^{b|r}$ vorgestellte und zu multiplizirende Glied, in $[a+(h-b)r]+(b+br)$ zerlegend. Man erhält dann, nach (§. 395.):

$$(a+b)^{h+1|r} = S\left[h_b \cdot a^{h+1-b|r} \cdot b^{b|r} + h_b \cdot a^{h-b|r} \cdot b^{b+1|r}\right],$$

wo jedoch b ein durchlaufender Buchstabe ist, und nach und nach 0 und jede ganze Zahl vorstellt. Weil aber das allgemeine Glied des Aggregats zur Rechten, eine Summe ist, so ist nach (§. 393.) noch:

$$(a+b)^{h+1|r} = S\left[h_b \cdot a^{h+1-b|r} \cdot b^{b|r}\right] + S\left[h_b \cdot a^{h-b|r} \cdot b^{b+1|r}\right].$$

Sondert man hier nach (§. 389.) von dem ersten Aggregat zur Rechten das erste Glied ab, dadurch, daß man $b = 0$, und dann $b+1$ statt b setzt, so hat man weiter:

$$(a+b)^{h+1|r} = a^{h+1|r} + S\left[h_{b+1} \cdot a^{h-b|r} \cdot b^{b+1|r}\right] + S\left[h_b \cdot a^{h-b|r} \cdot b^{b+1|r}\right].$$

Und weil man jetzt die beyden Aggregate zur Rechten bequem addiren kann, weil ferner auch, nach (§. 352. Nr. 2.),

$$h_{b+1} + h_b = (h+1)_{b+1}$$ ist,

so folgt noch:

$$(a+b)^{h+1|r} = a^{h+1|r} + S\left[(h+1)_{b+1} \cdot a^{h-b|r} \cdot b^{b+1|r}\right],$$

welches Resultat zur Rechten, wenn (§. 390.) angewandt, also $b-1$ statt b, und in dem neuen Aggregat $b = 0$ gesetzt wird, in

6) $$(a+b)^{h+1|r} = S\left[(h+1)_b \cdot a^{h+1-b|r} \cdot b^{b|r}\right]$$

übergeht *).

Weil nun dieses Resultat kein anderes ist, als was aus

---

*) Um die nöthige Fertigkeit in der Behandlung der kombinatorischen Aggregate sich zu verschaffen, thut man wohl (besonders bey dem Unterricht), jede solche Arbeit zu wiederholen, dabey aber die Aggregate wegzulassen und ihre Werthe dafür zu setzen.

$$\odot) \quad (a+b)^{m|r} = S\left[m_b \cdot a^{m-b|r} \cdot b^{b|r}\right]$$

hervorgeht, wenn $h+1$ statt m gesetzt wird, so muß die Formel ($\odot$) gelten für alle ganzen Zahlen, die statt m gesetzt werden mögen, weil sie gilt (nach 1 — 4.) wenn $m = 1, = 2, = 3, = 4$, gesetzt wird, und weil bewiesen ist, daß sie allemal auch für die nächstfolgende ganze Zahl $h+1$, statt m gesetzt, gelten muß, so oft sie für eine gewisse Zahl h statt m, gilt *).

§. 408. Zusatz.

Es ist also allemal, wenn m Null oder eine positive ganze Zahl ist:

$$1.\ (a\pm b)^{m|r} = S\left[m_b \cdot a^{m-b|r}(\pm b)^{b|r}\right] = S\left[m_b \cdot a^{m-b|r}(\pm b)^{b|r}\right]$$
$$a+b=m$$

$$= S\left[(a+b)_b \cdot a^{a|r}(\pm b)^{b|r}\right] = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!} a^{a|r}(\pm b)^{b|r}\right].$$
$$a+b=m \qquad\qquad a+b=m$$

Und so wie in dieser Gleichung, $r = 0$ gesetzt wird, so hat man wieder den binomischen Lehrsatz für Potenzen, in seinen verschiedenen Formen.

---

*) Man würde jedoch sehr im Irrthum seyn, wenn man mit Kramp, Crelle und so vielen Anderen annehmen wollte, daß dieser binomische Lehrsatz für Faktoriellen, auch dann noch gelten müsse, wenn m eine gebrochene Zahl, oder gar wenn m allgemein ist. Im Gegentheil findet man, daß wenn m eine ganze oder gebrochene Zahl ist, und wenn im letztern Falle die Reihe konvergirt, dann

$$S\left[m_b \cdot a^{m-b|1} \cdot b^{b|1}\right] = \frac{(a+b)^{m|1} \cdot \mathrm{Sin}\, a\pi \cdot \mathrm{Sin}(a+b+m)\pi}{\mathrm{Sin}(a+m)\pi \cdot \mathrm{Sin}(a+b)\pi}$$

seyn müsse, wo man nun sogleich sieht, daß, wenn m eine positive ganze Zahl ist, der Ausdruck zur Rechten sich auf $(a+b)^{m|1}$ reduzirt, dagegen im Allgemeinen ein ganz anderer und namentlich nicht $= (a+b)^{m|1}$ wird, wenn m eine gebrochene Zahl ist. —

Dieses Alles soll näher erörtert werden in demjenigen Bande dieses Systems der Mathematik, der für alle diese feineren Untersuchungen bestimmt ist.

§. 409. Zusatz.

Hieraus folgt noch, wenn m Null oder eine absolute ganze Zahl ist,

$$\text{II.}\quad (a+b+c)^{m|r} = S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!}\cdot a^{a|r}\cdot b^{b|r}\cdot c^{c|r}\right]_{a+b+c=m};$$

$$\text{III.}\quad (a+b+c+d)^{m|r} = S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!\,d!}\cdot a^{a|r}\cdot b^{b|r}\cdot c^{c|r}\cdot d^{d|r}\right]_{a+b+c+d=m};$$

endlich allgemein:

$$\text{IV.}\quad (a+b+c+d+\cdots)^{m|r} = S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!\,d!\cdots}a^{a|r}\cdot b^{b|r}\cdot c^{c|r}\cdot d^{d|r}\cdots\right]_{a+b+c+d+\cdots=m.}$$

welche Formeln aus (§. 408. I.) genau so abgeleitet werden, wie (§. 406.) für ähnliche Sätze gezeigt ist.

Anmerkung. Die Formeln (I. II. III. und IV.) heißen beziehlich: der binomische, der trinomische, der quatrinomische, und allgemein der polynomische Lehrsatz für ganze Faktoriellen.

§. 410. Zusatz.

Setzt man hier $r = -1$, und dividirt man dabey durch $m!$ nach (§. 399. Nr. 2.), so erhält man:

$$1)\quad \frac{(a+b)^{m|-1}}{m!} = S\left[\frac{a^{a|-1}\cdot b^{b|-1}}{a!\;b!}\right]_{a+b=m} = S\left[\frac{a^{a|-1}}{a!}\cdot\frac{b^{b|-1}}{b!}\right]_{a+b=m};$$

$$2)\quad \frac{(a+b+c)^{m|-1}}{m!} = S\left[\frac{a^{a|-1}}{a!}\cdot\frac{b^{b|-1}}{b!}\cdot\frac{c^{c|-1}}{c!}\right]_{a+b+c=m};$$

$$3)\quad \frac{(a+b+c+d)^{m|-1}}{m!} = S\left[\frac{a^{a|-1}}{a!}\cdot\frac{b^{b|-1}}{b!}\cdot\frac{c^{c|-1}}{c!}\cdot\frac{d^{d|-1}}{d!}\right]_{a+b+c+d=m};$$

$$4)\quad \frac{(a+b+c+d+\cdots)^{m|-1}}{m!} = S\left[\frac{a^{a|-1}}{a!}\cdot\frac{b^{b|-1}}{b!}\cdot\frac{c^{c|-1}}{c!}\cdot\frac{d^{d|-1}}{d!}\cdots\right]_{a+b+c+d+\cdots=m}.$$

§. 411. Zusatz.

Daher auch nach (§. 350.):

I. $(a+b)_m = S\left[\begin{smallmatrix} a_a \cdot b_b \\ a+b=m \end{smallmatrix}\right];$

oder:

$$(a+b)_m = a_m + a_{m-1} \cdot b + a_{m-2} \cdot b_2 + a_{m-3} \cdot b_3 + \cdots + a_3 b_{m-3} + a_2 b_{m-2} + a b_{m-1} + b_m.$$

II. $(a+b+c)_m = S\left[\begin{smallmatrix} a_a \cdot b_b \cdot c_c \\ a+b+c=m \end{smallmatrix}\right];$

III. $(a+b+c+d)_m = S\left[\begin{smallmatrix} a_a \cdot b_b \cdot c_c \cdot d_b \\ a+b+c+b=m \end{smallmatrix}\right];$

und allgemein:

IV. $(a+b+c+d+\cdots)_m = S\left[\begin{smallmatrix} a_a \cdot b_b \cdot c_c \cdot d_b \cdots \\ a+b+c+b+\cdots=m \end{smallmatrix}\right];$

Alles unter der Voraussetzung, daß m Null oder eine absolute ganze Zahl, a, b, c, d, etc. etc. aber ganz beliebige Ausdrücke sind.

§. 412. Zusatz.

Setzt man in (§. 411. I.) $-a$ statt b, so hat man nach (§. 352. Nr. 6.), wenn m nicht Null, sondern eine absolute ganze Zahl ist:

$$0 = S\left[\begin{smallmatrix} a_a \cdot (-a)_b \\ a+b=m \end{smallmatrix}\right];$$

oder:

$$0 = a_m + a_{m-1}(-a) + a_{m-2} \cdot (-a)_2 + a_{m-3} \cdot (-a)_3 + \cdots + a_3 \cdot (-a)_{m-3} + a_2 \cdot (-a)_{m-2} + a \cdot (-a)_{m-1} + (-a)_m,$$

wo a einen ganz allgemeinen Ausdruck vorstellt, welcher eben so gut reel, als auch imaginär seyn kann, wenn nur m eine ganze positive Zahl und nicht Null ist.

Zweyte Abtheilung.

Von den Binomial-Produkten.

---

§. 413. Aufgabe.

Man soll die μ Faktoren:

$$x+a_1,\quad x+a_2,\quad x+a_3,\quad x+a_4,\quad \cdots\cdots x+a_\mu$$

mit einander multipliziren.

Auflösung. Man multiplizire zuerst $x+a_1$ mit $x+a_2$, so erhält man:

1) $(x+a_1)(x+a_2) = x^2+(a_1+a_2)x+a_1\cdot a_2.$

Multiplizirt man diese Gleichung wieder mit $x+a_3$, so ergibt sich sogleich:

2) $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2$
$+(a_1\cdot a_2+a_1\cdot a_3+a_2\cdot a_3)x+a_1\cdot a_2\cdot a_3.$

Und multiplizirt man hier wieder mit $x+a_4$, so ergibt sich noch:

3) $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4) = x^4+(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3$
$+(a_1\cdot a_2+a_1\cdot a_3+a_1\cdot a_4+a_2\cdot a_3+a_2\cdot a_4+a_3\cdot a_4)x^2$
$+(a_1\cdot a_2\cdot a_3+a_1\cdot a_2\cdot a_4+a_1\cdot a_3\cdot a_4+a_2\cdot a_3.a_4)x+a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4.$

Betrachtet man nun diese Resultate zur Rechten, so findet man, daß die einzelnen Koeffizienten von x, nichts anders als die einzelnen Kombinations-Klassen sind, ohne Wiederholungen, aus den Elementen a_1 und a_2, oder a_1, a_2 und a_3, oder a_1, a_2, a_3 und a_4 entwickelt; und man kann also muthmaßen, daß das gesuchte Produkt:

$$= S\left[\overset{a}{C}_\mu \cdot x^{\mu-a}\right] \qquad \cdots\cdots (A)$$

seyn werde, unter $\overset{a}{C}_\mu$ die ate Klasse der Kombinationen verstanden, ohne Wiederholungen, aus den μ Elementen $a_1, a_2, \cdots a_\mu$,

entwickelt, die Verbindungen als Produkte angesehen und zu einander addirt; und unter $\overset{0}{C}_\mu$ die 1 verstanden.

Um nun diese Vermuthung zur Gewißheit zu erheben, zeige man nur wiederum, daß sich dieses Gesetz für $h+1$ statt μ bestätigt, so oft solches für h statt μ zutrifft, unter h nicht jeden, sondern einen einzigen Werth von μ verstanden.

Gesetzt also, es träfe zu, daß für einen einzigen Werth von h, wirklich sey:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots(x+a_h) = S\left[\overset{a}{C}_h \cdot x^{h-a}\right]_{a+b=h},$$

die Kombinations-Klassen aus den h Elementen $a_1, a_2, \cdots a_h$ entwickelt, so multiplizire man diese Gleichung abermals mit $x+a_{h+1}$, und man erhält:

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots\cdots(x+a_{h+1}) = S\left[\overset{a}{C}_h \cdot x^{h+1-a} + a_{h+1}\cdot\overset{a}{C}_h\cdot x^{h-a}\right]_{a+b=h}$$

$$= S\left[\overset{a}{C}_h \cdot x^{h+1-a}\right]_{a+b=h} + S\left[a_{h+1}\cdot\overset{a}{C}_h\cdot x^{h-a}\right]_{a+b=h.}$$

Setzt man aber in dem ersten Aggregat, nach (§. 389.), zuerst $a = 0$, dann $a+1$ statt a, und in dem letzteren $b = 0$ und $b+1$ statt b, und vereinigt man die entstehenden Aggregate sogleich nach (§. 393.), so findet sich dasselbe vorstehende Produkt aus den $h+1$ Faktoren,

$$= x^{h+1} + S\left[\left(\overset{a+1}{C}_h + a_{h+1}\cdot\overset{a}{C}_h\right)\cdot x^{h-a}\right]_{a+b=h-1} + \overset{h}{C}_h \cdot a_{h+1} \quad \cdots(B).$$

Uebersieht man aber die Art und Weise, wie (§. 365. und §. 366.) die Entwicklung der Kombinations-Klassen statt gefunden hat, so erhellet leicht, daß die $(a+1)$te Klasse dieser Kombinationen, aus den $h+1$ Elementen:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots a_h,\ a_{h+1}$$

erhalten wird, wenn man dieselbe $(a+1)$te Klasse zuerst aus den h Elementen $a_1, a_2, \cdots a_h$, entwickelt, (dies giebt alle die Verbindungen, welche das letzte Element a_{h+1} nicht enthalten); dann aber allen Verbindungen der vorhergehenden ate Klasse, aus denselben h Elementen $a_1, a_2, \cdots a_h$ entwickelt, noch das letzte

Element a_{h+1} hinzufügt (dies gibt alle die Verbindungen der gesuchten $(a+1)$ten Klasse, welche auch das letzte, $(h+1)$te Element a_{h+1} enthalten); also daß ist

$$\overset{a+1}{C}_h + \overset{a}{C}_h \cdot a_{h+1} = \overset{a+1}{C}_{h+1}.$$

Und bemerkt man zu gleicher Zeit, daß $\overset{h}{C}_h$ nichts weiter ist, als das Produkt aller h Elemente: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_h$, so fällt in die Augen, daß $\overset{h}{C}_h \cdot a_{h+1}$ nichts weiter seyn kann, als das Produkt aller $h+1$ Elemente: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_h \cdot a_{h+1}$, welches auch unter $\overset{h+1}{C}_{h+1}$ verstanden wird; so verwandelt sich obiges Produkt ...(B) in:

$$x^{h+1} + S\left[\overset{a+1}{C}_{h+1} \cdot x^{h-a}\right] + \overset{h+1}{C}_{h+1},$$
$$a+b = h-1$$

welches Resultat sich sogleich wieder in:

$$S\left[\overset{a}{C}_{h+1} \cdot x^{h+1-a}\right]$$
$$a+b = h+1$$

umwandelt, wenn man zweymal hinter einander den (§. 390.) auf die Art in Anwendung bringt, wie solches (§. 394.) in einem ähnlichen Falle zu sehen ist; und dieses Resultat geht offenbar aus (A.) hervor, wenn $h+1$ statt μ gesetzt wird.

Also findet sich für alle ganzen Zahlen, welche nach und nach statt μ gesetzt werden, das Produkt von den μ Faktoren:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots(x+a_\mu) = S\left[\overset{a}{C}_\mu \cdot x^{\mu-a}\right],$$
$$a+b = \mu$$

unter $\overset{0}{C}_\mu$ die Einheit 1, und unter $\overset{a}{C}_\mu$ die $a$te Klasse der Kombinationen verstanden, ohne Wiederholungen aus den μ Elementen: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\mu$ entwickelt, die Verbindungen als Produkte genommen, und alle zu einander addirt.

Beyspiele. So findet sich augenblicklich:

$$(x-1)(x+2)(x-4)(x+1) = x^4 + \overset{1}{C} \cdot x^3 + \overset{2}{C} \cdot x^2 + \overset{3}{C} \cdot x + \overset{4}{C}$$

die Kombinations-Klassen aus den Elementen: $-1, +2, -4$ und $+1$ entwickelt; so daß man hat:

$C^1 = -1+2-4+1 = -2$,
$C^2 = (-1)2+(-1)(-4)+(-1)(+1)+2(-4)+2(+1)+(-4)1 = -7$,
$C^3 = (-1)2(-4)+(-1)2\cdot1+(-1)(-4)1+2(-4)1 = +2$;
und
$C^4 = (-1)2(-4)1 = +8$,
also daß obiges Produkt $= x^4-2x^3-7x^2+2x+8$ wird.

Auf dieselbe Weise findet sich, die Kombinations-Klassen entwickelnd:

$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3) = x^3-6x^2+11x-6$,
$(x+7)\cdot(x-5)\cdot(x-1) = x^3+x^2-37x+35$,
$(x-6)\cdot(x+4)\cdot(x+2) = x^3-28x-48$,
$(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x+1) = x^4-10x^2+9$.

§. 414. Zusatz.

Auf dieselbe Weise findet sich das Produkt der μ Faktoren:

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_\mu) = S\left[(-1)^a \cdot \overset{a}{C}_\mu \cdot x^{\mu-a}\right]_{a+b=\mu},$$

wo die rechts vorgestellten Glieder mit dem (+)- und (—)-Zeichen abwechseln, so wie nach und nach für a, 0 und gerade Zahlen, oder ungerade Zahlen, zu stehen kommen, weil im ersten Fall $+1$, im andern -1, statt $(-1)^a$ gesetzt wird.

§. 415. Zusatz.

Werden die Elemente $a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots a_\mu$ alle einander gleich, und alle $= a$, so erhält man aus (§§. 413. und 414.) sogleich wieder $(x \pm a)^\mu$, d. h. genau wieder den binomischen Lehrsatz für Potenzen.

§. 416. Zusatz.

Denkt man sich aber unter den Elementen:

$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots a_\mu$,
beziehlich $b, b+r, b+2r, b+3r, \cdots\cdots b+(\mu-1)r$,
vorgestellt, so ist das Produkt der μ Faktoren im (§. 413.) nichts anders als die Faktorielle:

$$(x+b)^{\mu|r},$$

so daß man noch hat:

$$(x+b)^{\mu|r} = S\left[\overset{a}{C}_{\mu} \cdot x^{\mu-a}\right]_{a+b=\mu}$$

unter $\overset{0}{C}_{\mu}$ die 1, und unter $\overset{a}{C}_{\mu}$ die $a$te Klasse der Kombinationen verstanden, aus den μ Elementen: b, $b+r$, $b+2r$, ... $b+(\mu-1)r$, entwickelt, ohne Wiederholungen, und die einzelnen Verbindungen als Produkte angesehen, welche alle zu einander addirt werden müssen; und wo μ eine positive ganze Zahl ist.

Beyspiele. So findet sich:

$$(x+b)^{4|r} = x^4+(4b+6r)\cdot x^3+(6b^2+18br+11r^2)\cdot x^2 +(4b^3+18b^2r+22br^2+6r^3)\cdot x +(b^4+6b^3r+11b^2r^2+6br^3);$$

und

$$(x-b)^{4|r} = x^4-(4b-6r)\cdot x^3+(6b^2-18br+11r^2)\cdot x^2 -(4b^3-18b^2r+22br^2-6r^3)\cdot x +(b^4-6b^3r+11b^2r^2-6br^3);$$

u. s. w. f.

Zahlenlehre.

Neunzehntes Kapitel.

Von den ganzen Funktionen eines einzigen veränderlichen Ausdrucks x.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Eigenschaften dieser ganzen Funktionen von x.

§. 417. Erklärung.

Jeder Ausdruck von der Form

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+Mx^m,$$

wo A, B, C, D ... Null oder beliebige andere, von x unabhängige Ausdrücke sind, heißt eine ganze Funktion von x, und zwar vom mten Grade, wenn M nicht Null ist; während die (von x unabhängigen) Ausdrücke A, B, C ... M, die Koeffizienten derselben genannt werden. Diese ganze Funktion von x, heißt steigend geordnet, wenn sie wie die obige ist, fallend dagegen, wenn ihre Glieder in umgekehrter Ordnung geschrieben sind. —

Diese ganze Funktion von x heißt eine reele, wenn, während x noch jeden, sowohl reelen, als auch imaginären Werth bedeutet, d. h. während x noch ganz allgemein ist, alle Koeffizienten reele Zahlen sind; sie heißt imaginär, wenn diese Koeffizienten zum Theil oder alle imaginär sind; sie heißt allgemein-numerisch, wenn die Koeffizienten alle allgemein-numerisch (§. 332.), d. h. von der Form $p+q\cdot i$ sind, sie heißt endlich

eine allgemeine, wenn die Koeffizienten noch ganz allgemein sind, und eben sowohl noch reel, als imaginär werden können.

In einer solchen ganzen Funktion von x, heißt x der Veränderliche (Ausdruck), die Funktion selber dagegen, der von x abhängig Veränderliche. Jeder Ausdruck endlich, welcher x gar nicht enthält, also von x auf keine Weise abhängig ist (wie dies z. B. mit jedem der Koeffizienten der ganzen Funktion von x der Fall ist) heißt ein nach x konstanter, zuweilen auch schlechthin ein konstanter Ausdruck (ein Konstanter).

Anmerkung. Werden in der ganzen Funktion von x, nämlich in $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots+Mx^m$ die Koeffizienten B, C, D, etc. etc. incl. des M, der Null gleich gedacht, so geht sie über in A allein, so daß sie nach x konstant wird. In solchem Falle heißt sie doch zuweilen noch eine ganze Funktion von x, aber vom nullten Grade.

§. 418. Zusatz.

Denkt man sich, daß in einer ganzen Funktion von x vom mten Grade, dieses x einen solchen Ausdruck repräsentirt, welcher die ganze Funktion der Null gleich macht, so hat man eine höhere Gleichung vom mten Grade.

§. 419. Zusatz.

Bezeichnet man die ganze Funktion vom mten Grade:

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots+Mx^m,$$

durch P, und den Koeffizienten irgend einer Potenz x^ν durch P_ν, so ist diese ganze Funktion ausgedrückt durch:

$$S\left[P_a \cdot x^a\right]_{a+b=m}, \quad \text{oder durch} \quad S\left[P_a \cdot x^a\right],$$

ohne beschränkende Gleichung, in so ferne $P_{m+\mu}$ der Null gleich gedacht werden muß, welche ganze Zahl auch μ seyn mag.

§. 420. Zusatz.

Es ist:

1) $$S\left[\underset{a+b=m}{P_a}\cdot x^a\right]\pm S\left[\underset{c+d=n}{Q_c}\cdot x^c\right] = S\left[\underset{a+b=m}{(P_a\pm Q_a)}\cdot x^a\right],$$

wenn nur $Q_a = 0$ gedacht wird, so oft $a > n$; und wenn $m \gtrless n$ ist. Ferner ist:

2) $$S\left[\underset{a+b=m}{P_a}\cdot x^a\right]\times S\left[\underset{c+d=n}{Q_c}\cdot x^c\right] = S\left[\underset{a+b=m,\ c+d=n}{P_a\cdot Q_c}\cdot x^{a+c}\right];$$

$$\text{auch} = S\left[\underset{\substack{a+b=m,\ c+d=n,\\ a+c=e.}}{P_a\cdot Q_c}\cdot x^e\right].$$

Beyspiel. Sind nämlich die beyden ganzen Funktionen $P_0+P_1\cdot x+P_2\cdot x^2+P_3\cdot x^3+P_4\cdot x^4$ und $Q_0+Q_1\cdot x+Q_2\cdot x^2+Q_3\cdot x^3$, wo P_0, P_1, P_2, &c., eben so Q_0, Q_1, Q_2, &c., ganz beliebige Koeffizienten sind, mit einander zu multiplizieren, so zeigt sich der Koeffizient von x^n des gesuchten Produkts:

$$= S\left[\underset{a+c=n}{P_a\cdot Q_c}\right],$$

wenn man a nie größer als 4, und c nie größer als 3 werden läßt. — Also findet sich z. B. der Koeffizient von x^5, weil $a+c = 5$, die Werthe

a	0	1	2	3	4	5	
c	5	4	3	2	1	0	zuläßt,

$$= P_2\cdot Q_3+P_3\cdot Q_2+P_4\cdot Q_1,$$

und das ganze Produkt findet sich

$$= P_0\cdot Q_0+(P_1\cdot Q_0+P_0\cdot Q_1)x+(P_2\cdot Q_0+P_1\cdot Q_1+P_0\cdot Q_2)x^2$$
$$+(P_3\cdot Q_0+P_2\cdot Q_1+P_1\cdot Q_2+P_0\cdot Q_3)x^3+(P_4\cdot Q_0+P_3\cdot Q_1+P_2\cdot Q_2+P_1\cdot Q_3)x^4$$
$$+(P_4\cdot Q_1+P_3\cdot Q_2+P_2\cdot Q_3)x^5+(P_4\cdot Q_2+P_3\cdot Q_3)x^6+P_4\cdot Q_3\cdot x^7.$$

§. 421. Zusatz.

1) Die Addition, Subtraktion, und die Multiplikation zweyer ganzen Funktionen von x, ist immer möglich.

2) Ist der eine Faktor eine Funktion von x vom mten Grade, und der andere Faktor eine dergleichen vom nten Grade, so ist das Produkt nothwendig vom (m+n)ten Grade.

3) Ist daher für zwey ganze Funktionen von x, P und Q,

wo P vom mten Grade, und Q vom nten Grade ist, die Division von P durch Q möglich *), so ist die dem Quotienten $\frac{P}{Q}$ gleiche ganze Funktion, doch nothwendig vom (m—n)ten Grade.

§. 422. Aufgabe.

Eine gegebene ganze Funktion von x, vom mten Grade A, durch eine andere Funktion vom nten Grade B, zu dividiren.

Auflösung. Man ordne diese gegebenen beyden Funktionen A und B steigend, oder alle beyde fallend, und wende den Lehrsatz des (§. 84.) an, nach welcher Formel $\frac{A}{B} = Z + \frac{A-BZ}{B}$, ein Quotient in eine Summe verwandelt wird, immer die Quotienten der ersten Glieder im Dividend und Divisor, zum ersten Summanden (für Z) setzend; und man setze dieses Verfahren der Division im erstern Falle, wenn A und B steigend geordnet sind, so lange fort, bis man im Quotienten zu einem letzten Gliede vom m—nten Grade gelangt ist; im andern Falle dagegen, wenn A und B fallend geordnet sind, setze man die Division [d. h. die Anwendung des Lehrsatzes (§. 84.)] so lange fort, als man zu einem letzten Gliede im Quotienten ohne x, gelangt.

Bleibt nun kein letzter Rest, so hat man die gesuchte, dem $\frac{A}{B}$ gleiche ganze Funktion C gefunden. — Bleibt aber noch ein R, so ist nach demselben (§. 84.):

$$\frac{A}{B} = C + \frac{R}{B},$$

während R im erstern Falle, wo A und B steigend geordnet waren, im Allgemeinen eine ganze Funktion vom mten Grade, im andern Falle dagegen, wo A und B fallend geordnet sind,

---

*) D. h. existirt selber wieder eine ganze Funktion von x, welche dem Quotienten $\frac{P}{Q}$ der beyden gegebenen ganzen Funktionen von x, gleich ist.

eine ganze Funktion vom n—1ten Grade seyn wird; wobey jedoch nicht zu vergessen ist, daß für besondere Werthe der Koeffizienten, diese Reste von viel niedrigerem Grade werden können.

Es ist daher die Division zweyer ganzen Funktionen von x bald möglich, bald auch unmöglich, in dem Sinne nämlich, daß selber wieder eine ganze Funktion von x als Resultat verlangt wird.

Beyspiele. Man soll die ganze Funktion

$$10x^5+15x^4-24x^3+17x-12$$

durch die ganze Funktion $2x^2+3x-4$ dividiren.

Nach der ersten Auflösung erhält man:

Divisor B	Dividend A	Quotient C
$2x^2+3x-4$	$10x^5+15x^4-24x^3+17x-12$	$5x^3-2x+3$
	$10x^5+15x^4-20x^3$	
	$-4x^3+17x^2-12$	
	$-4x^3-6x^2+8x$	
	$6x^2+9x-12$	
	$6x^2+9x-12$	
	$0\quad 0\quad 0$	

Nach der andern Auflösung hat man dagegen:

Divisor B	Dividend A	Quotient C
$-4+3x+2x^2$	$-12+17x-24x^3+15x^4+10x^5$	$3-2x+5x^3$
	$-12+9x+6x^2$	
	$8x-6x^2-24x^3+15x^4+10x^5$	
	$8x-6x^2-4x^3$	
	$-20x^3+15x^4+10x^5$	
	$-20x^3+15x^4+10x^5$	
	$0\quad 0\quad 0$	

So findet man, wenn $4x^5-2x^3+3x-5$ durch $2x^2-3x+4$ dividirt wird, die ganze Funktion $2x^3+3x^2-\frac{1}{2}x-\frac{27}{4}$, und dann bleibt noch ein Rest $-\frac{61}{4}x+22$. — Folglich ist:

$$\frac{4x^5-2x^3+3x-5}{2x^2-3x+4}=\left(2x^3+3x^2-\frac{1}{2}x-\frac{27}{4}\right)+\frac{-\frac{61}{4}x+22}{2x^2-3x+4}.$$

Und dividirt man dieselben ganzen Funktionen beyde steigend geordnet durcheinander, so erhält man:

Divisor B	Dividend A	Quotient C
$4-3x+2x^2$	$-5+3x-2x^3+4x^5$	$-\frac{5}{4}-\frac{3}{16}x+\frac{31}{64}x^2-\frac{11}{256}x^3$
	$-5+\frac{15}{4}x-\frac{5}{2}x^2$	
	$-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}x^2-2x^3+4x^5$	
	$-\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{8}x^3$	
	$\frac{31}{16}x^2-\frac{13}{8}x^3+4x^5$	
	$\frac{31}{16}x^2-\frac{93}{64}x^3+\frac{31}{32}x^4$	
	$-\frac{11}{64}x^3-\frac{31}{32}x^4+4x^5$	
	$-\frac{11}{64}x^3+\frac{33}{256}x^4-\frac{11}{128}x^5$	
	$(\mathfrak{R})=-\frac{215}{256}x^4+\frac{523}{128}x^5$;	

so daß man hat:

$$\frac{-5+3x-2x^3+4x^5}{4-3x+2x^2}=\left(-\frac{5}{4}-\frac{3}{16}x+\frac{31}{64}x^2-\frac{11}{256}x^5\right)+\frac{-\frac{215}{256}x^4+\frac{523}{128}x^5}{4-3x+2x^2}.$$

Anmerkung 1. In der Folge wird stillschweigend immer vorausgesetzt, daß die erste Art der Division statt findet, so daß der Rest R allemal von einem niedrigern Grade wird, als der Divisor B, also nach x konstant wird, wenn B nur vom ersten Grade ist. — Und weil man immer $A = B \cdot C + R$ hat, so folgt, daß für jeden Werth von x, welcher B zu Null macht, auch allemal $A = R$ werden müsse, daß also auch $R = 0$ werden müsse, für jeden Werth von x, welcher A und B zugleich zu Null macht. —

Daraus folgt weiter, daß wenn A für $x = \alpha$ Null wird, dann A durch $x-\alpha$ ohne Rest dividirt werden könne, weil der bey der Division der A mit $x-\alpha$, bleibende Rest $R, = 0$ wird für $x = \alpha$,

während er vom niedrigern Grade als der Divisor $x-\alpha$, also konstant, d. h. von x unabhängig, mithin allemal Null seyn muß.

Anmerkung 2. Es fragt sich aber ferner, ob, wenn man die Funktionen bald steigend, bald fallend geordnet, durch einander dividirt, und nie ein letzter Rest bleibt, in jedem der beyden Fälle, nothwendig allemal eine und dieselbe ganze Funktion als Resultat sich ergeben müsse.

So viel ist gewiß, daß beyde Endresultate $= \frac{A}{B}$, folglich auch einander gleich seyn müssen. Es fragt sich daher nur noch, ob, wenn zwey ganze Funktionen von x einander gleich sind, dieselben auch in ihren einzelnen Koeffizienten mit einander übereinstimmen, d. h. durch gar nichts mehr von einander verschieden seyn müssen.

§. 423. Lehrsatz.

Wird die ganze Funktion von x, anscheinlich vom mten Grade,

$$A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + A_4 \cdot x^4 + \cdots + A_m \cdot x^m,$$

wo A_0, A_1, A_2, etc. etc. ganz beliebige Koeffizienten vorstellen, für mehr als m verschiedene Werthe von x identisch $= 0$, so muß jeder einzelne Koeffizient für sich $= 0$ seyn; d. h. es muß dann seyn:

$$A_0 = 0,\ A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ \cdots\ A_m = 0.$$

Beweis. Sind $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_m$, m+1 der Werthe von x, welche die obige ganze Funktion von x identisch $= 0$ machen, so darf man sie nur, einen nach dem andern, statt x setzen, und man bekommt die m+1 Gleichungen:

$$1)\quad A_0 + \alpha \cdot A_1 + \alpha^2 \cdot A_2 + \cdots + \alpha^m \cdot A_m = 0,$$

$$2)\quad A_0 + \alpha_1 \cdot A_1 + \alpha_1^2 \cdot A_2 + \cdots + \alpha_1^m \cdot A_m = 0,$$

$$3)\quad A_0 + \alpha_2 \cdot A_1 + \alpha_2^2 \cdot A_2 + \cdots + \alpha_2^m \cdot A_m = 0,$$

$$\vdots$$

$$m+1)\quad A_0 + \alpha_m \cdot A_1 + \alpha_m^2 \cdot A_2 + \cdots + \alpha_m^m \cdot A_m = 0;$$

zwischen den m+1 Unbekannten $A_0, A_1, A_2, A_3 \cdots A_m$, lauter sogenannte einfache Gleichungen (d. h. Gleichungen der ersten Ordnung), aus denen nun diese m+1 Unbekannten selbst bestimmt werden müssen.

Alles kommt nun darauf an, nachzuweisen, daß die Werthe dieser Unbekannten $A_0, A_1, A_2 \cdots A_m$ aus diesen Gleichungen, alle $= 0$ sich ergeben.

Um aber diese Auflösung nach (§. 228.) und zwar mit der franzöſiſchen Eliminations-Methode zu bewerkſtelligen, addire man dieſe $m+1$ Gleichungen zu einander, nachdem zuvor die zweyte mit β_1, die dritte mit β_2, u. ſ. w., und die $m+1$te mit β_m multiplizirt worden iſt, und man erhält:

$$0 = \begin{cases} (1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots + \beta_m) \cdot A_0 \\ +(\alpha + \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2 + \alpha_3 \cdot \beta_3 + \cdots + \alpha_m \cdot \beta_m) \cdot A_1 \\ +(\alpha^2 + \alpha_1^2 \cdot \beta_1 + \alpha_2^2 \cdot \beta_2 + \alpha_3^2 \cdot \beta_3 + \cdots + \alpha_m^2 \cdot \beta_m) \cdot A_2 \\ +(\alpha^3 + \alpha_1^3 \cdot \beta_1 + \alpha_2^3 \cdot \beta_2 + \alpha_3^3 \cdot \beta_3 + \cdots + \alpha_m^3 \cdot \beta_m) \cdot A_3 \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ +(\alpha^m + \alpha_1^m \cdot \beta_1 + \alpha_2^m \cdot \beta_2 + \alpha_3^m \cdot \beta_3 + \cdots + \alpha_m^m \cdot \beta_m) \cdot A_m ; \end{cases}$$

wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_m$ ganz beliebige Ausdrücke vorſtellen. — Denkt man ſich nun die m Unbeſtimmten, $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$ ſo beſtimmt, daß irgend m der $m+1$ Koeffizienten der $m+1$ Unbekannten $A_0, A_1, A_2, \cdots A_m$, der Null gleich werden, in vorſtehender Gleichung, ſo liefert dieſe Gleichung allemal den übrig bleibenden Unbekannten A_m, oder A_{m-1}, oder A_{m-2}, oder etc. etc., oder A_3, oder A_2, oder A_1, oder A_0, der Null gleich; welches zu erweiſen war.

Anmerkung. Es iſt:

$$\frac{z^2 - a^2}{z - a} = z + a;$$

$$\frac{z^3 - a^3}{z - a} = z^2 + za + a^2;$$

$$\frac{z^4 - a^4}{z - a} = z^3 + z^2a + za^2 + a^3;$$

$$\frac{z^5 - a^5}{z - a} = z^4 + z^3a + z^2a^2 + za^3 + a^4,$$

und allgemein:

$$\frac{z^m - a^m}{z - a} = z^{m-1} + z^{m-2}a + z^{m-3}a^2 + \cdots + za^{m-2} + a^{m-1}.$$

Man nehme nun blos, der Kürze wegen, die fünf Gleichungen:

$$1)\quad A_0+\alpha\cdot A_1+\alpha^2\cdot A_2+\alpha^3\cdot A_3+\alpha^4\cdot A_4=0;$$
$$2)\quad A_0+\alpha_1\cdot A_1+\alpha_1^2\cdot A_2+\alpha_1^3\cdot A_3+\alpha_1^4\cdot A_4=0;$$
$$3)\quad A_0+\alpha_2\cdot A_1+\alpha_2^2\cdot A_2+\alpha_2^3\cdot A_3+\alpha_2^4\cdot A_4=0;$$
$$4)\quad A_0+\alpha_3\cdot A_1+\alpha_3^2\cdot A_2+\alpha_3^3\cdot A_3+\alpha_3^4\cdot A_3=0;$$
$$5)\quad A_0+\alpha_4\cdot A_1+\alpha_4^2\cdot A_2+\alpha_4^3\cdot A_3+\alpha_4^4\cdot A_4=0;$$

um sie nach den fünf Unbekannten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, aufzulösen. Eliminirt man hier zuerst A_0, die englische Methode des (§. 228.) anwendend, dadurch, daß man die erste Gleichung nach und nach von jeder der vier übrigen subtrahirt, und dividirt man zugleich durch $\alpha_1-\alpha$, $\alpha_2-\alpha$, $\alpha_3-\alpha$ und $\alpha_4-\alpha$ weg, so erhält man:

$$6)\quad A_1+(\alpha_1+\alpha)\cdot A_2+(\alpha_1^2+\alpha_1\cdot\alpha+\alpha^2)\cdot A_3+(\alpha_1^3+\alpha_1^2\cdot\alpha+\alpha_1\cdot\alpha^2+\alpha^3)\cdot A_4=0;$$
$$7)\quad A_1+(\alpha_2+\alpha)\cdot A_2+(\alpha_2^2+\alpha_2\cdot\alpha+\alpha^2)\cdot A_3+(\alpha_2^3+\alpha_2^2\cdot\alpha+\alpha_2\cdot\alpha^2+\alpha^3)\cdot A_4=0;$$
$$8)\quad A_1+(\alpha_3+\alpha)\cdot A_2+(\alpha_3^2+\alpha_3\cdot\alpha+\alpha^2)\cdot A_3+(\alpha_3^3+\alpha_3^2\cdot\alpha+\alpha_3\cdot\alpha^2+\alpha^3)\cdot A_4=0;$$
$$6)\quad A_1+(\alpha_4+\alpha)\cdot A_2+(\alpha_4^2+\alpha_4\cdot\alpha+\alpha^2)\cdot A_3+(\alpha_4^3+\alpha_4^2\cdot\alpha+\alpha_4\cdot\alpha^2+\alpha^3)\cdot A_4=0;$$

Zieht man hier wieder, um A_1 zu eliminiren, die Gleichung (6.) von den drey übrigen ab, und dividirt man wieder die entstehenden Gleichungen, beziehlich durch $\alpha_2-\alpha_1$, $\alpha_3-\alpha_1$, $\alpha_4-\alpha_1$, so ergibt sich:

$$10)\quad A_2+(\alpha_2+\alpha_1+\alpha)\cdot A_3+(\alpha_2^2+\alpha_2\cdot\alpha_1+\alpha_1^2+(\alpha_2+\alpha_1)\alpha+\alpha^2)\cdot A_4=0;$$
$$11)\quad A_2+(\alpha_3+\alpha_1+\alpha)\cdot A_3+(\alpha_3^2+\alpha_3\cdot\alpha_1+\alpha_1^2+(\alpha_3+\alpha_1)\alpha+\alpha^2)\cdot A_4=0;$$
$$12)\quad A_2+(\alpha_4+\alpha_1+\alpha)\cdot A_3+(\alpha_4^2+\alpha_4\cdot\alpha_1+\alpha_1^2+(\alpha_4+\alpha_1)\alpha+\alpha^2)\cdot A_4=0.$$

Zieht man hier ferner, um wieder A_2 zu eliminiren, die Gleichung (10.) von den beyden folgenden ab, so ergibt sich, wenn zugleich beziehlich durch $\alpha_3-\alpha_2$, $\alpha_4-\alpha_2$ dividirt wird:

$$13)\quad A_3+(\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1+\alpha)A_4=0;$$
$$14)\quad A_3+(\alpha_4+\alpha_2+\alpha_1+\alpha)A_4=0.$$

Und subtrahirt man endlich noch (13.) von (14.), um vollends A_3 zu eliminiren, so erhält man:

$$15)\quad (\alpha_4-\alpha_3)\cdot A_4=0,$$

woraus $A_4=0$, dann $A_3=0$, $A_2=0$, $A_1=0$, und auch $A_0=0$ sich ergibt.

Obgleich nun dieser Beweis nur für den speziellen Werth 4 von m, hier geführt ist, so sieht man doch leicht, daß die obigen m+1 Gleichungen zwischen den m+1 Unbekannten genau eben so behandelt werden können, und zuletzt zu der Gleichung $(\alpha_m-\alpha_{m-1})\cdot A_m=0$

führen, aus welcher $A_m = 0$, und nachher sogleich auch $A_{m-1} = 0$, $A_{m-2} = 0$, u. s. w. f., und zuletzt $A_2 = 0$, $A_1 = 0$, $A_0 = 0$, hervorgehen, und zwar eben deswegen, weil $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$, alle von einander verschieden sind, so daß keine der Differenzen:

$$\alpha_1 - \alpha,\ \alpha_2 - \alpha,\ \text{&c.},\ \alpha_2 - \alpha_1,\ \text{&c.},\ \alpha_m - \alpha,\ \alpha_m - \alpha_1,\ \cdots\cdots \alpha_m - \alpha_{m-1},$$

durch die man nach und nach wegdividirt hat, der Null gleich wird.

Anmerkung 2. Uebrigens vergleiche man diese Beweise mit denen (§§. 306. 277. 250.) für denselben Satz, aber für ganze Funktionen vom 4ten, 3ten und 2ten Grade geführten, um aus der Verschiedenheit derselben das wahre Wesen dieser Erscheinungen immer besser aufzufassen.

§. 424. Zusatz.

Sind zwey ganze Funktionen von x, vom mten Grade:

$$A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + \cdots + A_m \cdot x^m,$$

und $$B_0 + B_1 \cdot x + B_2 \cdot x^2 + B_3 \cdot x^3 + \cdots + B_m \cdot x^m,$$

für jeden Werth von x, ja nur für $m+1$ verschiedene Werthe von x, einander gleich, so sind auch die einzelnen Koeffizienten beziehlich einander gleich; d. h. es ist dann:

$$A_0 = B_0;\ A_1 = B_1;\ A_2 = B_2;\ A_3 = B_3;\ A_m = B_m.$$

Denn die Differenz beyder ganzen Funktionen, nämlich:

$$(A_0 - B_0) + (A_1 - B_1)x + (A_2 - B_2)x^2 + \cdots + (A_m - B_m)x^m$$

wird dann wenigstens für $m+1$ verschiedene Werthe von x, der Null gleich; also muß auch jeder einzelne der Koeffizienten von x, der Null gleich seyn.

§. 425. Zusätze.

Es folgt aber auch noch:

1) Eine ganze Funktion vom mten Grade, deren Koeffizienten nicht alle Null sind, kann nie durch mehr als m verschiedene Werthe von x der Null gleich werden.

2) Der Quotient $\frac{A}{B}$ des (§. 422.), auf welchem Wege

solcher gefunden seyn mag, wenn er nur wirklich eine ganze Funktion (ohne Rest) gibt, ist immer eine und dieselbe ganze Funktion.

§. 426. Zusatz.

Man kann nun auch die Aufgabe des (§. 422.), nämlich die ganze Funktion $\mathfrak{A}$ von x, vom mten Grade, durch die ganze Funktion $\mathfrak{B}$ von x, vom nten Grade zu dividiren, wie folgt lösen:

1) Man nehme eine ganze Funktion $\mathfrak{C}$ an, vom Grade (m—n) mit unbestimmten (d. h. einstweilen durch beliebige Buchstaben, z. B. $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ bezeichneten) Koeffizienten; welche dem Quotienten $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ gleich seyn soll.

2) Die Gleichung $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$ liefert dann nach (§. 424.) m+1 Gleichungen, zwischen den Koeffizienten von $\mathfrak{A}$, von $\mathfrak{B}$, und den m—n+1 Koeffizienten von $\mathfrak{C}$, welche Gleichungen alle in Bezug auf diese letztern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c., nothwendig einfache Gleichungen seyn müssen (§. 420. Nr. 2.).

3) Aus diesen m+1 Gleichungen bestimme man durch Auflösung die m—n+1 Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$; und genügen diese für $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ gefundenen Werthe allen m+1 Gleichungen, so ist die Aufgabe wiederum gelöset.

4) Würden aber diese Gleichungen gar nicht zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ taugen, in so ferne sie sich widersprechen, oder genügten die aus einigen dieser Gleichungen gefundenen Werthe von $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ nicht allen m+1 Gleichungen, so wäre die Aufgabe wiederum nicht möglich.

Beyspiel. Für den Fall, daß

$$-12+17x-24x^3+15x^4+10x^5 \text{ durch } -4+3x+2x^2$$

dividirt werden soll, müßte man also:

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$$

für den gesuchten Quotienten annehmen, und man hätte dann:

$$-12+17x-24x^3+15x^4+10x^5 = (\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3)(-4+3x+2x^2)$$
$$= -4\alpha-4\beta x-4\gamma x^2-4\delta x^3+3\alpha x+3\beta x^2+3\gamma x^3+3\delta x^4$$
$$+2\alpha x^2+2\beta x^3+2\gamma x^4+2\delta x^5$$
$$= -4\alpha+\left\{\begin{matrix}3\alpha\\-4\beta\end{matrix}\right\}x+\left\{\begin{matrix}2\alpha\\+3\beta\\-4\gamma\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix}2\beta\\+3\gamma\\-4\delta\end{matrix}\right\}x^3+\left\{\begin{matrix}2\gamma\\+3\delta\end{matrix}\right\}x^4+2\delta x^5 ;$$

folglich nach (§. 424.):

$$-4\alpha = -12 \quad \text{oder} \quad \alpha = 3$$
$$3\alpha-4\beta = 17 \quad \text{oder} \quad \beta = \frac{3\alpha-17}{4} = -2$$
$$2\alpha+3\beta-4\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma = \frac{2\alpha+3\beta}{4} = 0$$
$$2\beta+3\gamma-4\delta = -24 \quad \text{oder} \quad \delta = \frac{2\beta+3\gamma+24}{4} = 5;$$

endlich noch:

$$2\gamma+3\delta = 15 \quad \text{und} \quad 2\delta = 10.$$

Und weil diesen beyden letztern Gleichungen von den aus den erstern vier Gleichungen gefundenen Werthen von γ und δ wirklich genügt wird, so ist für diese Werthe von α, β, γ, δ, die ganze Funktion

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3,$$

d. h.
$$3+(-2)x+0x^2+5x^3,$$

oder
$$3-2x+5x^3,$$

nothwendig die gesuchte.

§. 427. Zusatz.

Bey diesem Verfahren, welches eine Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten ist, schließt man so:

„Wenn es eine ganze Funktion

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$$

„gibt, welche dem Quotienten der beyden gegebenen ganzen „Funktionen gleich ist, so müssen die sechs Gleichungen:

$$-4\alpha = -12, \quad 3\alpha-4\beta = 17, \quad 2\alpha+3\beta-4\gamma = 0,$$
$$2\beta+3\gamma-4\delta = -24, \quad 2\gamma+3\delta = 15, \quad 2\delta = 10,$$

„statt finden.“ — Würden also die aus vier dieser Gleichungen gefundenen Werthe der Unbekannten α, β, γ, δ, den beyden übrigen Gleichungen nicht genügen, so enthielten die sechs Gleichungen einen Widerspruch, in so ferne sie nicht alle sechs zugleich

statt finden könnten, und es müßte daher auch die Annahme, aus der sie gefolgert sind, nothwendig einen Widerspruch enthalten, d. h. nicht statt finden; daher würde es dann keine ganze Funktion $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$ geben, der die verlangte Eigenschaft zukäme. — Dasselbe wäre der Fall, wenn je vier der Gleichungen sich dergestalt widersprechen, daß sie gar nicht zur Bestimmung von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, tauglich wären; weil jeder Widerspruch in den Gleichungen sogleich die Voraussetzung aufhebt (d. h. als unstatthaft anzeigt), unter der diese Gleichungen erhalten worden sind.

Sollte z. B. eine dem Quotienten:

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots Px^m}{a+bx+cx^2+dx^3+\cdots px^n}$$

gleiche ganze Funktion

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots+\pi x^{m-n}$$

gefunden werden, so erhielte man die Gleichungen:

$a\alpha$	$= A,$	daraus	$\alpha = A:a;$
$b\alpha+a\beta$	$= B,$	daraus	$\beta = (B-b\alpha):a;$
$c\alpha+b\beta+a\gamma$	$= C,$	daraus	$\gamma = (C-b\beta-c\alpha):a;$
$d\alpha+c\beta+b\gamma+a\delta$	$= D,$		u. s. w. f.

u. s. w. f.

Wäre nun $a = 0$, so diente die erste Gleichung $a\alpha = A$ nicht mehr zur Bestimmung von α, enthielte überdies einen Widerspruch, wenn nicht auch $A = 0$ wäre, und zeigte also im letztern Falle an (d. h. wenn nicht $A = 0$ ist), daß es keine ganze Funktion gibt, welche dem Quotienten:

$$\frac{A+Bx+Cx^2+\cdots+Px^m}{bx+cx^2+\cdots+px^n}$$

gleich seyn könnte.

Ist außer $a = 0$, auch $A = 0$, so taugt zwar die erste Gleichung $a\alpha = A$ nicht mehr zur Bestimmung von α, enthält aber auch keinen Widerspruch, und es hängt also noch von den übrigen Gleichungen ab, ob die Aufgabe möglich seyn soll oder nicht.

Die zweyte der Gleichungen gibt aber für $a = 0$:

$$b\alpha = B \quad \text{oder} \quad \alpha = B:b,$$

dient also zur Bestimmung von α, wenn nicht $b = 0$, und die Aufgabe

kann in diesem Falle noch möglich seyn. — Ist aber auch noch $b = 0$ und nicht zugleich $B = 0$, so enthält diese zweyte Gleichung $b\alpha = B$ einen Widerspruch, und die Aufgabe ist unbedingt unmöglich. — Ist aber wieder außer $b = 0$, auch noch $B = 0$, so dient die Gleichung $b\alpha = B$ zwar nicht mehr zur Bestimmung von α, enthält aber auch keinen Widerspruch, und es hängt daher die Möglichkeit der Aufgabe wieder von den noch übrigen Gleichungen ab; u. s. w. f.

§. 428. Zusatz.

Im Allgemeinen können aus den $m+1$ Gleichungen (§. 426.) die $m-n+1$ Unbestimmten α, β, γ, ꝛc. ꝛc. eliminirt werden, und es bleiben dann n Gleichungen zwischen den Koeffizienten der gegebenen Funktionen übrig. — Sind diese Gleichungen von den gegebenen Koeffizienten A, B, C, ꝛc., a, b, c, ꝛc. nicht erfüllt, so ist die Aufgabe (§. 426.) selbst unbedingt unmöglich; sind sie aber erfüllt, so kann die Aufgabe möglich seyn, obgleich sie noch nicht möglich seyn muß.

§. 429. Erklärung.

Eine ganze Funktion $\mathfrak{A}$ *) ist durch eine andere ganze Funktion $\mathfrak{B}$ theilbar, und $\mathfrak{B}$ ist dann ein Theiler oder Faktor von $\mathfrak{A}$, wenn es eine dritte ganze Funktion $\mathfrak{C}$ gibt, so daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$ ist. Dabey ist der Theiler $\mathfrak{B}$ ein einfacher, doppelter, dreyfacher u. s. w. f., je nachdem er vom Grade 1, 2, 3, u. s. w. ist. Der doppelte Faktor ax^2+bx+c heißt ein quadratischer, wenn $b^2 = 4ac$ ist, weil er dann die Form $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ annimmt. — Die ganze Funktion $\mathfrak{C}$ heiße die Maaßfunktion, während $\mathfrak{B}$ die Gemäßfunktion von $\mathfrak{A}$ genannt werden kann. Die Funktion $\mathfrak{A}$ selbst mag dann auch eine Vielfache-Funktion von $\mathfrak{B}$ heißen.

---

*) Wenn nichts Besonderes bemerkt ist, so sind immer ganze Funktionen eines Veränderlichen x verstanden.

Ferner heiße die ganze Funktion P der größte gemeinschaftliche Theiler mehrerer andern ganzen Funktionen A, B, C, ꝛc. ꝛc., wenn es keine ganze Funktion eines höheren Grades gibt, durch welche alle diese ganzen Funktionen A, B, C, ꝛc. ꝛc. zugleich getheilt werden könnten.

Dagegen heißt eine ganze Funktion V die kleinste gemeinschaftliche Vielfache-Funktion mehrer andern A, B, C, ꝛc., wenn es keine andere ganze Funktion von einem niedrigern Grade gibt, welche durch jede der Funktionen A, B, C, ꝛc. getheilt werden könnte.

Eine ganze Funktion heißt eine absolute Primfunktion, oder schlechthin eine Primfunktion, wenn sie durch keine andere ganze Funktion getheilt werden kann (so daß der Quotient wiederum eine ganze Funktion wird).

Zwey oder mehr ganze Funktionen heißen dagegen Primfunktionen unter sich, oder relative Primfunktionen, wenn sie keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben.

Anmerkung. Jede ganze Funktion vom ersten Grade ist allemal eine (absolute) Primfunktion. Daß eine Primfunktion aber auch allemal vom ersten Grade seyn müsse, kann erst weiter unten bewiesen werden.

§. 430. Zusatz.

Sind A und B ganze Funktionen von x, und ist A durch B theilbar, so ist auch PA durch QB theilbar, wenn nur P und Q nicht x enthalten und nicht Null sind. — Denn es ist:

$$(PA):(QB) = (P:Q)\cdot(A:B) = (P:Q)\cdot C.$$

§. 431. Lehrsatz und Erklärung.

Ist die ganze Funktion A vom mten Grade durch die ganze Funktion B vom nten Grade nicht theibar, aber dabey $m \geqq n$, so gibt es immer eine ganze Funktion C vom m—nten Grade, und noch eine ganze Funktion R von einem Grade, der niedriger ist als der nte, und so daß:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{C} + \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}}.$$

Einen solchen Quotienten, wie $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ oder $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}}$, welcher keiner ganzen Funktion gleich ist, nennt man auch eine gebrochene Funktion von x, und zwar den erstern $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ eine unächt gebrochene, den andern $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}}$ dagegen eine ächt gebrochene. — Die ganze Funktion $\mathfrak{C}$ heißt der nächstniedrigere Quotient.

Beweis ergibt sich unmittelbar aus (§. 422.).

§. 432. Zusatz.

Vergleicht man diese Erklärungen mit denen (§§. 110. 124. und 126.) gegebenen, so erhellet augenblicklich, daß sich hier ganz analoge Folgerungen ziehen lassen, wie dort, und wir wollen von dieser großen Menge von Sätzen hier nur folgende heraushеben *):

1) Die Summe und die Differenz zweyer durch eine ganze Funktion $\mathfrak{B}$ theilbaren ganzen Funktionen, ist wiederum durch $\mathfrak{B}$ theilbar.

2) Das Produkt, dessen einer Faktor durch $\mathfrak{B}$ theilbar ist, ist ebenfalls durch $\mathfrak{B}$ theilbar.

3) Ist $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ wieder durch $\mathfrak{C}$ theilbar, so ist auch $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{C}$ theilbar.

4) Wird $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{B}$ dividirt, so daß $\mathfrak{C}$ der nächstniedrigere Quotient ist, und $\mathfrak{R}$ der Rest; wird dann wieder $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{R}$ dividirt, so daß $\mathfrak{C}_1$ der nächstniedrigere Quotient, und $\mathfrak{R}_1$ der Rest; wird dann wieder $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{R}_1$ dividirt, so daß $\mathfrak{C}_2$ der

---

*) Es ist jedoch sehr interessant, alle Sätze des erwähnten vierten Kapitels auf ganze Funktionen übergetragen zu sehen, und wir empfehlen besonders den Anfängern, diese Uebertragung wirklich vorzunehmen, wenn auch, wo dort 1 steht, hier oft das Wort konstant dafür gesetzt werden muß.

nächstniedrigere Quotient und $\mathfrak{R}_2$ der Rest ist; und fährt man so fort, nach dem Schema zu dividiren:

$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{C}$
	$\mathfrak{C}\mathfrak{B}$	
$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}_1$
	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{R}$	
$\mathfrak{R}_1$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{C}_2$
	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{R}_1$	
$\mathfrak{R}_2$	$\mathfrak{R}_1$	$\mathfrak{C}_3$
	$\mathfrak{C}_3\mathfrak{R}_2$	
$\mathfrak{R}_3$	$\mathfrak{R}_2$	$\mathfrak{C}_4$
	$\mathfrak{C}_4\mathfrak{R}_3$	
$\mathfrak{R}_4$		

und findet man endlich, daß bey einem dieser Reste, z. B. bey $\mathfrak{R}_3$ die Division aufgeht, so nämlich, daß $\mathfrak{R}_4 = 0$ wird, so ist $\mathfrak{R}_3$ der größte gemeinschaftliche Theiler von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Denn so oft a, b, c, r, solche ganze Funktionen sind, daß mit dem Divisor b in den Dividenden a dividirt, der nächstniedrigere Quotient c und der Rest r sich ergibt, so oft ist

$$r = a - bc \quad \text{und} \quad a = bc + r.$$

Jeder Theiler T des Dividenden a und Divisor b, ist daher auch ein Theiler von r; und jeder Theiler U des Restes r und des Divisors b, nothwendig auch ein Theiler vom Dividenden a; und endlich jeder größte gemeinschaftliche Theiler W von r und b, auch der größte gemeinschaftliche Theiler von b und a; weil umgekehrt jeder größere gemeinschaftliche Theiler T von b und a, auch r theilt, also auch gemeinschaftlicher Theiler von b und r wäre.

Nun ist $\mathfrak{R}_3$ nach der Annahme ein Theiler vom Divisor $\mathfrak{R}_2$, und der größte Theiler von sich selbst als Rest, also auch der größte gemeinschaftliche Theiler des Divisors $\mathfrak{R}_2$ und des Dividenden $\mathfrak{R}_1$. Und in der nächstvorhergehenden Division, ist $\mathfrak{R}_2$ der Rest, und $\mathfrak{R}_1$ der Divisor, also ist $\mathfrak{R}_3$ wiederum der größte gemeinschaftliche Theiler des Divisors $\mathfrak{R}_1$ und des Dividenden $\mathfrak{R}$. Aber weil in der nächstvorhergehenden Division, $\mathfrak{R}$ der Divisor und $\mathfrak{R}_1$ der Rest ist, so ist $\mathfrak{R}_3$ wieder der größte gemeinschaftliche Theiler des Divisors $\mathfrak{R}$ und des

Dividenden B; und dann in der nächstvohrergehenden oder ersten Division, eben weil R_3 als der größte gemeinschaftliche Theiler des Dividenden B und des Restes R bereits erkannt worden ist, dieselbe ganze Funktion R_3 auch der größte gemeinschafliche Theiler von B und A.

5) Soll daher zwischen zwey ganzen Funktionen A und B der größte gemeinschaftliche Theiler gefunden werden, so darf man nur das im achten Kapitel für die ähnliche Aufgabe bey ganzen Zahlen, gelehrte praktische Verfahren unverändert anwenden; weil es aus denselben Sätzen abgeleitet werden kann.

6) Man kann auch bey jeder der einzelnen Divisionen, welche dieses praktische Verfahren erfordert, den Dividenden oder den Divisor, oder beyde, mit Ausdrücken P, Q, multipliziren, die nicht Null sind und zugleich unabhängig von dem Veränderlichen x, ohne daß dadurch dem Auffinden des größten gemeinschaftlichen Theilers ein Hinderniß erwüchse. Höchstens erhält man, wenn P der nach (Nr. 5.) gefundene größte gemeinschaftliche Theiler ist, jetzt R·P zum größten gemeinschaftlichen Theiler, wo R nach x konstant und nicht Null ist, der also noch von demselben Grade seyn muß (§. 430.).

Man bedient sich aber dieses Vortheils, um bey dem praktischen Auffinden des größten gemeinschaftlichen Theilers, jeden gebrochenen Ausdruck der Koeffizienten zu vermeiden. Ist nämlich D der Divisor vom pten Grade und 'D der Dividend vom Grade q, und sind die Koeffizienten der höchsten Potenzen von D und 'D, beziehlich A und 'A, so ist der Quotient vom Grade $q-p$, und in ihm $\frac{'A}{A}$ der Koeffizient von x^{q-p}. Die Koeffizienten der folgenden Glieder können dann gebrochene Ausdrücke werden, die der Reihe nach, A^2, A^3, ... A^{q-p+1} im Nenner haben. Diese gebrocheneu Ausdrücke vermeidet man nun allemal, wenn man, statt 'D durch D zu dividiren, vorher 'D mit A^{q-p+1} multiplizirt, also A^{q+p-1}·'D durch D dividirt, weil dann, wenn der vorhergehende Quotient Q war, der jetzige A^{q+p-1}·Q seyn muß.

Anmerkung. In besondern Fällen kann auch derselbe Zweck durch einen Faktor erreicht werden, welcher einfacher noch ist, als A^{q+p-1}.

Beyspiel. Es sey der den beyden ganzen Funktionen:

$x^5-3x^4-3x^3+7x^2-10x-8$ und $x^4+x^3-17x^2+x+6$

größte gemeinschaftliche Theiler zu finden.

Man erhält zuerst:

$$\begin{array}{l|l|l} x^4+x^3-17x^2+x+6 & x^5-3x^4-3x^3+7x^2-10x-8 & x-4 \\ & x^5+x^4-17x^3+x^2+6x & \\ \hline & -4x^4+14x^3+6x^2-16x-8 & \\ & -4x^4-4x^3+68x^2-4x-24 & \\ \hline \text{Erster Rest} & 18x^3-62x^2-12x+16 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l} 18x^3-62x^2-12x+16 & x^4+x^3-17x^2+x+6 & \frac{1}{18}x+\frac{20}{81} \\ & x^4-\frac{31}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{9}x & \\ \hline & \frac{40}{9}x^3-\frac{49}{3}x^2+\frac{1}{9}x+6 & \\ & \frac{40}{9}x^3-\frac{1240}{81}x^2-\frac{80}{27}x+\frac{320}{81} & \\ \hline \text{Zweyter Rest} & -\frac{83}{81}x^2+\frac{249}{81}x+\frac{166}{81} & \end{array}$$

Multiplizirt man diesen Rest mit $-\frac{81}{83}$, so erhält man x^2-3x-2, und das Geschäft wird weiter, wenn man den vorhergehenden Rest, als Dividenden, durch 2 dividert (oder mit $\frac{1}{2}$ multiplizirt),

$$\begin{array}{l|l|l} x^2-3x-2 & 9x^3-31x^2-6x+8 & 9x-4 \\ & 9x^3-27x^2-18x & \\ \hline & -4x^2+12x+8 & \\ & -4x^2+12x+8 & \\ \hline & 0 \quad 0 \quad 0. & \end{array}$$

Folglich ist x^2-3x-2 und dann auch $P(x^2-3x-2)$ der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler der beyden gegebenen Funktionen, wenn nur P nicht Null ist, und unabhängig von x.

Wollte man aber die gebrochenen Ausdrücke ganz vermeiden, so mußte schon bey der zweyten Division (des ersten Divisors durch den

ersten Rest) der Dividend $x^4+x^3-17x^2+x+6$ mit $(18)^2$ multiplizirt werden.

7) Haben die beyden ganzen Funktionen A und B nicht lauter bestimmte Ziffern-Ausdrücke zu Koeffizienten, sondern sind diese Koeffizienten zum Theil oder alle noch allgemein, und bleibt, wenn man zwischen A und B (nach Nr. 5. oder Nr. 6.) den größten gemeinschaftlichen Theiler sucht, ein letzter von x unabhängiger Rest, so gibt dieser Rest, wenn er gleich Null gesetzt wird, eine Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten der gegebenen ganzen Funktionen. Ist diese Gleichung in einem besondern gegebenen Falle nicht erfüllt, so haben die beyden gegebenen ganzen Funktionen keinen gemeinschaftlichen Theiler, der von einem höheren als vom nullten Grade wäre. Ist aber diese Gleichung von den Koeffizienten wirklich erfüllt, so muß nur dann nothwendig ein gemeinschaftlicher Theiler existiren, und durch den letzten Divisor (oder vorletzten Rest) ausgedrückt seyn, wenn dieselbe Endgleichung nicht zugleich bewirkt, daß in irgend einem der Divisoren, der Koeffizient der höchsten Potenz von x, der Null gleich wird. Denn so wie dies letztere wirklich der Fall ist, erhält man sogleich Quotienten von einem höhern, und Reste von einem niedrigern Grade, als diejenigen sind, welche bey dem Verfahren mit den allgemeinen Koeffizienten sich ergeben haben; so daß diese Quotienten und Reste dieses besondern Falles, nicht mehr in den beziehlichen Quotienten und Resten des allgemeinen Schema enthalten seyn können; weshalb dann auch der letzte Rest dieses besondern Falles, nicht nothwendig in dem letzten Rest des allgemeinen Schema enthalten, daher auch nicht nothwendig mit diesem letztern zugleich, Null seyn muß.

Nichts desto weniger kann aber doch für diesen Fall ein gemeinschaftlicher Faktor oder Theiler existiren, der aber für diese besondern Funktionen auf's neue, auf dem (Nr. 5. oder Nr. 6.) beschriebenen Wege gesucht werden muß.

§. 433. Lehrsatz.

Ist α ein Werth von x, welcher die ganze Funktion von x, nämlich:

$$A_0 \cdot x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + A_3 \cdot x^{m-3} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m$$

der Null gleich macht, so ist diese ganze Funktion von x, welche auch durch F(x) bezeichnet seyn kann, durch $x - \alpha$ theilbar, und der Quotient ist

$$= A_0 \cdot x^{m-1} + \left| \begin{matrix} \alpha A_0 \\ + A_1 \end{matrix} \right| x^{m-2} + \left| \begin{matrix} \alpha^2 \cdot A_0 \\ + \alpha \cdot A_1 \\ + A_2 \end{matrix} \right| x^{m-3} + \cdots + \left| \begin{matrix} \alpha^{m-2} \cdot A_0 \\ + \alpha^{m-3} \cdot A_1 \\ + \alpha^{m-4} \cdot A_2 \\ + \alpha^{m-5} \cdot A_3 \\ + \\ \vdots \\ + A_{m-2} \end{matrix} \right| x + \left| \begin{matrix} \alpha^{m-1} \cdot A_0 \\ + \alpha^{m-2} \cdot A_1 \\ + \alpha^{m-3} \cdot A_2 \\ + \alpha^{m-4} \cdot A_3 \\ + \\ \vdots \\ + \alpha \cdot A_{m-2} \\ + A_{m-1} \end{matrix} \right| .$$

Bedient man sich aber bey diesem Satze der kombinatorischen Aggregate, so lautet er so: Ist α ein Werth von x, welcher die ganze Funktion F(x) oder $S\left[A_a \cdot x^{m-a}\right]_{a+b=m}$ zu Null macht, so ist diese Funktivn F(x) durch $(x - \alpha)$ theilbar; und der Quotient wird:

$$\frac{F(x)}{x-\alpha} = S\left[\alpha^b A_a \cdot x^{m-1-c}\right]_{a+b=c,\ c+b=m-1}.$$

Beweis. Denn es ist, wenn $F(\alpha)$ das bezeichnet, was aus $F(x)$ wird, sobald man α statt x setzt,

1) $$F(\alpha) = S\left[\underset{a+b=m}{A_a \cdot \alpha^{m-a}}\right] = 0,$$

folglich:

2) $$F(x) = F(x) - F(\alpha) = S\left[\underset{a+b=m}{A_a \cdot (x^{m-a} - \alpha^{m-a})}\right].$$

Nun ist aber, wenn a ein stehender Werth ist, wie man durch ganz gemeine Division erhält:

3) $$\frac{x^{m-a} - \alpha^{m-a}}{x-\alpha} = S\left[\underset{b+c=m-a-1}{\alpha^b \cdot x^{m-a-1-b}}\right] = S\left[\underset{a+b=d,\ c+d=m-1}{\alpha^b \cdot x^{m-1-d}}\right];$$

folglich, wenn man (2.) durch $x-\alpha$ dividirt, und statt des Quotienten zur Rechten, den Werth aus (3.) substituirt:

$$\frac{F(x)}{x-\alpha} = S\left[\underset{a+b=d,\ c+d=m-1}{\alpha^b \cdot A_a \cdot x^{m-1-d}}\right],$$

welches zu erweisen war.

Und setzt man hier statt d nach und nach $0, 1, 2, \ldots$ bis zuletzt $m-1$, und, während d irgend einen Werth hat, für a und b, alle die Werthe, welche der Gleichung $a+b=d$, genügen, so findet sich genau der oben im Lehrsatz, ohne Aggregaten-Bezeichnung, völlig entwickelt stehende Ausdruck *).

Anmerkung. Eine solche ganze Funktion $F(x)$, vom $m$ten Grade, welche für $x = \alpha$, der Null gleich wird, läßt sich daher allemal in das Produkt $(x-\alpha) \cdot f(x)$ verwandeln, wo $f(x)$ eine ganze Funktion vom $m-1$ten Grade ist. In so ferne aber $f(x)$ selber wieder Null werden sollte für $x = \alpha$, würde $F(x)$ in das Produkt $(x-\alpha)^2 \cdot \varphi(x)$, oder wohl gar in $(x-\alpha)^3 \cdot \psi(x)$, oder endlich in $(x-\alpha)^\mu \cdot \pi(x)$ verwandet werden können, wo $\pi(x)$ eine ganze Funktion von x, vom $m-\mu$ten Grade ist.

---

*) Anfänger werden wohl thun, den Beweis zu wiederholen, aber ohne sich der Aggregate zu bedienen, d. h. für alle einzelne Glieder dasselbe Geschäft zu wiederholen, was hier für den Repräsentanten aller Glieder einmal geschehen ist. Diese werden dann finden, daß der Beweis kein anderer ist, als wie solcher schon für die Fälle, wo $m = 2, 3,$ oder 4 war, in den (§§. 252. 278. 307.) geführt worden, und daselbst zu finden ist. Man vergleiche aber auch (Anmerkung 1.) zu (§. 422.).

§. 434. Lehrsatz.

Läßt sich eine reele ganze Funktion $F(x)$ in zwey Faktoren von der Form

$$f(x)+i\cdot\varphi(x) \quad \text{und} \quad \psi(x)+i\cdot\pi(x)$$

zerlegen, so ist sie auch allemal das Produkt dieser beyden andern Faktoren

$$f(x)-i\cdot\varphi(x) \quad \text{und} \quad \psi(x)-i\cdot\pi(x),$$

wenn nur $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\pi(x)$ selbst wieder reele ganze Funktionen von x sind, von beliebigem, also z. B. auch vom nullten Grade.

Beweis. Denn da i einen beliebigen der beyden Formwerthe $+\sqrt{-1}$ oder $-\sqrt{-1}$ vorstellt, so kann man allemal, wo i steht, durchaus $-i$ setzen. Setzt man aber in der Gleichung:

$$\frac{F(x)}{f(x)+i\cdot\varphi(x)} = \psi(x)+i\cdot\pi(x),$$

durchaus $-i$ statt i, so ändern sich dadurch $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und $\pi(x)$ nicht, weil sie reele Funktionen sind, also i nicht enthalten; folglich erhält man zugleich:

$$\frac{F(x)}{f(x)-i\cdot\varphi(x)} = \psi(x)-i\cdot\pi(x).$$

Anmerkung. Multiplizirt man $f(x)+i\cdot\varphi(x)$ mit $\psi(x)+i\cdot\pi(x)$, so erhält man:

$$[f(x)\cdot\psi(x)-\varphi(x)\cdot\pi(x)]+i[f(x)\cdot\pi(x)+\varphi(x)\cdot\psi(x)].$$

Und multiplizirt man $f(x)-i\cdot\varphi(x)$ mit $\psi(x)-i\cdot\pi(x)$, so erhält man dieselben beyden Theile, aber den zweyten imaginären Theil mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen. Weil aber das erstere Produkt die reele Funktion $F(x)$ geben muß, so muß dieser zweyte Theil Null seyn, nämlich es muß $f(x)\cdot\pi(x)+\varphi(x)\cdot\psi(x) = 0$ seyn, und so fällt in die Augen, wie nun auch das zweyte Produkt dasselbe Resultat $F(x)$ liefert.

§. 435. Zusatz.

Haben in einer ganzen Funktion von x,

$$S[A_a\cdot x^{m-a}]$$

die Koeffizienten A_a die Form $B_a+i\cdot C_a$, wo B_a und C_a reel

sind (also auch Null seyn können), so geht diese ganze Funktion über in:

$$S[B_a \cdot x^{m-a}] + i \cdot S[C_a \cdot x^{m-a}],$$

also in die Form:

$$f(x) + i \cdot \varphi(x),$$

wo $f(x)$ und $\varphi(x)$, reele ganze Funktionen von x sind, d. h. ganze Funktionen von x, mit reelen Koeffizienten. — Jede ganze Funktion von x, welche allgemein-numerische Zahlformen zu Koeffizienten hat (nämlich Ausdrücke von der Form $p + i \cdot q$, wo p und q reel sind), läßt sich daher immer auf die Form bringen:

$$f(x) + i \cdot \varphi(x),$$

wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ reele ganze Funktionen sind.

Ist also eine reele ganze Funktion $F(x)$ durch eine imaginäre ganze Funktion von der Form $f(x) + i \cdot \varphi(x)$ theilbar, so ist sie auch durch die andere imaginäre Funktion $f(x) - i \cdot \varphi(x)$, welche $-i$ hat, wo jene i, theilbar. Und dies gilt noch, wenn $f(x)$ vom ersten Grade, etwa $x - p$, uud $\varphi(x)$ vom nullten Grade, etwa $\pm q$ seyn sollte; so daß also, wenn $F(x)$ durch $x - p - qi$ theilbar ist, solche dann auch durch $x - p + qi$, und natürlich dann auch durch das Produkt $(x - p - qi)(x - p + qi)$, d. h. durch $x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$ theilbar seyn muß.

Zweyte Abtheilung.

Von den Ableitungen der ganzen Funktionen.

---

§. 436. Erklärung.

Multiplizirt man in einer ganzen Funktion von x, nämlich in

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \cdots + Px^3 + Qx^2 + Rx + S,$$

in welcher statt Rx und statt S, vorher Rx^1 und Sx^0 gesetzt wird, und die dann durch $F(x)$ bezeichnet seyn mag, jedes Glied mit dem ihm zugehörigen Exponenten von x, während man

nachher denselben Exponenten von x um 1 vermindert, so entsteht eine neue ganze Funktion von x, nämlich:

1) $mAx^{m-1}+(m-1)Bx^{m-2}+(m-2)Cx^{m-3}+\cdots$
$+3Px^2+2Qx^1+Rx^0,$

und diese werde die erste Ableitung von F(x), oder auch, die Ableitung von F(x) schlechthin genannt, und immer durch

$$\partial F(x)$$

bezeichnet. — Verfährt man dann mit dieser ganzen Funktion $\partial F(x)$ auf gleiche Art, so erhält man:

2) $m^{2|-1}Ax^{m-2}+(m-1)^{2|-1}Bx^{m-3}+(m-2)^{2|-1}Bx^{m-4}+\cdots$
$+3^{2|-1}.Px^1+2^{2|-1}Qx^0,$

und diese ganze Funktion heiße die zweyte Ableitung von F(x), und werde durch $\partial^2 F(x)$ bezeichnet. Eben so sollen die Zeichen $\partial^3 F(x)$, $\partial^4 F(x)$, $\cdots \partial^n F(x)$ beziehlich die dritten, vierten, ...nten Ableitungen bezeichnen, diese letztern aber aus einander eben so, wie $\partial F(x)$ aus F(x) abgeleitet seyn, so daß:

3) $\partial^3 F(x)=m^{3|-1}Ax^{m-3}+(m-1)^{3|-1}Bx^{m-4}+(m-2)^{3|-1}Cx^{m-5}+\cdots$

4) $\partial^4 F(x)=m^{4|-1}Ax^{m-4}+(m-1)^{4|-1}Bx^{m-5}+(m-2)^{4|-1}Cx^{m-6}+\cdots$

$\vdots$

5) $\partial^n F(x)=m^{n|-1}Ax^{m-n}+(m-1)^{n|-1}Bx^{m-n-1}+(m-2)^{n|-1}Cx^{m-n-2}+\cdots$

endlich:

6) $\partial^m F(x)=m^{m|-1}Ax^0=m!\cdot A,$

und $\partial^{m+1}F(x)=\partial^{m+2}F(x)=$ ꝛc. ꝛc. $=0$ wird.

Anmerkung. Setzt man in (5.), $n=1$, so erhält man $\partial^1 F(x)=\partial F(x)$, und für $n=0$, auch $\partial^0 F(x)=F(x)$. Will man diese Bezeichnungen beybehalten, so gilt dann die Formel (5.), wenn n Null oder jede beliebige absolute ganze Zahl vorstellt.

§. 437. Zusatz.

Dem zu Folge hat man:

$$\partial^{n+1}F(x)=\partial[\partial^n F(x)],$$

wo n Null oder jede absolute ganze Zahl bezeichnet.

§. 438. Zusatz.

Auch folgt sogleich:

1) $\partial \cdot Ax^m = mAx^{m-1}$, 2) $\partial \cdot x^m = mx^{m-1}$,

3) $\partial \cdot Ax = A$, 4) $\partial \cdot x = 1$,

endlich 5) $\partial \cdot A = 0$;

d. h. die in diesen Gleichungen zur Linken stehenden Ableitungen, bezeichnen die zur Rechten stehenden Ausdrücke; obiger Definition zu Folge.

§. 439. Zusatz.

Bedient man sich der Aggregatenbezeichnung, so kann man die ganze Funktion F(x) vom mten Grade, steigend geordnet, durch das Aggregat:

$$S\left[\underset{a+b=m}{A_a \cdot x^a}\right]$$

vorstellen, und man hat dann:

1) $F(x) = S\left[\underset{a+b=m}{A_a \cdot x^a}\right]$;

2) $\partial F(x) = S\left[\underset{a+b=m}{a \cdot A_a \cdot x^{a-1}}\right] = S\left[\underset{a+b=m-1}{(a+1) \cdot A_{a+1} \cdot x^a}\right]$ (§. 389.);

3) $\partial^2 F(x) = S\left[\underset{a+b=m-1}{a(a+1)A_{a+1}x^{a-1}}\right] = S\left[\underset{a+b=m-2}{(a+1)(a+2)A_{a+2} \cdot x^a}\right]$;

4) $\partial^3 F(x) = S\left[\underset{a+b=m-2}{a^{3|1} \cdot A_{a+2} \cdot x^{a-1}}\right] = S\left[\underset{a+b=m-3}{(a+1)^{3|1} \cdot A_{a+3} \cdot x^a}\right]$;

u. s. w. f.

5) $\partial^n F(x) = S\left[\underset{a+b=m-n}{(a+1)^{n|1} \cdot A_{a+n} \cdot x^a}\right]$;

und

6) $\partial^m F(x) = S\left[\underset{a+b=m-m=0}{(a+1)^{m|1} \cdot A_{a+m} \cdot x^a}\right] = 1^{m|1} \cdot A_m = m!A_m$.

Und denkt man sich F(x), fallend geordnet, durch das Aggregat:

$$S[B_a \cdot x^{m-a}]$$

vorgestellt, so hat man:

$$F(x) = S[B_a \cdot x^{m-a}],$$
$$\partial F(x) = S[(m-a)B_a \cdot x^{m-1-a}],$$
$$\partial^2 F(x) = S[(m-a)^{2|-1}B_a \cdot x^{m-2-a}],$$
$$\partial^3 F(x) = S[(m-a)^{3|-1}B_a \cdot x^{m-3-a}],$$

u. s. w. f.

$$\partial^n F(x) = S[(m-a)^{n|-1}B_a \cdot x^{m-n-a}],$$

und

$$\partial^m F(x) = S[(m-a)^{m|-1}B_a \cdot x^{m-m-a}].$$

Weil man aber zu keiner negativen Potenz von x gelangen kann, so kann in $\partial^n F(x)$ der größte Werth von a, nur m—n seyn (weshalb man diesem Aggregat, welches $= \partial^n F(x)$ ist, noch die beschränkende Gleichung $a+b = m-n$ hinzufügen muß, wenn man alles genau ausgedrückt sehen will); und es hat in $\partial^m F(x)$, der Buchstabe a offenbar nur den einzigen Werth 0 (Null), so daß dieses letztere Aggregat blos das einzige Glied $m^{m|-1}B_0 \cdot x^0$, d. h. $m!B_0$ liefert.

§. 440.

Betrachtet man den binomischen Lehrsatz in der Form, wie solche gegen Ende des (§. 402.) zu sehen ist; wenn x und h und p, statt a und b, und m, gesetzt werden, so läßt er sich auch so schreiben:

$$(x+h)^p = S\left[\partial^a(x^p) \cdot \frac{h^a}{a!}\right],$$

d. h. $= x^p + \partial(x^p) \cdot h + \partial^2(x^p) \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3(x^p) \cdot \frac{h^3}{3!} + \ldots\ldots$

Und weil jede ganze Funktion F(x) aus lauter solchen Gliedern Px^p besteht, so führt uns diese Betrachtung zu

dem Taylor'schen Lehrsatz für ganze Funktionen,

wie er nun hier folgt.

Der Taylor'sche Lehrsatz für ganze Funktionen.

Ist $F(x)$ eine ganze Funktion vom mten Grade, so ist allemal, wenn $F(x+h)$ das bezeichnet, was aus $F(x)$ wird, wenn man $x+h$ statt x setzt:

$$F(x+h) = F(x)+\partial F(x)\cdot\frac{h}{1}+\partial^2 F(x)\cdot\frac{h^2}{2!}+\partial^3 F(x)\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots$$
$$+\partial^{m-1}F(x)\cdot\frac{h^{m-1}}{(m-1)!}+\partial^m F(x)\cdot\frac{h^m}{m!}.$$

Beweis. Denn es sey Px^p ein Glied von $F(x)$, so geht solches über, nach dem binomischen Lehrsatze des (§. 401.), und besonders nach der zu Ende des (§. 402.) erwähnten Form, in:

$$P(x+h)^p \text{ oder } Px^p+pPx^{p-1}\cdot h+p^{2|-1}Px^{p-2}\frac{h^2}{2!}+p^{3|-1}Px^{p-3}\frac{h^3}{3!}+\cdots$$
$$+p^{p-1|-1}Px^1\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}+p^{p|-1}Px^0\cdot\frac{h^p}{p!};$$

und daraus ergibt sich der Lehrsatz unmittelbar.

Anmerkung 1. Da in diesem Taylorschen Lehrsatze die Glieder zur Rechten ebenfalls einem in die Augen fallenden Gesetze folgen, so können sie alle bequem durch ein Aggregat vorgestellt werden, so daß man hat:

$$F(x+h) = S\left[\partial^a F(x)\cdot\frac{h^a}{a!}\right]_{a+b=m},$$

in welcher Gestalt dieser Satz an Einfachheit und Eleganz nichts zu wünschen übrig läßt.

Anmerkung 2. Ueberhaupt würde es einfacher, eleganter und übersichtlicher seyn, wenn man den im Lehrsatze angedeuteten Beweis mit Hilfe der Aggregate geben wollte. — Es sey nämlich:

$$1)\quad F(x) = S\left[A_a\cdot x^a\right]_{a+b=m},$$

vom mten Grade, so ist:

$$2)\quad F(x+h) = S\left[A_a\cdot(x+h)^a\right]_{a+b=m}.$$

Aber nach (§. 402.) ist für jeden stehenden Werth von a:

$$(x+h)^a = S\left[(b+c)^{c|-1}x^b\cdot\frac{h^c}{c!}\right]_{b+c=a};$$

folglich, wenn man diesen Werth oben substituirt:

3) $F(x+h)$

$$= S\left[(b+c)^{c|-1} A_{b+c} x^b \cdot \frac{h^c}{c!}\right] = S\left[(b+1)^{c|1} A_{b+c} x^b \cdot \frac{h^c}{c!}\right],$$
$$b+c+d=m \qquad\qquad b+d=m-c$$

weil $(b+c)^{c|-1} = (b+1)^{c|1}$ ist. Und da endlich nach (§. 439. Nr. 5.) für jeden stehenden Werth von c,

$$\partial^c F(x) = S\left[(b+1)^{c|1} A_{b+c} x^b\right]$$
$$b+d=m-c$$

ist, so folgt, wenn man dies in (3.) substituirt:

$$F(x+h) = S\left[\partial^c F(x) \cdot \frac{h^c}{c!}\right],$$

wo die beschränkende Gleichung zwar fehlt, aber auch fehlen kann, da wir wissen, daß $\partial^c F(x) = 0$ wird, so oft $c > m$.

§. 441. Zusatz.

Man erhält daher auch die Ableitung $\partial F(x)$, wenn man in $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, $h = 0$ setzt, vorausgesetzt, daß solcher Ausdruck vorher in einen andern verwandelt ist, der für $h = 0$ nicht Null als Divisor erhält.

Denn bringt man in vorstehendem Lehrsatze, $F(x)$ auf die linke Seite, und dividirt man auf beyden Seiten durch h, so erhält man rechts $\partial F(x)+$ einer Reihe von Gliedern, die mit h, h^2 ꝛc. multiplizirt sind, welche also wegfallen, wenn $h = 0$ gesetzt wird.

§. 442. Zusatz.

Sind daher $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze Funktionen von x, und A ein nach x konstanter Ausdruck, so ist noch:

I. $\partial\,[A \cdot f(x)] = A \cdot \partial f(x)$;

II. $\partial\,[f(x) \pm \varphi(x)] = \partial f(x) \pm \partial \varphi(x)$,

III. $\partial\,[f(x) \cdot \varphi(x)] = \varphi(x) \cdot \partial f(x) + f(x) \cdot \partial \varphi(x)$.

Denn man erhält $\partial[f(x) \cdot \varphi(x)]$, wenn man in:

$$\frac{f(x+h) \cdot \varphi(x+h) - f(x) \cdot \varphi(x)}{h} \qquad \ldots\ldots(A)$$

vorher durch h wegdividirt, und dann $h = 0$ setzt. Setzt man aber

in diesen Ausdruck (A) statt $f(x+h)$ und $\varphi(x+h)$ die Summen, wie sie der Lehrsatz des (§. 440.) liefert, so ergibt sich das Behauptete augenblicklich.

§. 443. Lehrsatz.

Sind zwey ganze Funktionen von x, z. B. $F(x)$ und $\Phi(x)$ einander gleich (für jeden Werth von x), so sind auch ihre Ableitungen $\partial F(x)$ und $\partial\Phi(x)$, einander gleich.

Beweis. Denn da $F(x)$ und $\varphi(x)$ für jeden Werth von x einander gleich sind, so sind auch $F(x+h)$ und $\varphi(x+h)$,

d. h. $$F(x)+\partial F(x)\cdot h+\partial^2 F(x)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots\cdot$$

und $$\varphi(x)+\partial\varphi(x)\cdot h+\partial^2\varphi(x)\cdot\frac{h^2}{2!}+\cdots\cdot$$

für jeden Werth von h einander gleich, also auch die einzelnen Koefizienten in beyden Reihen einander gleich, also auch

$$\partial F(x) = \partial\varphi(x).$$

Anmerkung. Der umgekehete Satz gilt nicht; d. h. ist $\partial f(x) = \partial\psi(x)$, so ist nicht nothwendig auch $f(x) = \psi(x)$, sondern es kann auch $f(x) = \psi(x)+A$ seyn, wo A einen beliebigen, nach x konstanten Ausdruck vorstellt.

§. 444. Lehrsatz.

Ist $f(x)$ eine ganze Funktion von x von beliebigem Grade, und m eine positive ganze Zahl, so daß $[f(x)]^m$ selber wieder eine ganze Funktion von x vorstellt, so ist allemal:

$$\text{IV.}\quad \partial\cdot[f(x)]^m = m\cdot[f(x)]^{m-1}\cdot\partial f(x).$$

Beweis. Man erhält nach (§. 441.) $\partial\cdot[f(x)]^m$, wenn man in dem Ausdruck:

$$\frac{[f(x+h)]^m-[f(x)]^m}{h}$$

durch h wirklich wegdividirt, und nachgehends $h = 0$ setzt. — Nun ist aber:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+\partial f(x)\cdot h+[\varphi(x,h)]\cdot h^2 \\ &= f(x)+[\partial f(x)+h\cdot\varphi(x,h)]\cdot h, \end{aligned}$$

wenn man die übrigen Glieder des Taylor'schen Lehrsatzes, h^2 als

gemeinschaftlichen Faktor herausſetzend, in das Glied $[\varphi(x,h)]\cdot h^2$ zuſammen gefaßt ſich denkt, wo dann $\varphi(x,h)$ eine Summe vorſtellt von Gliedern, welche ſelber wieder mit h oder mit höhern Potenzen von h multiplizirt ſeyn können und werden. Folglich iſt nach dem binomiſchen Lehrſatze des (§. 401.):

$$[f(x+h)]^m = \left[f(x)+[\partial f(x)+h\cdot\varphi(x,h)]\cdot h\right]^m$$
$$= [f(x)]^m + m\cdot[f(x)]^{m-1}\cdot[\partial f(x)+h\varphi(x,h)]h + \text{ꝛc. ꝛc.}$$

alſo:

$$\frac{[f(x+h)]^m-[f(x)]^m}{h} = m\cdot[f(x)]^{m-1}\cdot[\partial f(x)+h\varphi(x,h)]+ \text{ꝛc. ꝛc.};$$

und dieſer Ausdruck zur Rechten verwandelt ſich in:

$$m\cdot[f(x)]^{m-1}\cdot\partial f(x),$$

ſobald $h = 0$ geſetzt wird. W. Z. E. W.

Anmerkung. Es lehren aber die Formeln (I.—IV.) der (§§. 442. und 443.), wie die Ableitungen einer Summe, Differenz, eines Produkts zweyer ganzen Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$, endlich auch, wie die Ableitung einer mten Potenz einer ganzen Funktion $f(x)$, ſchnell hingeſchrieben werden können, wenn die Ableitungen der einzelnen Beſtandtheile $f(x)$, $\varphi(x)$ bekannt ſind.

§. 445. Haupt-Lehrſatz der Ableitungen.

Dieſer letztere Satz läßt ſich noch auf eine Summe von Gliedern von der Form:

$$B_0+B_1\cdot f(x)+B_2\cdot[f(x)]^2+B_3\cdot[f(x)]^3+\cdots B_m\cdot[f(x)]^m$$

ausdehnen, welche, wenn $f(x)$ eine ganze Funktion von beliebigem, z. B. nten Grade iſt, ſelber wieder eine ganze Funktion von x vom (mn)ten Grade vorſtellt; und er kann in nachſtehender Form gegeben werden:

Stellt $F(z)$ eine ganze Funktion von z vor vom mten Grade, z B. $S\left[B_a\cdot z^a\right]_{a+b=m}$, und iſt z ſelber wieder eine ganze Funktion $f(x)$ von x, z. B. vom nten Grade, ſo wird auch $F(z)$ eine ganze Funktion von x werden, welche durch F_x bezeichnet ſeyn mag, und man hat allemal:

$$\text{V.}\quad \partial F_x = \partial F(z)\cdot\partial f(x).$$

Beyspiel. Ist etwa $F(z) = a + bz + cz^2$,
und $z = f(x) = \beta x + \delta x^3$, so ist
$z^2 = \beta^2 x^2 + 2\beta\delta x^4 + \delta^2 x^6$,
und $F_x = a + b\beta x + c\beta^2 x^2 + b\delta x^3 + 2c\beta\delta x^4 + c\delta^2 x^6$.

Demnach:

1) $\partial F_x = b\beta + 2c\beta^2 x + 3b\delta x^2 + 8c\beta\delta x^3 + 6c\delta^2 x^5$;

2) $\partial F(z) = b + 2cz = b + 2c(\beta x + \delta x^3) = b + 2c\beta x + 2c\delta x^3$;

3) $\partial f(x) = \beta + 3\delta x^2$;

und multiplizirt man die beyden letztern Ausdrücke mit einander, so kommt in der That der erstere heraus, wie es der Lehrsatz (V.) behauptet.

Beweis. Denn nach (§. 441.) erhält man:

∂F_x aus $\frac{F_{x+h} - F_x}{h}$, wenn man, nachdem durch h wirklich wegdividirt ist, $h = 0$ setzt. Nun ist aber nach (§. 440.) und (§. 443.):

$$f(x+h) = f(x) + [\partial f x + h \cdot \varphi(x,h)] \cdot h = z + k,$$

wenn z statt $f(x)$ und k statt $[\partial f(x) + h \cdot \varphi(x,h)] \cdot h$ gesetzt wird. Dann ist auch, wiederum nach (§. 440):

$$F_{x+h} = F(z+k) = F(z) + \partial F(z) \cdot k + \partial^2 F(z) \cdot \frac{k^2}{2!} + \text{ꝛc. ꝛc.},$$

oder, wenn man F_x statt $F(z)$, und statt k seinen Werth in h substituirt:

$$F_{x+h} = F_x + \partial F(z) \cdot [\partial f(x) + h \cdot \varphi(x,h)] \cdot h + \partial^2 F(z) \cdot [\partial f x + h \cdot \varphi(x,h)]^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

Also:

$$\frac{F_{x+h} - F_x}{h} = \partial F(z) \cdot [\partial f(x) + h \cdot \varphi(x,h)] + \partial^2 F(z) \cdot [\partial f(x) + h \cdot \varphi(x,h)] \cdot \frac{h}{2!} + \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Und wenn man hier $h = 0$ setzt, um ∂F_x zu erhalten, so fallen rechts alle Glieder fort, welche mit h noch multiplizirt erscheinen, so daß der ganze Ausdruck rechts sich blos auf

$$\partial F(z) \cdot \partial f(x)$$

reduzirt. Welches zu erweisen war.

446

§. ~~405.~~ Zusatz.

Aus diesen Formeln (I.—V.) folgt aber noch, weil

$$\partial \cdot (x - a) = 1$$

ist,

1) $\partial \cdot [(x-a)^m] = m \cdot (x-a)^{m-1}$;

2) $\partial^2 \cdot [(x-a)^m] = m^{2|-1} \cdot (x-a)^{m-2}$;

3) $\partial^3 \cdot [(x-a)^m] = m^{3|-1} \cdot (x-a)^{m-3}$;

u. s. w. f.

4) $\partial^n \cdot [(x-a)^m] = m^{n|-1} \cdot (x-a)^{m-n}$, wenn $n < m$;

5) $\partial^m \cdot [(x-a)^m] = m!$;

6) $\partial^{m+\mu} [(x-a)^m] = 0$;

und auch noch

7) $\partial \cdot [(x-a)^m f(x)] = (x-a)^{m-1} \cdot [mf(x) + (x-a) \cdot \partial f(x)]$*),

wenn nur m, n, μ positive ganze Zahlen sind, $m > n$, und f(x) eine beliebige ganze Funktion von x ist.

§. 447. Lehrsatz.

Sind f(x) und $\varphi(x)$ beliebige ganze Funktionen, und ist $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$, so ist:

$$\partial^n \cdot F(x) = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\,b!} \cdot \partial^a f(x) \cdot \partial^b \varphi(x)\right]_{a+b=n} = S[n_a \cdot \partial^{n-a} f(x) \cdot \partial^a \varphi(x)]$$

oder:

$$\partial^n F(x) = f(x) \cdot \partial^n \varphi(x) + n_1 \cdot \partial f(x) \cdot \partial^{n-1} \varphi(x) + n_2 \cdot \partial^2 f(x) \cdot \partial^{n-2} \varphi(x)$$
$$+ n_3 \cdot \partial^3 f(x) \cdot \partial^{n-3} \varphi(x) + \cdots + n_2 \cdot \partial^{n-2} f(x) \cdot \partial^2 \varphi(x)$$
$$+ n_1 \cdot \partial^{n-1} f(x) \cdot \partial \varphi(x) + \partial^n f(x) \times \varphi(x).$$

Beweis. Man zeigt, daß der Satz gilt für $n = 2$. Man beweis't dann, daß wenn er für $m = p$ gilt, er dann auch immer für $m = p+1$ gelten müsse.

§. 448. Zusatz.

Daher ist auch, nach (§. 447.) und (§. 446. Nr. 4.):

---

*) Es ist nämlich zunächst nach (§. 442. III.):

$$\partial[(x-a)^m \cdot f(x)] = f(x) \cdot \partial[(x-a)^m] + (x-a)^m \cdot \partial f(x),$$

woraus diese (Nr. 7.) sogleich hervorgeht, wenn man bedenkt, daß nach (Nr. 1.) $\partial(x-a)^m = m(x-a)^{m-1}$ ist.

$$\partial^n[(x-a)^m \cdot f(x)] = (x-a)^m \cdot \partial^n f(x) + n_1 \cdot m(x-a)^{m-1} \cdot \partial^{n-1} f(x)$$
$$+ n_2 \cdot m^{2|-1} \cdot (x-a)^{m-2} \cdot \partial^{n-2} f(x) + n_3 \cdot m^{3|-1} \cdot (x-a)^{m-3} \cdot \partial^{n-3} f(x)$$
$$+ \cdots + n_1 \cdot m^{n-1|-1} (x-a)^{m-n+1} \cdot \partial f(x) + m^{n|-1} \cdot (x-a)^{m-n} \cdot f(x);$$

wobey noch bemerkt werden kann, daß wenn n und m absolute ganze Zahlen, und $n = m$, das letzte Glied $= m!f(x)$ ist; daß aber, wenn $n > m$, $n-m$ der letzten Glieder der Null gleich werden, so daß das letzte Glied, welches nicht $= 0$ ist, $= n^{m|-1} \cdot \partial^{n-m} f(x)$ seyn muß (wenn m eine absolute ganze ist); weil nämlich, wenn in (§. 447.) $(x-a)^m$ statt $\varphi(x)$ gesetzt wird $\partial^\mu \varphi(x) = 0$ wird, so oft $\mu > m$ ist, nach (§. 346. Nr. 6.).

§. 449. Zusatz.

Es folgt aber hieraus:

1) Ist $F(x)$ eine ganze Funktion von x, und durch $(x-a)^m$ theilbar, dabey m eine absolute ganze Zahl, so ist ihre Ableitung $\partial F(x)$ durch $(x-a)^{m-1}$, und die Ableitung $\partial^n F(x)$ durch $(x-a)^{m-n}$ theilbar. — Und ist $F(x)$ durch keine höhere Potenz von $x-a$ theilbar, als durch die mte; so ist auch $\partial^n F(x)$ durch keine höhere Potenz von $x-a$ theilbar, als durch die $m-n$te. — Daher ist dann $\partial^m F(x)$ gar nicht mehr durch $x-a$ theilbar.

2) Ist daher $F(x)$ durch $(x-a)^m$ und $(x-b)^n$ und $(x-c)^p$ u. s. w. theilbar, aber nicht durch höhere Potenzen von $x-a$ und $x-b$ und $x-c$ u. s. w.; so ist auch $\partial^\mu F(x)$ durch

$$(x-a)^{m-\mu} \cdot (x-b)^{n-\mu} \cdot (x-c)^{p-\mu} \cdot \text{ꝛc. ꝛc.}$$

theilbar, aber durch kein ähnliches Produkt, welches beziehlich höhere Potenzen von $x-a$, $x-b$ oder $x-c$ u. s. w. enthielte. — Und $F(x)$ und $\partial F(x)$ haben dann zum größten gemeinschaftlichen Theiler das Produkt:

$$(x-a)^{m-1} \cdot (x-b)^{n-1} \cdot (x-c)^{p-1} \cdot \ldots \cdot$$

während $\partial^{\mu-1}F(x)$ und $\partial^{\mu}F(x)$ zum größten gemeinschaftlichen Theiler haben, das Produkt:

$$(x-a)^{m-\mu}\cdot(x-b)^{n-\mu}\cdot(x-c)^{p-\mu}\cdot\cdot\cdot\cdot$$

3) Umgekehrt; ist $\partial^{\mu}F(x)$ durch $(x-a)^{n}\cdot(x-b)^{p}\cdot(x-c)^{q}\cdots$ theilbar, aber durch kein Produkt, welches beziehlich höhere Potenzen von $x-a$, $x-b$ oder $x-c$ u. s. w. als Faktoren enthielte, so ist auch die vorhergehende Ableitung $\partial^{\mu-1}F(x)$ durch $(x-a)^{n+1}\cdot(x-b)^{p+1}\cdot(x-c)^{q+1}$ ꝛc. ꝛc., und $F(x)$ selbst durch $(x-a)^{n+\mu}\cdot(x-b)^{p+\mu}\cdot(x-c)^{q+\mu}$ ꝛc. theilbar; aber ebenfalls durch kein ähnliches Produkt, welches beziehlich höhere Potenzen von $x-a$, $x-b$, $x-c$ ꝛc. zu Faktoren hat. — Und die Ableitungen $\partial^{\mu-1}F(x)$ und $\partial^{\mu}F(x)$ haben dann auch zum größten gemeinschaftlichen Theiler $(x-a)^{n}\cdot(x-b)^{p}\cdot(x-c)^{q}\cdots$.

Anmerkung. Dies alles mag der folgende (§. 450.) noch allgemeiner geben.

§. 450. Zusatz.

Läßt sich eine ganze Funktion $F(x)$ auf die Form

$$f_1(x)\cdot[(x-\beta)(x-\beta_1)\cdots]^2[(x-\gamma)\cdot(x-\gamma_1)\cdots]^3\times\cdots\cdot\times[(x-\mu)\cdot(x-\mu_1)\cdots]^m$$

bringen, wo $f_1(x)$ die Form $(x-\alpha)(x-\alpha_1)\cdots$ haben mag oder nicht, aber durch keine Potenz von der Form $(x-\alpha)^r$ mehr theilbar seyn soll, $r>1$ vorausgesetzt, und wo endlich

$$\beta,\ \beta_1,\ \cdots\gamma,\ \gamma_1,\ \cdots,\ \delta\cdots,\ \mu,\ \mu_1,\ \cdots$$

alle von einander verschieden seyn sollen; so kann man:

$(x-\beta)(x-\beta_1)\cdots$ durch $f_2(x)$
$(x-\gamma)(x-\gamma_1)\cdots$ durch $f_3(x)$

u. s. w. f.

$(x-\mu)(x-\mu_1)\cdots$ durch $f_m(x)$

bezeichnen, wo dann $f_2(x)$, $f_3(x)\cdots f_m(x)$ so wenig als $f_1(x)$ durch Potenzen von der Form $(x-\alpha)^r$ theilbar seyn werden, r größer als 1 vorausgesetzt; und man hat dann:

$$F(x)=f_1(x)\cdot[f_2(x)]^2\cdot[f_3(x)]^3\cdots\cdot[f_m(x)]^m.$$

Bezeichnet man nun den größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen $F(x)$ und $\partial F(x)$ durch $F_1(x)$, zwischen $\partial F(x)$ und $\partial^2 F(x)$ durch $F_2(x)$ u. s. w. f., überhaupt zwischen $\partial^{n-1} F(x)$ und $\partial^n F(x)$ durch $F_n(x)$, so hat man nach (§. 449.):

$$F_1(x) = f_2(x) \cdot [f_3(x)]^2 \cdot \cdots \cdot [f_m(x)]^{m-1} \quad ;$$
$$F_2(x) = f_3(x) \cdot [f_4(x)]^2 \cdot \cdots \cdot [f_m(x)]^{m-2} \quad ;$$
$$F_3(x) = f_4(x) \cdot [f_5(x)]^2 \cdot \cdots [f_m(x)]^{m-3} \quad ;$$
$$F_4(x) = f_5(x) \cdot \cdots \cdot [f_m(x)]^{m-4} \quad ;$$

u. s. w. f.

$$F_{m-1}(x) = f_m(x).$$

Daraus folgt aber weiter:

$$\frac{F(x) \cdot F_2(x)}{F_1(x) \cdot F_1(x)} = f_1(x),$$
$$\frac{F_1(x) \cdot F_3(x)}{F_2(x) \cdot F_2(x)} = f_2(x),$$
$$\frac{F_2(x) \cdot F_4(x)}{F_3(x) \cdot F_3(x)} = f_3(x),$$
$$\frac{F_3(x) \cdot F_5(x)}{F_4(x) \cdot F_4(x)} = f_4(x),$$

u. s. w. f.; bis zuletzt

$$\frac{F_{m-3}(x) \cdot F_{m-1}(x)}{F_{m-2}(x) \cdot F_{m-2}(x)} = f_{m-2}(x),$$
$$\frac{F_{m-2}(x) \cdot 1}{F_{m-1}(x) \cdot F_{m-1}(x)} = f_{m-1}(x),$$

und

$$\frac{F_{m-1}(x) \cdot 1}{1 \cdot 1} = f_m(x)$$

wird.

Man kann sich daher dieses Verfahrens bedienen, um, wenn man weiß oder vermuthet, daß $F(x)$ eine solche Form, wie sie oben vorausgesetzt worden, hat, dadurch daß man nach und nach, nach (§. 436.), die Ableitungen hinschreibt, zwischen den Ableitungen die größten gemeinschaftlichen Theiler $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x) \cdots$ nach (§. 432.) sucht, und die zuletzt angezeigten Multiplikationen und Divisionen statt finden läßt, — um dadurch

also die Funktionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots f_m(x)$ zu erhalten, welche durch keine Potenz von der Form $(x-\alpha)^r$, $r>1$ gedacht, mehr theilbar und dabey so sind, daß:

$$F(x) = f_1(x)\cdot[f_2(x)]^2\cdot[f_3(x)]^3\cdot[f_4(x)]^4\cdots\cdot[f_m(x)]^m \text{ ist.}$$

Auf diesem Wege findet man alle einfachen, alle doppelten, alle dreyfachen, alle vierfachen u. s. w. f., überhaupt alle vielfachen Faktoren von F(x) mit einander multiplizirt, wie solche Produkte, nämlich in $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ ꝛc. vorgestellt sind.

Beyspiel. Ist

$$F(x) = x^9-2x^8-7x^7+14x^6+15x^5-30x^4-13x^3+26x^2+4x-8,$$

so ist

$$\vartheta F(x) = 9x^8-16x^7-49x^6+70x^5+75x^4-120x^3-39x^2+52x+4,$$
$$\vartheta^2F(x) = 72x^7-112x^6-294x^5+350x^4+300x^3-360x^2-78x+52,$$
$$\vartheta^3F(x) = 504x^6-672x^5-1470x^4+1400x^3+900x^2-720x-78,$$
$$\vartheta^4F(x) = 3024x^5-3360x^4-5880x^3+4200x^2+1800x-720,$$

u. s. w. f.

Daraus nach (§. 432.) die größten gemeinschaftlichen Faktoren:

$$F_1(x) = x^5-2x^4-2x^3+4x^2+x-2,$$
$$F_2(x) = x^2-1,$$
$$F_3(x) = F_4(x) = \text{ꝛc. ꝛc.} = 1.$$

Und nun findet man:

$$\frac{F(x)\cdot F_2(x)}{F_1(x)\cdot F_1(x)} = f_1(x) = x+2,$$
$$\frac{F_1(x)\cdot F_3(x)}{F_2(x)\cdot F_2(x)} = f_2(x) = x-2,$$
$$\frac{F_2(x)\cdot F_4(x)}{F_3(x)\cdot F_3(x)} = f_3(x) = x^2-1 = (x+1)(x-1),$$
$$\frac{F_3(x)\cdot F_5(x)}{F_4(x)\cdot F_4(x)} = f_4(x) = 1,$$

u. s. w. f.;

so daß also:

$$F(x) = f_1(x)\cdot[f_2(x)]^2\cdot[f_3(x)]^3,$$

d. h.

$$F(x) = (x+2)\cdot(x-2)^2\cdot[(x+1)(x-1)]^3$$

sich findet.

Anmerkung. Auch erhellet zu gleicher Zeit aus dem Vorstehenden, daß $F_2(x)$ wiederum der größte gemeinschaftliche Theiler zwischen

$F_1(x)$ und $\partial F_1(x)$; eben so, daß $F_3(x)$ auch der größte gemeinschaftliche Theiler ist zwischen $F_2(x)$ und $\partial F_2(x)$; überhaupt daß $F_4(x)$, $F_5(x)$, ꝛc. ꝛc. auch die größten gemeinschaftlichen Theiler sind, zwischen beziehlich $F_3(x)$ und $\partial F_3(x)$, $F_4(x)$ und $\partial F_4(x)$, u. s. w., durch welche Betrachtungen in manchen Fällen die Auffindung dieser Funktionen $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_4(x)$, ꝛc. ꝛc. vereinfacht und erleichtert wird.

Dritte Abtheilung.

Von den Ziffernwerthen der ganzen Funktionen.

---

§. 451. Aufgabe.

Die Summe S der ganzen Funktion

$$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^m$$

zu finden.

Auflösung. Man setze:

$$1)\quad 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m = S,$$

und multiplizire beyde Seiten mit x, so erhält man:

$$2)\quad x+x^2+x^3+\cdots+x^m+x^{m+1} = x\cdot S.$$

Subtrahirt man nun diese Gleichung (2.) von (1.), so ergibt sich:

$$3)\quad 1-x^{m+1} = (1-x)\cdot S,$$

woraus

$$4)\quad \frac{1-x^{m+1}}{1-x} = S$$

folgt.

§. 452. Zusatz.

Demnach ist die Summe der ganzen Funktion:

$$P+Px+Px^2+Px^3+\cdots+Px^m = P\cdot\frac{1-x^{m+1}}{1-x}.$$

Anmerkung. Man sagt aber, die Glieder P, Px, Px^2, Px^3, ꝛc. ꝛc. bilden eine geometrische Progression oder eine geometrische Reihe, von welcher P das erste, Px^m das $m+1$te Glied, x aber der Exponent der Reihe genannt wird; und die im (§. 452.) erwiesene Gleichung:

$$S\left[\begin{smallmatrix} \\ a+b=m \end{smallmatrix} Px^a\right] = P\cdot\frac{1-x^{m+1}}{1-x}$$

bildet den wichtigsten Satz in der Lehre der geometrischen Reihen.

§. 453. Lehrsatz.

In einer reelen ganzen Funktion von x, nämlich

$$A+Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m$$

kann man dem x jedesmal einen solchen positiven Werth geben, daß das erste Glied A, absolut genommen, größer ist, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder; und hat ein Werth von x diese Eigenschaft, so hat jeder (absolut genommene) kleinere, dieselbe Eigenschaft.

Beweis. Denn es sey P der größte der übrigen Koeffizienten, so ist offenbar:

$$P\cdot(x+x^2+x^3+\cdots+x^m) > Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m, \quad \text{oder nach (§. 452.):} \quad P\cdot\frac{x-x^{m+1}}{1-x} > Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m \text{ *).}$$

Soll nun A größer seyn, als die arithmetische Summe rechts, so darf man nur nehmen:

$$A > P\cdot\frac{x-x^{m+1}}{1-x},$$

oder $x<1$ und $A(1-x) > P(x-x^{m+1})$,

oder $x<1$ und $A > [A+P(1-x^m)]x$,

oder $x<1$ und $\frac{A}{A+P(1-x^m)} > x$; oder $\frac{A}{A+P} > x$.

Umgekehrt nämlich, nimmt man $x < \frac{A}{A+P}$ **), so ist $x<1$, also auch $P(1-x^m)<P$, $[A+P(1-x^m)]x<(A+P)x$; und weil $(A+P)x<A$, so ist um so mehr dann: $A > [A+P(1-x^m)]x$,

---

*) Wo alle Koeffizienten absolut genommen seyn sollen.

**) Immer nur die absolut genommenen Koeffizienten verstanden.

und $$A-Ax>P(x-x^{m+1}),$$

$$A>P\cdot\frac{x-x^{m+1}}{1-x};$$

also $$A>Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m.$$

§. 454. Zusatz.

Ordnet man die reele ganze Funktion fallend,

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\cdots+Sx^2+Tx+U,$$

so kann man auch immer dem x einen solchen absoluten Werth geben, daß das erste Glied Ax^m, absolut genommen, größer wird, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder; und hat ein Werth von x diese Eigenschaft, so hat sie auch jeder absolut größere. —

Denn man setze $\frac{1}{z}$, statt x, so erhält man, indem mit z^m multiplizirt wird,

$$A+Bz+Cz^2+\cdots+Sz^{m-2}+Tz^{m-1}+Uz^m.$$

Da nun ein Werth $\frac{1}{a}$ für z möglich ist (und dann jeder kleinere), für welchen A größer wird, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder, so gibt es wegen $z=\frac{1}{x}$, auch einen Werth a von x, der >1 ist, und

$$A>B\frac{1}{x}+C\frac{1}{x^2}+\cdots+U\frac{1}{x^m},$$

also auch $$Ax^m>Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\cdots+U$$

macht; und so wie für z ein noch kleinerer Werth gesetzt wird, so erhält man für x einen noch größeren, der dieselbe Eigenschaft haben muß.

Anmerkung. Ist daher P der größte aller Koeffizienten, so darf man nur $x\geqq\frac{P}{A}+1$ machen, wenn das erste Glied Ax^m größer seyn soll, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder. — Dabey muß man aber ja nicht unterlassen zu bemerken, daß hier immer nur von dem absolut Größern und Kleinern (§. 262.) die Rede ist.

§. 455. Zusatz.

1) Man kann in der reelen ganzen Funktion:

$$A+Bx+Cx^2+\cdots+Mx^m,$$

dem x jedesmal einen solchen Werth geben, daß die ganze Funktion selbst, einer positiven oder einer negativen Zahl gleich ist, je nachdem A positiv oder negativ. Und findet dies für einen bestimmten Werth von x statt, so findet dasselbe für jeden absolut kleinern Werth von x ebenfalls statt.

2) Man kann aber auch in der reelen ganzen Funktion:

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+Sx^2+Tx+U,$$

dem x einen solchen reelen Werth geben, daß die gegebene ganze Funktion selbst, einer positiven oder negativen Zahl gleich wird, je nachdem das erste Glied x^m einer positiven oder einer negativen Zahl gleich ist; und findet dies statt für irgend einen Werth von x, so muß solches auch für jeden absolut größern Werth von x statt finden.

3) Man kann daher immer statt x eine solche absolute (positive) Zahl setzen, daß die reele ganze Funktion:

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+U$$

einer positiven Zahl gleich wird, und dies ist allemal der Fall, wenn $x \geqq P+1$ genommen wird, wo P der größte aller Koeffizienten ist. Es ist aber auch allemal der Fall, wenn $x \geqq S+1$ genommen wird, wo S der größte unter den negativen Koeffizienten ist.

4) Man kann aber auch immer statt x eine solche negative Zahl setzen, daß die reele ganze Funktion:

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\cdots+U$$

einer positiven Zahl gleich wird, wenn m gerade ist, und einer negativen Zahl gleich wird, wenn m ungerade ist.

Anmerkung. Dies letztere versteht man darunter, wenn man sagt, daß diese ganze Funktion $= +\infty$ werde für $x = +\infty$, dagegen

$= \pm\infty$ werde für $x = -\infty$, je nachdem m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Man vergleiche sorgfältig (§§. 262.—264., 285., 310., 311.).

§. 456. Erklärung.

Wenn in der Folge gesagt werden wird: eine Funktion F(x) von x, ändere sich stetig, mit den stetig sich ändernden Werthen von x, so verstehe man darunter: daß der Unterschied:

$$F(x+h)-F(x),$$

welcher die Aenderung von F(x) genannt wird, absolut genommen kleiner werde, je kleiner h gedacht wird, und daß diese Aenderung kleiner werden könne, als jede noch so kleine aber gegebene Zahl D; und zwar für jeden Werth von x. — Sagt man aber, daß F(x) sich für x zwischen α und β stetig ändere, so gilt das von dem Unterschied

$$F(x+h)-F(x)$$

Gesagte nur, in so ferne x einen zwischen α und β liegenden Werth hat. — Die Zahl h heißt dabey die Aenderung von x. (Vergleiche §. 262.).

§. 457. Lehrsatz.

Ist F(x) eine ganze und reele Funktion von x, so ändert sich solche mit x zugleich stetig, für jeden Werth von x.

Beweis. Denn nach (§. 440.) ist:

$$F(x+h)-F(x)=h\left(\partial F(x)+\frac{\partial^2 F(x)}{2!}h+\frac{\partial^3 F(x)}{3!}h^2+\cdots+\frac{\partial^m F(x)}{m!}h^{m-1}\right).$$

Da nun

$$\partial F(x)+\frac{\partial^2 F(x)}{2!}h+\cdots+\frac{\partial^m F(x)}{m!}h^{m-1}$$

eine ganze Funktion von h ist, so kann man, welchen reelen Werth auch x haben mag, doch immer h klein genug nehmen, daß das erste Glied $\partial F(x)$ größer wird, als die Summe der übrigen Glieder, so daß

$$2\partial F(x) > \partial F(x)+\frac{\partial^2 F(x)}{2!}h+\cdots+\frac{\partial^m F(x)}{m!}h^{m-1},$$

also auch

$$F(x+h)-F(x)<2\partial F(x)\cdot h$$ wird; und wenn dies für einen Werth von h gilt, so gilt es nothwendig für jeden absolut kleinern Werth desselben h. Nimmt man also h so, daß es dieser Bedingung entspricht, und zugleich

$$h\leqq\frac{D}{2\partial F(x)},$$

so wird offenbar:

$$F(x+h)-F(x)<D.$$ W. Z. E. W.

Anmerkung. Man sieht hier denselben Satz für alle ganzen Funktionen von x allgemein bewiesen, der bereits früher (§§. 263., 264., 285., 310.) für die ganzen Funktionen der vier ersten Grade bewiesen sich findet.

§. 458. Zusatz.

Zugleich ist die Aenderung von F(x), für ein so kleines absolutes h, positiv oder negativ, je nachdem die Ableitung positiv oder negativ ist.

Dagegen ist, wenn die Aenderung h von x negativ, aber absolut so sehr klein ist, die Aenderung von F(x) nothwendig negativ oder positiv, je nachdem die Ableitung ∂F(x) positiv oder negativ ist.

Anmerkung. Jede ganze Funktion F(x) hat daher die Eigenschaft, daß sie sich für auf einander folgende Werthe von x, die alle von einander nur um eine sehr kleine Zahl h verschieden sind, ebenfalls nur unmerklich ändert, und daß man die auf einander folgenden Werthe von x so nahe nehmen kann, daß auch die auf einander folgenden Werthe der Funktion F(x) so nahe werden, als man nur immer will.

Während aber die auf einander folgenden Werthe von x, immer größer und größer werden, muß die Funktion F(x) nicht nothwendig ebenfalls immer größer und größer werden, sondern sie kann abwechselnd größer und kleiner werden, in so ferne solches, für so klein gedachte h davon abhängt, ob ∂F(x) positiv oder negativ ist, während dieses letztere wieder von dem jedesmaligen Werthe von x abhängt.

§. 459. Zusatz.

Denkt man sich dem x in F(x), nach und nach alle stetig abnehmenden reelen Werthe gegeben, von $+\infty$ an bis zu $-\infty$ hin, so nehmen also die Werthe von F(x) mit denen von x zugleich stetig ab, so lange dieselben die Ableitung $\partial F(x)$ positiv machen; dagegen wachsen die Werthe von F(x), während die von x immerfort abnehmen, sobald man zu solchen Werthen von x gelangt ist, welche die Ableitung $\partial F(x)$ negativ machen. Und dazwischen liegt einer der reelen Werthe von x, welcher $\partial F(x) = 0$ macht, und dieser Werth von x bildet also in Bezug auf den Gang der reelen Werthe von F(x) einen Wendepunkt, so daß für ihn diese Funktion F(x) ein Kleinstes oder ein Größtes wird, je nachdem sie hier vom Abnehmen zum Wachsen, oder vom Wachsen zum Abnehmen übergeht.

Das letztere hängt aber wieder ab von $\partial^2 F(x)$. Machen die in Rede stehenden reelen Werthe von x, welche $\partial F(x)$ zu Null machen, $\partial^2 F(x)$ positiv, so gehen die Werthe von F(x), nachdem sie bisher abgenommen haben, jetzt zum Wachsen über, und im Wendepunkt ist F(x) ein Kleinstes. Wird aber $\partial^2 F(x)$ negativ, so ist im Wendepunkt F(x) ein Größtes. — Und wird auch zugleich $\partial^2 F(x) = 0$, und nicht $\partial^3 F(x)$, so findet gar kein Wendepunkt statt für diesen Werth von x, obgleich er $\partial F(x) = 0$ macht; und nur erst, wenn derselbe Werth von x, $\partial F(x)$, $\partial^2 F(x)$, und zugleich $\partial^3 F(x)$, nicht aber $\partial^4 F(x)$ zu Null macht, findet für diesen Werth von x in dem Gange der reelen Werthe ein Wendepunkt statt, an welchem F(x) ein Kleinstes oder ein Größtes ist, je nachdem $\partial^4 F(x)$ für denselben Werth von x positiv oder negativ wird. — Man erkennt leicht, wie diese Untersuchung im Speziellen weiter verfolgt werden kann.

§. 460. Zusatz.

Denkt man sich abermals dem x nach und nach alle auf einander folgenden stetig abnehmenden Werthe, von $+\infty$ an durch 0 hindurch bis zu $-\infty$ hin, gegeben, während F(x) die reele ganze Funktion

$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + A_3 \cdot x^{m-3} + \cdots + A_{m-1} x + A_m$

vorstellt, so sind alle zugehörigen Werthe von F(x) nothwendig ebenfalls reel, und dabey stetig sich ändernd, und

von $+\infty$ anfangend und mit $+\infty$ aufhörend, wenn m eine gerade Zahl ist;

dagegen

von $+\infty$ anfangend und mit $-\infty$ aufhörend, wenn m eine ungerade Zahl ist.

Im erstern Falle, wenn m eine gerade Zahl, kann die Funktion F(x), eben weil sie sich stetig nur ändert, entweder gar nicht bis zu Null hinkommen, oder geht sie einmal durch 0 hindurch in das Negative, so muß sie noch einmal durch Null hindurch zurückkehren, um mit $+\infty$ aufhören zu können. Ueberhaupt kann sie nur 2, 4, 6, d. h. eine gerade Anzahl mal, vom Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven, durch Null hindurch gehen, so daß unter allen reelen Werthen von x, entweder keiner, oder 2, oder 4, oder 6, oder überhaupt eine gerade Anzahl derselben diese ganze Funktion F(x) zu Null machen. — Im andern Falle, wenn m eine ungerade Zahl, muß F(x) einmal wenigstens durch Null hindurchgehen, sie kann aber wieder durch Null vom Negativen zum Positiven zurückkehren, und geht dann 3 mal durch Null hindurch. Eben so kann sie 5, 7, ꝛc. mal, überhaupt eine ungerade Anzahl mal, vom Positiven in das Negative oder vom Negativen in das Positive, durch Null hindurchgehen, während nämlich dem x nach und nach alle reelen und stetig abnehmenden Werthe von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin, gegeben gedacht werden.

Anmerkung. Es erleiden jedoch diese Folgerungen in allen den Fällen eine Ausnahme, in welchen der Gang der Funktion sie gerade bis zu Null hinführt, und von da sogleich wieder auf dieselbe Seite zurück.

§. 461. Zusatz.

Und ist m eine gerade Zahl, dagegen das letzte Glied A_m der ganzen Funktion F(x), negativ, so wird F(x)

$+\infty$, negativ, $+\infty$,

während

$x = +\infty$, $x = 0$, $x = -\infty$

genommen wird; also gehen dann die reelen Werthe von $F(x)$, während dem x alle reelen Werthe, von $+\infty$ bis zu $-\infty$ stetig abnehmend gedacht, gegeben werden, von $+\infty$ in das Negative hinüber und zu $+\infty$ zurück, mithin wenigstens zwey mal durch Null hindurch. Unter den reelen Werthen von x existiren also dann nothwendig zwey, welche $F(x)$ zu Null machen, d. h. der Gleichung $F(x) = 0$ genügen.

§. 462. Zusatz.

Wird dieselbe ganze Funktion $F(x)$, für $x = \alpha$ positiv, dagegen für $x = \beta$ negativ, während α und β reele Zahlen sind, so liegt zwischen α und β wenigstens ein, vielleicht aber auch mehr als ein reeler Werth von x, welcher $F(x)$ zu Null macht, d. h. der Gleichung $F(x) = 0$ genügt, eben weil, während dem x alle stetig neben einander liegenden reelen Werthe zwischen α und β gegeben gedacht werden, $F(x)$ nur stetig sich ändert, also nur durch Null hindurch vom Positiven zum Negativen übergehen kann.

Dieser Werth von x, welcher $F(x) = 0$ macht, ist dagegen vielleicht rational, vielleicht irrational, immer aber doch als eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl anzusehen, wenn er nicht Null ist. Man vergleiche (§. 163.).

Anmerkung. Kann diese irrationale Zahl aber auch nicht angegeben werden, so können doch unendlich viele angebbare Näherungs-Werthe gedacht werden, die von ihr selbst um weniger verschieden sind, als jede noch so kleine aber gegebene Zahl.

Schluß-Note.

Alles dies letztere, und was bereits im ersten Theile dieses Lehrbuches über den Gang der reelen Werthe der ganzen Funktionen der vier ersten Grade gesagt sich findet, läßt sich auch, wenn man geometrische Betrachtungen (die uns hier im Texte aber fremd seyn müssen)

anwenden will, noch räumlich versinnlichen. — Denkt man sich nämlich eine unbegrenzte gerade Linie (Fig. 6) X_1AX, in ihr irgendwo einen Punkt A, und von diesem Punkte A aus nach und nach alle Werthe von x hingetragen ($AP_1 = 1$, $AP_2 = 2$, $AP_3 = 3$, u. s. w. aber auch alle Zwischen-Werthe von x, von denen einer durch AP (Fig. 6.) selbst vorgestellt seyn mag); denkt man sich ferner durch die Endpunkte dieser Abscissen AP_1, AP_2, AP_3, ꝛc. ꝛc., AP, Linien auf X_1AX senkrecht errichtet, und auf diesen von X_1X aus die, zu $x = AP_1$, $x = AP_2$, $x = AP_3$, ꝛc. ꝛc., $x = AP$, gehörigen Werthe von F(x) hingetragen, nach oben oder nach unten, je nachdem solche positiv oder negativ sind, etwa $F(x) = P_1M_1$, $F(x) = P_2M_2$, $F(x) = P_3M_3$, ꝛc. ꝛc., $F(x) = PM$, so bilden diese Ordinaten P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, ꝛc, ꝛc., PM, Endpunkte M_1, M_2, M_3, M_4, ꝛc. ꝛc. M, welche dicht neben einander liegen werden, wenn man die Abscissen AP selbst stetig nur größer genommen sich denkt, so daß man den Gang der reelen Werthe der Funktion F(x) in einer krummen Linie $M_4M_3M_2MM_1$ versinnlicht dargestellt findet, und zwar vollkommen, sobald man noch die negativen Werthe von x, von A aus links hin auf AX_1 als Abscissen abträgt, und die zugehörigen Werthe von F(x) wieder senkrecht aufträgt, nach oben hin, oder nach unten hin, je nachdem sie positiv oder negativ sind.

Auf diese Weise erblickt man bey bloßer Anschauung der Figur, alles in den (§§. 456.—462.) vorgetragene versinnlicht. In den Punkten P_5, P_6, P_7, P_8, (Fig. 8.), wo die Kurve der Axe X_1AX begegnet, da finden sich die Werthe von x, nämlich AP_5, AP_6, AP_7, AP_8, ꝛc. ꝛc., (positiv oder negativ genommen, je nachdem die Punkte P_5, P_6, P_7, P_8, ꝛc. ꝛc. rechts oder links von A liegen), für welche $F(x) = 0$ wird. — Die Kurve trifft die Axe nur dann, wenn ihre Ordinate F(x) vom Positiven in das Negative, oder vom Negativen in das Positive übergeht. Der Abscissen-Werth x, für den Punkt, den die Kurve mit der Axe X_1AX gemein hat, liegt also zwischen den Werthen von x, für welche die zugehörigen Punkte auf verschiedenen Seiten der Axe liegen, für welche also F(x) einmal positiv das anderemal negativ geworden ist. — Die Kurve wendet sich, wie in (Fig. 6.) bey dem Punkte M, in (Fig. 7.) bey dem Punkte M_2, in (Fig. 8.) bey den Punkten E, D, M_4, in (Fig. 9.) bey den Punkten E, M_2, G, H, in (Fig. 11.) bey den Punkten D, E, G, H, I, überall aber an den Stellen, wo die Ordinate F(x) größer ist, als die beyden nächstanliegenden Ordinaten, oder kleiner als beyde. — Ist F(x) eine ganze Funktion vom geraden Grade, so wird sie positiv für $x = +\infty$

und auch für $x = -\infty$; die Kurve wird also dann links und rechts oberhalb X_1AX in's Unendliche fortlaufen, aber eben deshalb, wenn sie die Axe trifft, solche 2, 4, 6, ꝛc., überhaupt eine gerade Anzahl mal treffen, oder gar nicht, wie in (Fig. 6. 7. 8.) zu sehen, dagegen ausnahmsweise auch in fünf Punkten (Fig. 11.), wo man jedoch sich vorstellt, daß die Kurve in H, eben weil sie unter die Axe gehen will, sich befindet, und nun noch einmal durch denselben Punkt H wieder nach oben hin geht, so daß die Axe in H zweymal von der Kurve geschnitten wird; dann kommen sechs Durchschnittspunkte heraus. — Ist dagegen $F(x)$ vom ungeraden Grade, so wird solche mit x zugleich $+\infty$ und $-\infty$; die Kurve geht dann links unterhalb der Axe, rechts aber oberhalb der Axe in's Unendliche fort; also nothwendig einmal, vielleicht aber 3, 5, 7, ꝛc. mal durch die Axe hindurch.

Wir hier dürfen jedoch solche geometrische Betrachtungen nicht zu Hilfe nehmen, weil Geometrie hier durchaus nicht vorausgesetzt werden darf, und daher auch nirgends vorausgesetzt wird.

Zahlenlehre.

Zwanzigstes Kapitel.

Von den ganzen Funktionen zweyer oder mehrer Veränderlichen. Von den ganzen symmetrischen Funktionen. Von den Ableitungen der ganzen Funktionen zweyer Veränderlichen.

Erste Abtheilung.

Von den ganzen Funktionen mehrer Veränderlichen überhaupt.

§. 463. Erklärung.

Sind $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{m-1}$, beliebige Ausdrücke, deren Anzahl $= m$ ist, und denkt man sich eine algebraische Summe aus lauter Gliedern von der Form:

$$A_{a,b,c,d,\cdots m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdot x_3^d \cdots x_{m-1}^m,$$

wo $a, b, c, d, \cdots m$ durchlaufende und beschränkte Werthe sind (§. 382.), und wo $A_{a,b,c,d,\cdots m}$ einen beliebigen, für jedes Glied anders werdenden Koeffizienten bedeutet, so hat man eine ganze Funktion der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2 \cdots, x_{m-1}$, und zwar von der nten Ordnung, wenn n der größte Werth von $a+b+c+d+\cdots+m$ wird, und wenn dabey die Koeffizienten dieser Glieder der höchsten Dimension nicht alle zugleich Null werden.

Eine solche ganze Funktion der nten Ordnung aus den m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ kann daher recht bequem so geschrieben werden:

$$S\left[A_{a,b,c,\ldots m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m\right]_{a+b+c+\cdots+m+p=n};$$

und man erhält aus diesem Schema nach und nach alle Glieder der nten, n—1ten, n—2ten, ···3ten, 2ten, 1ten, 0ten Dimension, wenn man dem deutschen Buchstaben p, welcher im allgemeinen Gliede nicht, sondern in der beschränkenden Gleichung allein vorkommt, nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ··· n—3, n—2, n—1, n gegeben sich denkt. Diese ganze Funktion der m Veränderlichen der nten Ordnung, zerfällt in folgende Summe:

$$S\left[A_{a,b,c,\ldots m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m\right]_{a+b+c+\cdots+m=n}$$
$$+S\left[A_{a,b,c,\ldots m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m\right]_{a+b+c+\cdots+m=n-1}$$
$$+S\left[A_{a,b,c,\ldots m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m\right]_{a+b+c+\cdots+m=n-2}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots$$
$$+S\left[A_{a,b,c,\ldots m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m\right]_{a+b+c+\cdots+m=2}$$
$$+S\left[A_{a,b,c,\ldots m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m\right]_{a+b+c+\cdots+m=1}$$
$$+S\left[A_{a,b,c,\ldots m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m\right]_{a+b+c+\cdots+m=0},$$

in welcher Summe das letzte Aggregat nur das einzige, von den Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ ganz unabhängige (nach diesen Veränderlichen konstante) Glied $A_{0,0,0,\ldots 0}$ der nullten Dimension; wo dagegen das vorletzte Aggregat blos die m Glieder

$$A_{1,0,0,\ldots 0} \cdot x_0 + A_{0,1,0,\ldots 0} \cdot x_1 + A_{0,0,1,\ldots 0} \cdot x_2 + \cdots + A_{0,0,0,\ldots 1} \cdot x_{m-1},$$

alle von der 1sten Dimension; wo ferner das zweytvorletzte Aggregat die Glieder der 2ten Dimension, wo endlich die drey ersten Aggregate nach der Ordnung beziehlich alle Glieder der nten, alle Glieder der n—1ten, und alle Glieder der n—2ten Dimension enthalten; u. s. w. f.

Beyspiel 1. So ist z. B.

$$S\left[P_{a,b} \cdot x_0^a \cdot x_1^b\right]_{a+b+p=3}$$

eine ganze Funktion der beyden Veränderlichen x_0 und x_1, von der dritten Ordnung, und solche kann auch so geschrieben werden:

$$S[P_{a,b}\cdot x_0^a\cdot x_1^b]_{a+b=3} + S[P_{a,b}\cdot x_0^a\cdot x_1^b]_{a+b=2} + S[P_{a,b}\cdot x_0^a\cdot x_1^b]_{a+b=1} + S[P_{a,b}\cdot x_0^a\cdot x_1^b]_{a+b=0},$$

welche vier Aggregate nach und nach die Glieder der 3ten, 2ten, 1ten und 0ten Dimension vorstellen. Das erste dieser vier letztern Aggregate enthält aber die vier Glieder der dritten Dimension:

$$P_{0,3}\cdot x_1^3 + P_{1,2}\cdot x_0\cdot x_1^2 + P_{2,1}\cdot x_0^2\cdot x_1 + P_{3,0}\cdot x_0^3;$$

das nächste dieser Aggregate stellt dagegen die drey Glieder vor der zweyten Dimension, nämlich:

$$P_{0,2}\cdot x_1^2 + P_{1,1}\cdot x_0\cdot x_1 + P_{2,0}\cdot x_0^2;$$

während das nun folgende Aggregat blos die beyden Glieder:

$$P_{0,1}\cdot x_1 + P_{1,0}\cdot x_0$$

der ersten Dimension liefert, und das letzte Aggregat nur das einzige Glied $P_{0,0}$ der 0ten Dimension enthält.

Die ganze Funktion der beyden Veränderlichen x_0 und x_1 der dritten Ordnung besteht daher im Ganzen aus zehn Gliedern, von denen jedes mit einem verschiedenen Koeffizienten:

$$P_{0,3},\ P_{1,2},\ P_{2,1},\ P_{3,0},\ P_{0,2},\ P_{1,1},\ \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

versehen ist, welcher jedesmal auch 0 seyn kann, so daß dieses Glied ganz heraus fällt.

Beyspiel 2. So stellt:

$$S[P_{a,b,c}\cdot x_0^a\cdot x_1^b\cdot x_2^c]_{a+b+c+d=2}$$

eine ganze Funktion von der zweyten Ordnung der drey Veränderlichen x_0, x_1 und x_2 vor; für $d = 0, 1, 2$, erhält man die ihr gleiche Summe:

$$S[P_{a,b,c}\cdot x_0^a\cdot x_1^b\cdot x_2^c]_{a+b+c=2} + S[P_{a,b,c}\cdot x_0^a\cdot x_1^b\cdot x_2^c]_{a+b+c=1} + S[P_{a,b,c}\cdot x_0^a\cdot x_1^b\cdot x_2^c]_{a+b+c=0},$$

welche einzelnen Aggregate nach und nach die Glieder der 2ten, der 1sten und der 0ten Dimension enthalten, nämlich die Glieder:

$$P_{0,0,2}\cdot x_2^2 + P_{0,1,1}\cdot x_1\cdot x_2 + P_{0,2,0}\cdot x_1^2 + P_{1,0,1}\cdot x_0\cdot x_2 + P_{1,1,0}\cdot x_0\cdot x_1 + P_{2,0,0}\cdot x_0^2,$$

und $P_{0,0,1}\cdot x_2 + P_{0,1,0}\cdot x_1 + P_{1,0,0}\cdot x_0$, und $P_{0,0,0}$;

so daß die ganze Funktion der drey Veränderlichen zusammen aus zehn Gliedern besteht, in denen die Koeffizienten:

$P_{0,0,2}$, $P_{0,1,1}$, $P_{0,0,1}$, $P_{0,0,0}$ ꝛc. ꝛc.

von einander verschiedene, übrigens ganz beliebige, jedoch von den Veränderlichen x_0, x_1, x_2, unabhängige Werthe vorstellen, übrigens auch theilweise einander gleich, auch zum Theil der Null gleich seyn können.

§. 464. Zusatz.

1) Jede ganze Funktion der nten Ordnung der beyden Veränderlichen x_0 und x_1, nämlich:

$$S\left[P_{a,b}\cdot x_0^a\cdot x_1^b\right]_{a+b+c=n}$$

kann allemal als eine ganze Funktion eines der Veränderlichen, z. B. x_1, angesehen werden, so daß die Koeffizienten der einzelnen mit

$$x_1^n,\ x_1^{n-1},\ x_1^{n-2},\ \cdots x_1^{n-n},\ \cdots,\ x_1^1,\ x_1^0$$

multiplizirten Glieder, nämlich die Koeffizienten:

$$S\left[P_{a,n}\cdot x_0^a\right]_{a+c=0},\quad S\left[P_{a,n-1}\cdot x_0^a\right]_{a+c=1},\quad S\left[P_{a,n-2}\cdot x_0^a\right]_{a+c=2},\ \cdots$$

$$\cdots,\ S\left[P_{a,n-n}\cdot x_0^a\right]_{a+c=n-n},\ \cdots,\ S\left[P_{a,1}\cdot x_0^a\right]_{a+c=n-1},\quad S\left[P_{a,0}\cdot x_0^a\right]_{a+c=n}$$

selber wieder ganze Funktionen des andern Veränderlichen x_0 sind, und zwar beziehlich vom 0ten, 1sten, 2ten, ···n—nten, ···n—1ten und nten Grade.

Denn man erhält solche sogleich aus dem obigen Aggregat, wenn man nach und nach n, n—1, n—2, ···n—n, ···n—(n—1), d. h. 1 und n—n, d. h. 0, statt b setzt, und dem a jedesmal alle zugehörigen Werthe gibt.

Beyspiel. So kann man sich im vorigen Beyspiel (1.) des (§. 463.) die dortige ganze Funktion der beyden Veränderlichen x_0 und x_1 vom dritten Grade augenblicklich so geschrieben denken:

$$P_{0,3}\cdot x_1^3+(P_{1,2}\cdot x_0+P_{0,2})\cdot x_1^2+(P_{2,1}\cdot x_0^2+P_{1,1}\cdot x_0+P_{0,1})\cdot x_1$$
$$+P_{3,0}\cdot x_0^3+P_{2,0}\cdot x_0^2+P_{1,0}\cdot x_0+P_{0,0},$$

welches eine ganze Funktion von x_1, vom 3ten Grade ist, während die Koeffizienten von x_1^3, x_1^2, x_1^1, x_1^0, selber wieder ganze Funktionen von x_0 sind, beziehlich vom 0ten, 1ten, 2ten und 3ten Grade.

Aber eben so gut lassen sich diese Glieder so schreiben, daß das Ganze als eine ganze Funktion von x_0 vom 3ten Grade erscheint, während die Koeffizienten der Potenzen x_0^3, x_0^2, x_0^1, x_0^0, ganze Funktionen von x_1 sind, beziehlich vom 0ten, 1ten, 2ten und 3ten Grade.

2) Eben so ist jede ganze Funktion dreyer Veränderlichen x_0, x_1 und x_2, von der nten Ordnung, als eine ganze Funktion eines dieser Veränderlichen, z. B. x_2, vom nten Grade anzusehen, deren Koeffizienten aber wieder ganze Funktionen der beyden andern Veränderlichen x_0 und x_1 sind. — Desgleichen kann man aber dieselbe ganze Funktion dreyer Veränderlichen als eine ganze Funktion zweyer Veränderlichen, z. B. x_1 und x_2 geschrieben sich denken, deren einzelne Koeffizienten wiederum ganze Funktionen des 3ten Veränderlichen x_0 sind.

Denn man kann in der ganzen Funktion:

$$S\left[P_{a,b,c} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c\right]_{a+b+c+d=n}$$

dreyer Veränderlichen der nten Ordnung, dem c nach und nach die Werthe n, n—1, n—2, ···n—n, ···2, 1 und 0 geben, und man erhält sogleich die einzelnen mit

$$x_2^n,\ x_2^{n-1},\ x_2^{n-2},\ \cdots x_2^{n-n},\ \cdots x_2^1,\ x_2^0$$

affizirten Glieder, deren Koeffizienten wieder Aggregate sind, welche ganze Funktionen der beyden Veränderlichen x_0 und x_1 vorstellen. — — Und eben so kann man die beschränkende Gleichung $b+c=e$ hinzufügen, die andere $a+b+c+d=n$ dadurch in $a+d+e=n$ verwandeln, und dann dem e nach und nach die Werthe n, n—1, n—2, ···n—n, ···2, 1, 0 gegeben sich denken, und man erhält sogleich die zweyte der oben gedachten Umformungen.

3) Auf diese Weise erhellet leicht die verschiedene mögliche Weise der Umformung einer ganzen Funktion von m Veränderlichen, und von der nten Ordnung.

4) Sind daher zwey ganze Funktionen von m Veränderlichen x_0, x_1, x_2, ···x_{m-1} einander gleich, für jeden Werth der Veränderlichen, so müssen auch die einzelnen Koeffizienten beziehlich einander gleich seyn.

Ist nämlich die ganze Funktion:

$$S[P_{a,b,c,\cdots,m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m]$$
$$a+b+c+\cdots+m+p = n$$

identisch mit dieser andern ganzen Funktion:

$$S[Q_{a,b,c,\cdots,m} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m],$$
$$a+b+c+\cdots+m+p = n$$

so ist auch:

$$P_{a,b,c,\cdots,m} = Q_{a,b,c,\cdots,m},$$

wo **a, b, c, ···, m** links und rechts beliebige, aber dieselben Buchstaben auch jedesmal dieselben stehenden Werthe vorstellen.

Denn da man sich diese ganze Funktionen mehrer Veränderlichen, auch jedesmal als ganze Funktionen eines einzigen Veränderlichen denken kann, so gilt dieser Satz nach (§. 424.) in Bezug auf die Koeffizienten dieser Glieder, welche selber wieder ganze Funktionen von weniger Variablen sind. Und so gilt die Gleichheit der Koeffizienten nach und nach für die ganzen Funktionen von immer weniger Veränderlichen, zuletzt von den einzelnen ganzen Funktionen eines einzigen Veränderlichen (alle als Koeffizienten gedacht), und zuletzt von den einzelnen, nach den Veränderlichen völlig konstanten Koeffizienten.

5) Ist daher eine ganze Funktion der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_m$ für jeden Werth der Veränderlichen der Null gleich, so ist auch jeder einzelne Koeffizient der Null gleich. (Vergleiche §. 423.).

6) Vorzüglich praktisch sind diese beyden letztern Sätze in Bezug auf ganze Funktionen zweyer Veränderlichen, weshalb wir sie für solche hier noch besonders wiederholen wollen.

α) Sind zwey ganze Funktionen zweyer Veränderlichen einander gleich; ist nämlich

$$S[P_{a,b} \cdot x_0^a \cdot x_1^b] = S[Q_{a,b} \cdot x_0^a \cdot x_1^b],$$
$$a+b+c = n \qquad a+b+c = n$$

so sind auch die einzelnen Koeffizienten einander gleich, also namentlich:

$$P_{a,b} = Q_{a,b},$$

für jeden einzelnen Werth von a und b.

Denn für jeden stehenden Werth von b, sind $S\left[P_{a,b} \cdot x_0^a\right]_{a+c=n-b}$ und $S\left[Q_{a,b} \cdot x_0^a\right]_{a+c=n-b}$ die Koeffizienten von x_1^b in beyden ganzen Funktionen, als solche des einzigen Veränderlichen x_1 gedacht; folglich nach (§. 424.) einander gleich. Sie selber aber sind wieder ganze Funktionen des einzigen Veränderlichen x_0, also auch die Koeffizienten von x_0^a in beyden für jeden stehenden Werth von a einander gleich; also $P_{a,b} = Q_{a,b}$.

β) Ist eine ganze Funktion der nten Ordnung zweyer Veränderlichen x_0 und x_1 identisch $= 0$; ist also

$$S\left[R_{a,b} \cdot x_0^a \cdot x_1^b\right]_{a+b+c=n} = 0,$$

so sind auch die einzelnen Koeffizienten der Null gleich, d. h. es ist auch:

$$R_{a,b} = 0.$$

Denn es ist der Koeffizient von x_1^b, d. h.

$$S\left[R_{a,b} \cdot x_0^a\right]_{a+c=n-b}$$

der Null gleich nach (§. 423.); folglich auch dann der Koeffizient von x_0^a, nämlich $R_{a,b}$ der Null gleich, nach demselben (§. 423.).

7) Sind dagegen in einer ganzen Funktion der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ nicht alle Koeffizienten der Null gleich, so daß die ganze Funktion zu der nten Ordnung gehört, so wird diese ganze Funktion nicht für jeden Werth der Veränderlichen der Null gleich. — Denkt man sich aber in einer solchen ganzen Funktion der nten Ordnung, für die Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ gerade solche Werthe gesetzt, welche sie zu Null machen, so hat man eine höhere Gleichung der nten Ordnung zwischen den m Unbekannten x_0, x_1, x_2, x_{m-1}. (Vergleiche sorgfältig (§. 213.), wo Beyspiele solcher Gleichungen vorkommen, zwischen den Unbekannten x, y, z ꝛc.).

§. 465. Zusätze.

1) Zwey ganze Funktionen der m Veränderlichen x_0, x_1, $x_2, \cdots x_{m-1}$, von denen die eine von der nten, die andere von

der pten Ordnung ist, während $n \gtrless p$, zu einander addirt oder von einander subtrahirt, geben wieder eine ganze Funktion derselben m Veränderlichen im allgemeinen von der nten Ordnung, obgleich die Ordnung in speziellen Fällen auch viel niedriger werden kann.

2) Zwey ganze Funktionen der m Veränderlichen, nämlich:

$$S\left[P_{\substack{a,b,c,\cdots,m \\ a+b+c+\cdots+m+p=n}} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m\right]$$

von der nten Ordnung, und:

$$S\left[Q_{\substack{a,b,c,\cdots,m \\ a+b+c+\cdots+m+p=p}} \cdot x_0^a \cdot x_1^b \cdot x_2^c \cdots x_{m-1}^m\right]$$

von der pten Ordnung, mit einander multiplizirt, geben eine ganze Funktion derselben m Veränderlichen, von der n+pten Ordnung, nämlich nach (§. 397.):

$$S\left[P_{a,b,c,\cdots m} \cdot Q_{\substack{a',b',c',\cdots m' \\ a+b+c+\cdots+m+p=n,\ a'+b'+c'+\cdots+m'+p'=p}} \cdot x_0^{a+a'} \cdot x_1^{b+b'} \cdot x_2^{c+c'} \cdots x_{m-1}^{m+m'}\right].$$

Fügt man hier noch die beschränkenden Gleichungen: $a+a'=a''$, $b+b'=b''$, $c+c'=c''$, ꝛc. ꝛc. hinzu, so erhält man, in so ferne die beyden schon vorhandenen Gleichungen addirt werden, als Resultat der Multiplikation:

$$S\left[P_{a,b,c,\cdots,m} \cdot Q_{\substack{a',b',c',\cdots,m' \\ a''+b''+c''+\cdots m''+p''=n+p \\ a+a'=a'',\ b+b'=b'',\ c+c'=c'',\cdots m+m'=m'' \\ a+b+c+\cdots+m+p=n,\ a'+b'+c'+\cdots+m'+p'=p}} \cdot x_0^{a''} \cdot x_1^{b''} \cdot x_2^{c''} \cdots x_{m-1}^{m''}\right],$$

welches eine ganze Funktion der n+pten Ordnung ist.

Um dies letztere durch Beyspiele zu erläutern, nehme man:

1) Die ganzen Funktionen zweyer Veränderlichen

$$S\left[P_{\substack{a,b \\ a+b+c=3}} \cdot x_0^a \cdot x_1^b\right] \quad \text{und} \quad S\left[Q_{\substack{a,b \\ a+b+c=2}} \cdot x_0^a \cdot x_1^b\right],$$

von denen die erste im Beyspiele zu (§. 463.) entwickelt sich findet; und multiplizire beyde mit einander, so erhält man, dem Obigen zufolge:

$$S\left[P_{a,b} \cdot Q_{\substack{a,b \\ a''+b''+c''=5 \\ a+a'=a'',\ b+b'=b'' \\ a+b+c=3,\ a'+b'+c'=2,}} \cdot x_0^{a''} \cdot x_1^{b''}\right]$$

welches eine ganze Funktion derselben beyden Veränderlichen x_0 und x_1 von der 5ten Ordnung ist.

Will man von dieser ganzen Funktion der 5ten Ordnung die Glieder sehen, welche zu der 2ten Dimension gehören, so setzt man $c'' = 3$, damit $a''+b'' = 2$ übrig bleibt, welches

a''	0	1	2
b''	2	1	0

gibt, während die Gleichungen $a+a' = a''$ und $b+b' = b''$, für jeden Werth von a'' und b'' die zugehörigen Werthe von a und b, a' und b' geben, so daß man hat:

a	0	0	0	0	1	0	1	0	1	2
a'	0	0	0	1	0	1	0	2	1	0
b	0	1	2	0	0	1	1	0	0	0
b'	2	1	0	1	1	0	0	0	0	0
a''	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2
b''	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0

;

und weil die beschränkenden Gleichungen $a+b+c = 3$ und $a'+b'+c' = 2$ nichts weiter anzeigen, als daß $a+b$ nicht größer als 3 und $a'+b'$ nicht größer als 2 werden darf, so bleiben die vorstehenden Werthe von a, b, a', b', a'', b'', alle möglichen, und man erhält daher folgende Glieder:

$$(P_{0,0}\cdot Q_{0,2}+P_{0,1}\cdot Q_{0,1}+P_{0,2}\cdot Q_{0,0})\cdot x_1^2$$
$$+(P_{0,0}\cdot Q_{1,1}+P_{1,0}\cdot Q_{0,1}+P_{0,1}\cdot Q_{1,0}+P_{1,1}\cdot Q_{0,0})\cdot x_0x_1$$
$$+(P_{0,0}\cdot Q_{2,0}+P_{1,0}\cdot Q_{1,0}+P_{2,0}\cdot Q_{0,0})\cdot x_0^2,$$

welches die drey Glieder der zweyten Dimension sind, in derjenigen Funktion der 5ten Ordnung, welche als Resultat der Multiplikation sich ergeben hat, und wo $P_{0,0}$, $P_{1,0}$, $P_{0,1}$ ꝛc. ꝛc., eben so $Q_{0,0}$, $Q_{1,0}$, $Q_{0,1}$ ꝛc. ꝛc. die einzelnen Koeffizienten, der einzelnen gegebenen und mit einander zu multiplizirenden Funktionen vorstellen.

Wollte man von demselben Produkt die Glieder der dritten Dimension haben, so müßte man $c'' = 2$ nehmen, damit $a''+b'' = 3$ würde, welches die Werthe:

a''	0	1	2	3
b''	3	2	1	0

gibt. Und die Gleichungen $a+a' = a''$, $b+b' = b''$, wenn man wegen der übrigen Gleichungen $a+b+c = 3$ und $a'+b'+c' = 2$, $a+b$ nicht größer als 3 und $a'+b'$ nicht größer als 2 werden läßt, geben dann die Werthe:

a	0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 2 2 1 2 3
b	1 2 3 1 2 0 1 2 1 0 1 0 1 0 0 0
a′	0 0 0 1 1 0 0 0 2 1 1 0 0 2 1 0
b′	2 1 0 1 0 2 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0
a″	0 0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3
b″	3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 0 0 0 ;

und diese Werthe geben folgende Glieder der dritten Dimension:

$$(P_{0,1}\cdot Q_{0,2}+P_{0,2}\cdot Q_{0,1}+P_{0,3}\cdot Q_{0,0})\cdot x_1^3$$
$$+(P_{0,1}\cdot Q_{1,1}+P_{0,2}\cdot Q_{1,0}+P_{1,0}\cdot Q_{0,2}+P_{1,1}\cdot Q_{0,1}+P_{1,2}\cdot Q_{0,0})\cdot x_0\cdot x_1^2$$
$$+(P_{0,1}\cdot Q_{2,0}+P_{1,0}\cdot Q_{1,1}+P_{1,1}\cdot Q_{1,0}+P_{2,0}\cdot Q_{0,1}+P_{2,1}\cdot Q_{0,0})\cdot x_0^2\cdot x_1$$
$$+(P_{1,0}\cdot Q_{2,0}+P_{2,0}\cdot Q_{1,0}+P_{3,0}\cdot Q_{0,0})\cdot x_0^3,$$

welche alle Glieder der 3ten Dimension sind, die das Produkt der 5ten Ordnung hat.

Beyspiel 2. Soll man die beyden ganzen Funktionen der 1sten Ordnung der beyden Veränderlichen x_0 und x_1, nämlich:

$$x_0+a\cdot x_1+b \quad \text{und} \quad x_0+a'\cdot x_1+b',$$

mit einander multiplizirem, so lassen sie sich zunächst so schreiben:

$$S\left[P_{a,b}\cdot x_0^a\cdot x_1^b\right]_{a+b+c=1} \quad \text{und} \quad S\left[Q_{a,b}\cdot x_0^a\cdot x_1^b\right]_{a+b+c=1},$$

wo $P_{0,0}$, $P_{0,1}$ und $P_{1,0}$ beziehlich b, a und 1,
so wie $Q_{0,0}$, $Q_{0,1}$ und $Q_{1,0}$ beziehlich b′, a′ und 1
vorstellen. — Und diese mit einander multiplizirt geben:

$$S\left[P_{a,b}\cdot Q_{a',b'}\cdot x_0^{a''}\cdot x_1^{b''}\right]_{\substack{a''+b''+c''=2\\ a+a'=a'',\ b+b'=b'',\\ a+b+c=1,\ a'+b'+c'=1}};$$

und will man von diesem Resultat alle Glieder wirklich entwickelt sehen, so hat man zunächst:

c″	0 0 0 1 1 2
b″	0 1 2 0 1 0
a″	2 1 0 1 0 0 ,

und dann aus den Gleichungen $a+a'=a''$ und $b+b'=b''$, so wie mit der Beschränkung $a+b+c=1$ und $a'+b'+c'=1$, nach welcher weder $a+b$, noch $a'+b'$ größer als 1 werden können, erhält man die Werthe:

a	0 0 1 1 0 0 0 1 0
b	1 1 0 0 0 1 0 0 0
a′	0 1 0 1 0 0 1 0 0
b′	1 0 1 0 1 0 0 0 0
a″	0 1 1 2 0 0 1 1 0
b″	2 1 1 0 1 1 0 0 0 ;

und diese Werthe liefern die Glieder:

$$P_{0,1}\cdot Q_{0,1}\cdot x_1^2+(P_{0,1}\cdot Q_{1,0}+P_{1,0}\cdot Q_{0,1})\cdot x_0\cdot x_1+P_{1,0}\cdot Q_{1,0}\cdot x_0^2$$
$$+(P_{0,0}\cdot Q_{0,1}+P_{0,1}\cdot Q_{0,0})\cdot x_1+(P_{0,0}\cdot Q_{1,0}+P_{1,0}\cdot Q_{0,0})\cdot x_0+P_{0,0}\cdot Q_{0,0}.$$

Und setzt man hier statt:

$P_{0,0}$, $P_{0,1}$, $P_{1,0}$, $Q_{0,0}$, $Q_{0,1}$, $Q_{1,0}$

beziehlich b , a , 1 , b′ , a′ , 1 ,

welche Koeffizienten jene dasmal vorstellen, so reduzirt sich dieses Resultat auf:

$$a\cdot a'\cdot x_1^2+(a+a')\cdot x_0\cdot x_1+x_0^2+(a'b+ab')\cdot x_1+(b+b')\cdot x_0+b\cdot b',$$

welches in der That das Produkt von:

$x_0+a\cdot x_1+b$ und $x_0+a'\cdot x_1+b'$ ist.

Anmerkung. Man sieht zugleich aus diesen Beyspielen, wie hier der Vortheil der Aggregatenrechnung vorzüglich darin besteht, daß man von einem Resultat, welches sehr weitläufig werden würde, jeden einzelnen beliebigen Theil desselben, wie solcher gerade nöthig wird, für sich in dem Aggregat vorgestellt, und augenblicklich entwickelt sehen kann.

Zweyte Abtheilung.

Von den symmetrischen ganzen Funktionen zweyer oder mehrer Veränderlichen.

---

§. 466. Erklärung.

Haben in einer ganzen Funktion der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}$, jedesmal alle diejenigen Glieder, welche aus einem einzigen derselben dadurch hervorgehen, daß man die

Veränderlichen beliebig und durchaus mit einander vertauscht, einen und denselben Koeffizienten, d. h. sind die Koeffizienten dieser Glieder alle einander gleich (übrigens beliebig, also auch beliebig Null), so ändert sich diese ganze Funktion nicht, wenn in ihr alle Veränderlichen beliebig und durchaus mit einander vertauscht werden; und eine solche ganze Funktion nennt man eine symmetrische ganze Funktion dieser Veränderlichen.

So ist z. B.:

$$4\cdot x_0\cdot x_1+4\cdot x_0\cdot x_2+4\cdot x_0\cdot x_3+4\cdot x_1\cdot x_2+4\cdot x_1\cdot x_3+4\cdot x_2\cdot x_3$$
$$-7\cdot x_0^3-7\cdot x_1^3-7\cdot x_2^3-7\cdot x_3^3+2\cdot x_0^2\cdot x_1^2\cdot x_2^3\cdot x_3^3+2\cdot x_0^2\cdot x_1^3\cdot x_2^2\cdot x_3^3$$
$$+2\cdot x_0^2\cdot x_1^3\cdot x_2^3\cdot x_3^2+2\cdot x_0^3\cdot x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^3+2\cdot x_0^3\cdot x_1^2\cdot x_2^3\cdot x_3^2+2\cdot x_0^3\cdot x_1^3\cdot x_2^2\cdot x_3^2$$

eine symmetrische Funktion der vier Veränderlichen x_0, x_1, x_2 und x_3 (und zwar der zehnten Ordnung); denn sie ändert sich nicht, wenn auch x_0, x_1, x_2 und x_3 beliebig mit einander vertauscht werden. Sie selber ist wieder eine Summe aus den drey symmetrischen Funktionen derselben Veränderlichen, beziehlich von der zweyten, dritten und zehnten Ordnung, welche bey ihrem bloßen Anblick sogleich in die Augen fallen.

So ist:

$$3\cdot x_0^2+3\cdot x_1^2+3\cdot x_2^2-4\cdot x_0\cdot x_1-4\cdot x_0\cdot x_2-4\cdot x_1\cdot x_2$$
$$+10\cdot x_0^3\cdot x_1^3+10\cdot x_0^3\cdot x_2^3+10\cdot x_1^3\cdot x_2^3$$
$$+8\cdot x_0^3\cdot x_1^2+8\cdot x_0^2\cdot x_1^3+8\cdot x_0^3\cdot x_2^2+8\cdot x_0^2\cdot x_2^3+8\cdot x_1^3\cdot x_2^2+8\cdot x_1^2\cdot x_2^3$$
$$-5\cdot x_0-5\cdot x_1-5\cdot x_2+18$$

eine ganze symmetrische Funktion von der sechsten Ordnung aus den drey Veränderlichen x_0, x_1, und x_2; und sie selber besteht wieder aus den einzelnen symmetrischen Funktionen:

$3\cdot x_0^2+3\cdot x_1^2+3\cdot x_2$ von der zweyten Ordnung,
und $4\cdot x_0\cdot x_1+4\cdot x_0\cdot x_2+4\cdot x_1\cdot x_2$ ebenfalls von der zweyten Ordnung,
und $10\cdot x_0^3\cdot x_1^3+10\cdot x_0^3\cdot x_2^3+10\cdot x_1^3\cdot x_2^3$ von der sechsten Ordnung,
und $8\cdot x_0^3\cdot x_1^2+8\cdot x_0^2\cdot x_1^3+8\cdot x_0^3\cdot x_2^2+8\cdot x_0^2\cdot x_2^3+8\cdot x_1^3\cdot x_2^2+8\cdot x_1^2\cdot x_2^3$,
und $5\cdot x_0+5\cdot x_1+5\cdot x_2$ von der ersten Ordnung,
endlich 18 von der nullten Ordnung.

§. 467. Zusatz.

1) Jede ganze symmetrische Funktion der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ ist nothwendig durch Addition oder

Subtraktion aus einzelnen ganzen symmetrischen Funktionen zusammengesetzt, deren Glieder aus $M \cdot x_0^n$, oder aus $M_1 \cdot x_0^n . x_1^p$, oder aus $M_2 \cdot x_0^n \cdot x_1^p \cdot x_2^q$, oder aus $M_3 \cdot x_0^n \cdot x_1^p \cdot x_2^q \cdot x_3^r$, oder aus Gliedern von derselben Form, jedoch immer mehr Veränderliche enthaltend, und in denen M, M_1, M_2, M_3 ꝛc. ganz beliebige, von den Veränderlichen unabhängige (konstante) Koeffizienten sind, dadurch hervorgehen, daß man in ihnen jeden Veränderlichen, mit jedem andern vertauscht, wenn nur n, p, q, r, beliebige absolute ganze Zahlen sind, welche eben sowohl von einander verschieden, als theilweise oder alle einander gleich seyn können.

2) Nennt man jede der letztern, blos aus einem einzigen Gliede durch Vertauschung der Veränderlichen hervorgehende symmetrische Funktion, eine einfache ganze symmetrische Funktion der m Veränderlichen, so ist also jede ganze symmetrische Funktion der m Veränderlichen aus lauter solchen einfachen ganzen symmetrischen Funktionen derselben Veränderlichen durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzt, wenn sie nicht selber schon zu den einfachen gehört.

3) Diese einfachen ganzen symmetrischen Funktionen der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ lassen sich daher bequem, wenn nur n, p, q, r, alle als von einander verschieden gedacht werden, so schreiben:

$M \cdot S[x_a^n]$, oder $M_1 \cdot S_{a \geqq b}[x_a^n \cdot x_b^p]$, oder $M_2 \cdot S_{a \geqq b \geqq c}[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q]$, oder

$M_3 \cdot S_{a \geqq b \geqq c \geqq d}[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_d^r]$, oder u. s. w. f.;

wo die deutschen Buchstaben alle durchlaufenden Werthe von 0 bis $m-1$ haben können, und wo man die noch hinzugefügten beschränkenden Gleichungen (oder vielmehr Ungleichungen) ebenfalls noch weglassen kann, wenn man nicht vergißt, daß in einem und demselben Gliede die deutschen Buchstaben nie gleiche Werthe annehmen dürfen, weil außerdem das Glied zu einer andern einfachen symmetrischen Funktion, deren Glieder aus weniger Veränderlichen bestehen, gezählt werden müßte.

4) Namentlich stellt $S[x_a^n]$ die Summe aller Potenzen der Veränderlichen:

$$x_0^n + x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_{m-1}^n$$

vor, und heißt deshalb Potenzsumme.

Dagegen stellen:

$$S[x_a \cdot x_b], \quad S[x_a \cdot x_b \cdot x_c], \quad S[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot x_d]$$
$$a \gtrless b \qquad a \gtrless b \gtrless c \qquad a \gtrless b \gtrless c \gtrless d$$

u. s. w. f. die kombinatorischen Variations-Klassen vor, $\overset{2}{V}$, $\overset{3}{V}$, $\overset{4}{V}$, ꝛc., ohne Wiederholungen aus den m Elementen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ entwickelt, die einzelnen Verbindungen als Produkte angesehen, und alle zu einander addirt gedacht. Und will man blos die Kombinations-Klassen ohne Wiederholungen aus denselben Elementen vorgestellt haben, so schreibe man:

$$S[x_a \cdot x_b], \quad S[x_a \cdot x_b \cdot x_c], \quad S[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot x_d], \text{ u. s. w. f.}$$
$$a < b \qquad a < b < c \qquad a < b < c < d$$

Und allgemein, will man die symmetrische Funktion:

$$S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_b^r \cdots]$$

unter der Bedingung ausgedrückt haben, daß n, p, q, r, ꝛc., nicht alle von einander verschieden sind, sondern einige derselben einander gleich, so schreibe man entweder diese Gleichungen $n = p$ oder $n = r$, oder $n = q = r$, ꝛc. darunter, oder man beschränke die deutschen Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. so, daß von den mit einerlei (gleichen) Exponenten versehenen Faktoren die früher (zur Linken) stehenden deutschen Buchstaben nie Werthe bekommen, welche größer wären, als Werthe der in denselben Faktoren später (zur Rechten) folgenden deutschen Buchstaben.

So wird also jedes der Aggregate:

$$S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q] \quad \text{und} \quad S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^n]$$
$$n = q \qquad a \gtrless b,\ b \gtrless c,\ a < c$$

immer eine und dieselbe ganze symmetrische Funktion derselben m Veränderlichen vorstellen.

5) Die einfache symmetrische Funktion $S[x_a^n \cdot x_b^p]$ aus denselben m Veränderlichen besteht aus $m(m-1)$ Gliedern, wenn n von p verschieden ist; dagegen nur aus $\frac{m(m-1)}{2!}$ Gliedern, wenn $n = p$ seyn sollte.

Eben so hat die einfache ganze symmetrische Funktion:

$$S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q]$$

aus denselben m Veränderlichen, bald $m(m-1)(m-2)$, bald $\frac{m(m-1)(m-2)}{2!}$, bald auch nur $\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$ Glieder, je nachdem n, p, q alle drey von einander verschieden, oder zwey derselben einander gleich, oder alle drey einander gleich sind.

Ferner hat die einfache ganze symmetrische Funktion:

$$S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_d^r]$$

$m^{4|-1}$, oder $\frac{m^{4|-1}}{2!}$, oder $\frac{m^{4|-1}}{2!\ 2!}$, oder $\frac{m^{4|-1}}{3!}$, oder $\frac{m^{4|-1}}{4!}$ Glieder, je nachdem n, p, q, r alle viere von einander verschieden, oder zwey davon einander gleich, oder zugleich auch die beyden andern einander gleich, oder drey derselben einander gleich, oder alle viere einander gleich sind.

Und ist überhaupt ν die Anzahl der Faktoren in dem allgemeinen Gliede der symmetrischen Funktion derselben m Veränderlichen,

$$S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_d^r \cdot \ldots],$$

so ist die Anzahl der Glieder dieser symmetrischen Funktion:

$$= m^{\nu|-1},$$

wenn die Exponenten n, p, q, r, ꝛc. alle von einander verschieden sind, dagegen

$$= \frac{m^{\nu|-1}}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \text{ꝛc.}\ \text{ꝛc.}},$$

wenn unter n, p, q, r ꝛc. ꝛc. α gleiche, hernach noch β andere

gleiche, darauf noch γ weitere gleiche, u. s. w. f. vorkommen, und, wie immer vorausgesetzt wird, keiner $= 0$ ist.

§. 468. Lehrsätze.

Es ist allemal, bey denselben m Veränderlichen:

I. $$S[x_a^n] \cdot S[x_a^p] = S[x_a^{n+p}] + S[x_a^n \cdot x_b^p]_{a \gtrless b}.$$

II. $$S[x_a^n] \cdot S[x_a^p] \cdot S[x_a^q] = S[x_a^{n+p+q}] + S[x_a^{n+p} \cdot x_b^q]_{a \gtrless b} + S[x_a^{n+q} \cdot x_b^p]_{a \gtrless b} + S[x_a^{p+q} \cdot x_b^n]_{a \gtrless b} + S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q]_{a \gtrless b \gtrless c}.$$

Beweis. Denn es ist nach (§. 397.):

$$S[x_a^n] \cdot S[x_a^p] = S[x_a^n \cdot x_b^p].$$

Aber das Aggregat zur Rechten läßt sich sogleich in zwey Aggregate zerlegen, von denen das eine die Glieder alle enthält, in welchen $a = b$ ist, und welches sich durch $S[x_a^{n+p}]$ ausdrückt, während das andere alle die Glieder liefert, in welchen a von b verschieden ist, und welches daher die durch $S[x_a^n \cdot x_b^p]_{a \gtrless b}$ vorgestellte einfache symmetrische Funktion der m Veränderlichen ist.

Und eben so wird nach (§. 397.):

$$S[x_a^n] \cdot S[x_a^p] \cdot S[x_a^q] = S[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q],$$

während sich das Resultat zur Rechten wiederum in fünf Aggregate zerlegen läßt, von denen das erste alle Glieder enthält, in welchen $a = b = c$, die drey andern aber alle die Glieder enthalten, in denen entweder $a = b$, oder $a = c$, oder $b = c$ wird, während das fünfte Aggregat alle die Glieder in sich aufnimmt, in denen a, b, c von einander verschieden sind.

§. 469. Zusatz.

Zugleich erhellet, wie das Produkt:

$$S[x_a^n] \cdot S[x_a^p] \cdot S[x_a^q] \cdot S[x_a^r] \cdot \text{ꝛc. ꝛc.}$$

von beliebig viel solchen Potenzsummen auf ähnliche Weise in einfache symmetrische Funktionen verwandelt werden kann.

§. 470. Zusatz.

Aber aus diesen Gleichungen (I. II.) des (§. 468.) und denen, die noch nach (§. 469.) in beliebiger Menge gefunden werden können, lassen sich nun umgekehrt alle einfachen symmetrischen ganzen Funktionen blos in Potenzsummen ausdrücken; wenn man diese Gleichungen in Bezug auf die jetzt als unbekannt gedachten Ausdrücke auflöset. Man findet namentlich:

$$\text{I.} \quad S\left[x_a^n \cdot x_b^p\right]_{a \gtrless b} = S\left[x_a^n\right] \cdot S\left[x_a^p\right] - S\left[x_a^{n+p}\right];$$

$$\text{II.} \quad S\left[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q\right]_{a \gtrless b \gtrless c} = S\left[x_a^n\right] \cdot S\left[x_a^p\right] \cdot S\left[x_a^q\right] - S\left[x_a^{n+p}\right] \cdot S\left[x_a^q\right]$$
$$- S\left[x_a^{n+q}\right] \cdot S\left[x_a^p\right] - S\left[x_a^{p+q}\right] \cdot S\left[x_a^n\right] + 2 \cdot S\left[x_a^{n+p+q}\right];$$

$$\text{III.} \quad S\left[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_b^r\right]_{a \gtrless b \gtrless c \gtrless b} = S\left[x_a^n\right] \cdot S\left[x_a^p\right] \cdot S\left[x_a^q\right] \cdot S\left[x_a^r\right]$$
$$- S\left[x_a^{n+p}\right] \cdot S\left[x_a^q\right] \cdot S\left[x_a^r\right] - S\left[x_a^{n+q}\right] \cdot S\left[x_a^p\right] \cdot S\left[x_a^r\right]$$
$$- S\left[x_a^{n+r}\right] \cdot S\left[x_a^p\right] \cdot S\left[x_a^q\right] - S\left[x_a^{p+q}\right] \cdot S\left[x_a^n\right] \cdot S\left[x_a^r\right]$$
$$- S\left[x_a^{p+r}\right] \cdot S\left[x_a^n\right] \cdot S\left[x_a^q\right] - S\left[x_a^{q+r}\right] \cdot S\left[x_a^n\right] \cdot S\left[x_a^p\right]$$
$$+ S\left[x_a^{n+p}\right] \cdot S\left[x_a^{q+r}\right] + S\left[x_a^{n+q}\right] \cdot S\left[x_a^{p+r}\right]$$
$$+ S\left[x_a^{n+r}\right] \cdot S\left[x_a^{p+q}\right] - 2 \cdot S\left[x_a^{n+p+q}\right] \cdot S\left[x_a^r\right]$$
$$- 2 \cdot S\left[x_a^{n+p+r}\right] \cdot S\left[x_a^q\right] - 2 \cdot S\left[x_a^{n+q+r}\right] \cdot S\left[x_a^p\right]$$
$$- 2 \cdot S\left[x_a^{p+q+r}\right] \cdot S\left[x_a^n\right] - 6 \cdot S\left[x_a^{n+p+q+r}\right],$$

u. s. w. f.;

und ähnliche Formeln ergeben sich auf demselben Wege für

$$S\left[x_a^n \cdot x_b^p \cdot x_c^q \cdot x_b^r \cdot x_e^s\right]_{a \gtrless b \gtrless c \gtrless d \gtrless e},$$

u. s. w. f.

§. 471. Zusatz.

Also läßt sich auch jede aus solchen einfachen, zusammengesetzte ganze symmetrische Funktion der m Veränderlichen, in

Potenzsummen derselben Veränderlichen, durch bloße Addition, Subtraktion und Multiplikation zusammengesetzt ausdrücken.

Aber der nun folgende

§. 472. Newton'sche Lehrsatz

lehrt wieder die Potenzsummen der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ in die Kombinations-Klassen:

$$\overset{1}{C},\ \overset{2}{C},\ \overset{3}{C},\ \overset{4}{C}, \ldots.$$

ohne Wiederholungeu aus denselben m Veränderlichen entwickelt, ausdrücken, wenn nämlich in letzteren die Verbindungen als Produkte betrachtet und zu einander addirt gedacht werden.

Ist nämlich $n \lessgtr m$, übrigens eine ganze positive Zahl, so ist allemal:

$$\text{I.}\quad S[x_a^n] - \overset{1}{C} \cdot S[x_a^{n-1}] + \overset{2}{C} \cdot S[x_a^{n-2}] - \overset{3}{C} \cdot S[x_a^{n-3}] + \ldots \mp \overset{n-1}{C} \cdot S[x_a^1] \pm n \cdot \overset{n}{C} = 0.$$

Und ist $n > m$, so ändert sich dieser Satz in:

$$\text{II.}\quad S[x_a^n] - \overset{1}{C} \cdot S[x_a^{n-1}] + \overset{2}{C} \cdot S[x_a^{n-2}] - \overset{3}{C} \cdot S[x_a^{n-3}] + \ldots \mp \overset{m-1}{C} \cdot S[x_a^{n-(m-1)}] \pm \overset{m}{C} \cdot S[x_a^{n-m}] = 0$$

um, wo die (—)- oder die (+)-Zeichen gelten, je nachdem die Klassenzahl der Kombinationen eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Beweis. Es bezeichne $\overset{h}{C}_{(x_a)}$ die hte Klasse der Kombinationen aus den m Elementen $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$, mit Ausnahme des Elementes x_a, so folgt aus der Art, wie diese Kombinations-Klassen entwickelt werden:

$$\overset{1}{C} = \underset{(x_a)}{\overset{1}{C}} + x_a',$$

$$\overset{2}{C} = \underset{(x_a)}{\overset{2}{C}} + x_a \cdot \underset{(x_a)}{\overset{1}{C}}',$$

$$\overset{3}{C} = \underset{(x_a)}{\overset{3}{C}} + x_a \cdot \underset{(x_a)}{\overset{2}{C}},$$

$$\vdots$$

$$\overset{n}{C} = \underset{(x_a)}{\overset{n}{C}} + x_a \cdot \underset{(x_a)}{\overset{n-1}{C}},$$

wo $n < m$ vorausgesetzt wird, und wo im Falle $n = m$ ist, statt $\underset{(x_a)}{\overset{n}{C}}$ die Null zu setzen ist.

Eliminirt man aber aus diesen Gleichungen die $\underset{(x_a)}{\overset{1}{C}}, \underset{(x_a)}{\overset{2}{C}}, \ldots \underset{(x_a)}{\overset{n-1}{C}}$, so ergibt sich sogleich:

$$1) \quad x_a^n - \overset{1}{C} \cdot x_a^{n-1} + \overset{2}{C} \cdot x_a^{n-2} - \overset{3}{C} \cdot x_a^{n-3} + \ldots \pm \overset{n}{C} = \pm \underset{(x_a)}{\overset{n}{C}}.$$

Denkt man sich nun in dieser Gleichung statt a, nach und nach $0, 1, 2, 3, \ldots m-1$ gesetzt, und dann addirt, so kommt allen Gliedern blos das Summenzeichen vorgesetzt, während $\overset{1}{C}, \overset{2}{C}, \overset{3}{C}$, &c. $\overset{n}{C}$ als von den Werthen des deutschen Buchstaben unabhängige gemeinschaftliche Faktoren, herausgesetzt werden können. Bedenkt man endlich, daß:

$$S\left[\underset{(x_a)}{\overset{n}{C}}\right] = (m-n) \cdot \overset{n}{C}$$

seyn wird, weil jede Verbindung von $\overset{n}{C}$ in n, von den m Ausdrücken $\underset{(x_a)}{\overset{n}{C}}$, nicht vorkommen kann, in den $m-n$ übrigen aber vorkommen muß, so ist der erste Theil des Lehrsatzes außer Zweifel, wo nämlich $n \leqq m$ ist.

Setzt man aber in der so eben erwiesenen Gleichung (1.) m statt n, und bedenkt man, daß $\underset{(x_a)}{\overset{m}{C}} = 0$ seyn muß, so erhält man, diese Gleichung mit x_a^{n-m} multiplizirend,

2) $x_a^n - \overset{1}{C} \cdot x_a^{n-1} + \overset{2}{C} \cdot x_a^{n-2} - \overset{3}{C} \cdot x_a^{n-3} + \cdots \pm \overset{m}{C} \cdot x_a^{n-m} = 0.$

Und wenn hier nach und nach 0, 1, 2, 3, ... m—1 statt a gesetzt, und wenn alle einzelnen Gleichungen zuletzt addirt werden, so ergibt sich:

$$S[x_a^n] - \overset{1}{C} \cdot S[x_a^{n-1}] + \overset{2}{C} \cdot S[x_a^{n-2}] - \cdots \pm \overset{m}{C} \cdot S[x_a^{n-m}] = 0,$$

welches den zweyten Theil des zu erweisenden Lehrsatzes ausmacht.

Anmerkung. Aus diesem letztern Beweise geht auch noch hervor, daß die zweyte Gleichung noch gilt, wenn n—m eine beliebige positive oder negative Zahl ist, also wenn $n > m$ oder $n < m$ ist.

§. 473. Andere Form des Newton'schen Lehrsatzes.

Läßt sich daher eine ganze Funktion eines einzigen Veränderlichen x, vom mten Grade, nämlich:

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + A_3 \cdot x^{m-3} + \cdots + A_m$$

in ein Produkt von m Faktoren von der Form:

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \cdots (x - x_{m-1})$$

zerlegen, so sind obige Kombinations-Klassen:

$$\overset{1}{C},\ \overset{2}{C},\ \overset{3}{C},\ \overset{4}{C}, \cdots \overset{\mu}{C}, \cdots \overset{m}{C},$$

aus den m Elementen x_0, x_1, x_2, x_{m-1}, beziehlich, nach (§§. 413.—415.):

$$-A_1,\ +A_2,\ -A_3,\ +A_4, \cdots \pm A_\mu, \cdots \pm A_m,$$

und die beyden Formeln des Newton'schen Lehrsatzes nehmen nun folgende Gestalt an:

1) Wenn $n \leqq m$,

$$S[x_a^n] + A_1 \cdot S[x_a^{n-1}] + A_2 \cdot S[x_a^{n-2}] + A_3 \cdot S[x_a^{n-3}] + \cdots + n \cdot A_n = 0.$$

2) Wenn $n \geqq m$,

$$S[x_a^n] + A_1 \cdot S[x_a^{n-1}] + A_2 \cdot S[x_a^{n-2}] + A_3 \cdot S[x_a^{n-3}] + \cdots + A_m \cdot S[x_a^{n-m}] = 0.$$

Anmerkung 1. Ist $n < m$, etwa $n + \mu = m$, so folgt noch hieraus, wenn man die Gleichung (1.) von der (2.) subtrahirt:

$$A_{n+1} \cdot S[x_a^{-1}] + A_{n+2} \cdot S[x_a^{-2}] + A_{n+3} \cdot S[x_a^{-3}] + \cdots + A_{n+\mu} \cdot S[x_a^{-\mu}] = 0.$$

Anmerkung 2. Auch folgt die Gleichung (2.) augenblicklich aus der gegebenen:

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + A_m = 0,$$

wenn man solche mit x^{n-m} multiplizirt, nachher aber $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ statt x schreibt, und diese Gleichungen alle addirt.

Und so ergibt sich dieser für die Lehre der höhern Gleichungen so wichtige

§. 474. End-Lehrsatz.

Läßt sich eine ganze Funktion F(x) des einzigen Veränderlichen x vom mten Grade, nämlich:

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m,$$

in ein Produkt von m Faktoren von der Form:

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{m-1})$$

zerlegen, so läßt sich jede symmetrische ganze Funktion der m Veränderlichen $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ allemal mittelst der Lehrsätze der (§§. 470.—473.) rational (d. h. ohne Wurzelzeichen also blos mittelst der vier erstern Operationen und höchstens noch der (eindeutigen) Differenz-Potenzen) in die Koeffizienten $A_1, A_2, A_2, \cdots A_m$ der ganzen Funktion F(x) ausdrücken, so daß man die Werthe dieser symmetrischen Funktionen, als eindeutige Ausdrücke, unmittelbar aus diesen gegebenen Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \cdots A_m$, berechnen kann, ohne die Werthe der Veränderlichen $x, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ selbst zu kennen.

Setzt man nämlich in den Gleichungen des Newton'schen Lehrsatzes (I. und II. §. 473.) nach und nach 1, 2, 3, 4, ... statt n, so erhält man die speziellen Gleichungen:

1) $S[x_a] + A_1 = 0;$
2) $S[x_a^2] + A_1 \cdot S[x_a] + 2A_2 = 0;$
3) $S[x_a^3] + A_1 \cdot S[x_a^2] + A_2 \cdot S[x_a] + 3A_3 = 0;$
4) $S[x_a^4] + A_1 \cdot S[x_a^3] + A_2 \cdot S[x_a^2] + A_3 \cdot S[x_a] + 4A_4 = 0;$

u. s. w. f.;

und diese Gleichungen liefern sogleich die Werthe der Potenz-Summen:

$$S[x_a],\quad S[x_a^2],\quad S[x_a^3],\quad S[x_a^4],\quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

in die Koeffizienten

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

rational (d. h. ohne Wurzelzeichen) ausgedrückt, nämlich:

I. $S[x_a] = -A_1$;
II. $S[x_a^2] = A_1^2 - 2A_2$;
III. $S[x_a^3] = -A_1^3 + 3A_1 \cdot A_2 - 3A_3$;
IV. $S[x_a^4] = A_1^4 - 4A_1^2 \cdot A_2 + 4A_1 \cdot A_3 - 2A_2^2 - 4A_4$;

u. s. w. f.

Dann aber liefern die Formeln des (§. 470.) jede einfache ganze symmetrische Funktion derselben m Veränderlichen, wiederum rational in die Potenzsummen, also auch rational (d. h. ohne Wurzelzeichen) in dieselben Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \ldots A_m$ ausgedrückt, wenn man die so eben gefundenen Werthe, statt der Potenzsummen substituirt. Und da jede andere ganze symmetrische Funktion aus solchen einfachen, durch Addition und Subtraktion zusammengesetzt ist, so ergibt sich auch für diese jedesmal ein rationaler Ausdruck, der blos die Koeffizienten $A_1, A_2, \ldots A_m$ enthält.

Beyspiel 1. Es sey die ganze Funktion von x vom vierten Grade,

$$x^4 + A_1 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x + A_4$$

in das Produkt der vier Faktoren

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

zerlegt, welches nach (§. 302.) allemal möglich ist, und die symmetrische ganze Funktion der vier Veränderlichen x_0, x_1, x_2, x_3, welche aus den Produkten je zweyer der sechs Summen:

$$x_0 + x_1,\ x_0 + x_2,\ x_0 + x_3,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_3,\ x_2 + x_3,$$

gebildet ist, nämlich:

$$\begin{aligned}
&(x_0 + x_1)(x_0 + x_2) + (x_0 + x_1)(x_0 + x_3) + (x_0 + x_1)(x_1 + x_2) \\
&+ (x_0 + x_1)(x_1 + x_3) + (x_0 + x_1)(x_2 + x_3) + (x_0 + x_2)(x_0 + x_3) \\
&+ (x_0 + x_2)(x_1 + x_2) + (x_0 + x_2)(x_1 + x_3) + (x_0 + x_2)(x_2 + x_3) \\
&+ (x_0 + x_3)(x_1 + x_2) + (x_0 + x_3)(x_1 + x_3) + (x_0 + x_3)(x_2 + x_3) \\
&+ (x_1 + x_2)(x_1 + x_3) + (x_1 + x_2)(x_2 + x_3) + (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)
\end{aligned}$$

in die Koeffizienten A_1, A_2, A_3, A_4 auszudrücken, so daß man deren Werth berechnen kann, ohne die Werthe von x_0, x_1, x_2, x_3, gefunden, d. h. ohne die Gleichung $x^4 + A_1 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x + A_4 = 0$,

welche nach (§. 307.) die vier Werthe x_0, x_1, x_2, x_3 für x liefert, wirklich aufgelöset zu haben.

Multiplizirt man die einzelnen Glieder der gegebenen ganzen symmetrischen Funktionen wirklich, so erhält man für sie:

$$3\cdot(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$+8\cdot(x_0\cdot x_1+x_0\cdot x_2+x_0\cdot x_3+x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3),$$

oder $3\cdot S[x_a^2]+8\cdot S[x_a\cdot x_b]$,
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a<b$

oder $3\cdot S[x_a^2]+4\cdot S[x_a\cdot x_b]$,
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a\gtrless b$

weil $S[x_a\cdot x_b] = 2\cdot S[x_a\cdot x_b]$ ist.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a\gtrless b\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad a<b$

Nun ist aber aus den Gleichungen des Lehrsatzes:

$$S[x_a] = -A_1$$

und $S[x_a^2] = A_1^2-2\cdot A_2$.

Und dann nach (§. 470.):

$$S[x_a\cdot x_b] = S[x_a]\cdot S[x_a]-S[x_a^2] = A_1^2-(A_1^2-2A_2) = 2\cdot A_2;$$
$$a\gtrless b$$

folglich die gegebene symmetrische Funktion:

$$= 3\cdot(A_1^2-2A_2)+8\cdot A_2 = 3A_1^2+2A_2.$$

Beyspiel 2. Wäre dagegen diejenige symmetrische Funktion in die Koeffizienten A_1, A_2, A_3 und A_4 auszudrücken, welche entsteht, wenn die sechs Summen x_0+x_1, x_0+x_2, x_0+x_3, x_1+x_2, x_1+x_3, x_2+x_3, zu dreyen kombinirt werden, d. h. wenn aus diesen sechs Summen die dritte Klasse der Kombinationen ohne Wiederholungen entwickelt wird, während die Verbindungen als zu addirende Produkte angesehen werden sollen; wäre also gegeben die symmetrische Funktion:

$$(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_0+x_3)+(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_1+x_2)$$
$$+(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_1+x_3)+(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_2+x_3)$$
$$+(x_0+x_1)(x_0+x_3)(x_1+x_2)+(x_0+x_1)(x_0+x_3)(x_1+x_3)$$
$$+(x_0+x_1)(x_0+x_3)(x_2+x_3)+(x_0+x_1)(x_1+x_2)(x_1+x_3)$$
$$+(x_0+x_1)(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_0+x_1)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$$
$$+(x_0+x_2)(x_0+x_3)(x_1+x_2)+(x_0+x_2)(x_0+x_3)(x_1+x_3)$$
$$+(x_0+x_2)(x_0+x_3)(x_2+x_3)+(x_0+x_2)(x_1+x_2)(x_1+x_3)$$
$$+(x_0+x_2)(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_0+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$$
$$+(x_0+x_3)(x_1+x_2)(x_1+x_3)+(x_0+x_3)(x_1+x_2)(x_2+x_3)$$
$$+(x_0+x_3)(x_1+x_3)(x_2+x_3)+(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3),$$

so verwandelt sich solche durch wirkliche Multiplikation zunächst in:

$$S[x_a^3] + 7 \cdot S[x_a^2 \cdot x_b] + 18 \cdot S[x_a \cdot x_b \cdot x_c],$$
$$a \gtrless b \qquad a < b < c$$

wobey $6 \cdot S[x_a \cdot x_b \cdot x_c] = S[x_a \cdot x_b \cdot x_c]$ ist,
$a < b < c \qquad a \gtrless b \gtrless c$

so daß die gegebene symmetrische Funktion auch so:

$$S[x_a^3] + 7 \cdot S[x_a^2 \cdot x_b] + 3 \cdot S[x_a \cdot x_b \cdot x_c]$$
$$a \gtrless b \qquad a \gtrless b \gtrless c$$

geschrieben werden kann *).

---

*) Der Anfänger ist hier noch auf Folgendes aufmerksam zu machen:

Die gegebene symmetrische Funktion, weil sie die dritte Klasse der Kombinationen ohne Wiederholungen aus sechs Elementen war, enthält $\frac{6^{3|}-1}{3!}$, d. h. $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, oder 20 Produkte; und jedes Produkt liefert 8 Glieder, wenn man die 3 zweygliedrigen Summen mit einander multiplizirt; also enthält jene, $8 \cdot 20$, d. h. 160 Glieder. Der zuletzt dafür gefundene Ausdruck, enthält die Potenzsumme $S[x_a^3]$, welche, weil blos die 4 Veränderlichen x_0, x_1, x_2 und x_3 vorkommen, nur 4 Glieder hat; dann 7 mal die einfache symmetrische Funktion $S[x_a^2 \cdot x_b]$, welche $4 \cdot 3$ d. h. 12 Glieder hat; endlich 18 mal die sym-
$a \gtrless b$

metrische Funktion $S[x_a \cdot x_b \cdot x_c]$, welche 4 Glieder hat; also zusammen
$a < b < c$

$4 + 7 \cdot 12 + 18 \cdot 4$ d. h. 160 Glieder. Diese Uebereinstimmung ist wichtig, wegen der Versicherung, welche daraus hervorgeht, daß man keine Glieder ausgelassen habe.

Man wird nämlich die, in diesen einzelnen obigen gegebenen Produkten angezeigte Multiplikation nicht wirklich verrichten, sondern blos eine davon, und die entstehenden Glieder aufmerksam betrachten. Dann findet man, daß jedes dieser Glieder 3 Faktoren bekommt, die alle 3 einander gleich, oder alle 3 von einander verschieden, oder von denen zwey einander gleich, der dritte aber verschieden seyn können. Es muß also die gegebene symmetrische Funktion ganz und vollkommen hervorgehen, wenn man aufsucht, wie oft in allen diesen Produkten x_0^3, wie oft $x_0^2 \cdot x_1$, und wie oft $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2$ vorkommt, und dann in diesen Gliedern nach und nach die Veränderlichen mit einander vertauscht sich denkt. Eine leichte Betrachtung der gegebenen Funktion

Nun ist aber nach (§. 470.):

$$S[x_a^2 \cdot x_b] = S[x_a^2] \cdot S[x_a] - S[x_a^3]$$
$$a \gtrless b$$

und

$$S[x_a \cdot x_b \cdot x_c] = (S[x_a])^3 - 3S[x_a^2] \cdot S[x_a] + 2S[x_a^3];$$
$$a \gtrless b \gtrless c$$

also unsere symmetrische Funktion

$$= 3 \cdot (S[x_a])^3 - 2S[x_a^2] \cdot S[x_a].$$

Und weil $S[x_a] = -A_1$ und $S[x_a^2] = A_1^2 - 2A_2$ ist, so wird unsere symmetrische Funktion

$$= -3A_1^3 + 2A_1(A_1^2 - 2A_2) = -A_1^3 - 4A_1 \cdot A_2.$$

Beyspiel 3. Ist gegeben die symmetrische Funktion, welche durch die vierte Klasse der Kombinationen ohne Wiederholungen aus den 6 Summen:

$$x_0 + x_1,\ x_0 + x_2,\ x_0 + x_3,\ x_1 + x_2,\ x_1 + x_3,\ x_2 + x_3$$

gebildet wird, die also aus folgenden 15 Produkten besteht:

$$(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_0+x_3)(x_1+x_2) +$$
$$(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_0+x_3)(x_1+x_3) +$$
$$(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_0+x_3)(x_2+x_3) +$$
$$(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_1+x_2)(x_1+x_3) +$$
$$(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_1+x_2)(x_2+x_3) +$$
$$(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) +$$
$$(x_0+x_1)(x_0+x_3)(x_1+x_2)(x_1+x_3) +$$
$$(x_0+x_1)(x_0+x_3)(x_1+x_2)(x_2+x_3) +$$
$$(x_0+x_1)(x_0+x_3)(x_1+x_3)(x_2+x_3) +$$
$$(x_0+x_1)(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) +$$
$$(x_0+x_2)(x_0+x_3)(x_1+x_2)(x_1+x_3) +$$
$$(x_0+x_2)(x_0+x_3)(x_1+x_3)(x_2+x_3) +$$
$$(x_0+x_2)(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3) +$$
$$(x_0+x_3)(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3),$$

---

zeigt aber sogleich, daß x_0^3 nur einmal, $x_0^2 \cdot x_1$ dagegen 7 mal, und $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2$, alle Produkte wohlgeordnet gedacht, 18 mal vorkommt.

Diese Winke in Bezug auf dieses Beyspiel, mögen hinreichen, den Anfänger fühlen zu lassen, wie er sich in andern ähnlichen vorkommenden Fällen ohngefähr zu verhalten habe, um jedesmal dem vorgesteckten Ziele schnell und sicher näher zu rücken.

so besteht solche aus 15·16 d. h. aus 240 Gliedern, wenn die Multiplikation wirklich verrichtet wird. Jedes dieser Glieder besteht aus 4 Faktoren, von denen drey einander gleich, oder zwey einander gleich, und die beyden andern gleich oder verschieden, oder endlich alle vier von einander verschieden sind; so daß also diese symmetrische Funktion aus den einfachen symmetrischen Funktionen:

$$S[x_a^3 \cdot x_b]_{a \gtrless b}, \quad S[x_a^2 \cdot x_b^2]_{a<b}, \quad S[x_a^2 \cdot x_b \cdot x_c]_{a \gtrless b \gtrless c}, \quad S[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot x_d]_{a<b<c<d},$$

besteht. Um aber zu wissen, wie oft jede dieser einfachen symmetrischen Funktionen in der gegebenen vorkommt, darf man nur untersuchen, wie oft die Glieder $x_0^3 \cdot x_1$, $x_0^2 \cdot x_1^2$, $x_0^2 \cdot x_1 \cdot x_2$ und $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ vorkommen. Und da findet man bey einer bloßen Ansicht der 4 Faktoren, aus welchen ein Glied der gegebenen symmetrischen Funktion besteht, daß $x_0^3 \cdot x_1$ nur 2 mal, $x_0^2 \cdot x_1^2$ dagegen 5 mal, $x_0^2 \cdot x_1 \cdot x_2$ aber 13 mal und $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ sogar 30 mal vorkommt.

Also ist die gegebene symmetrische Funktion

$$= 2\,S[x_a^3 \cdot x_b]_{a \gtrless b} + 5\,S[x_a^2 \cdot x_b^2]_{a<b} + 13\,S[x_a^2 \cdot x_b \cdot x_c]_{a \gtrless c,\ a \gtrless b,\ b<c} + 30\,S[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot x_d]_{a<b<c<d}$$

*)

$$= 2\,S[x_a^3 \cdot x_b]_{a \gtrless b} + \tfrac{5}{2}\,S[x_a^2 \cdot x_b^2]_{a \gtrless b} + \tfrac{13}{2}\,S[x_a^2 \cdot x_b \cdot x_c]_{a \gtrless b \gtrless c} + \tfrac{5}{4}\,S[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot x_d]_{a \gtrless b \gtrless c \gtrless d},$$

weil $S[x_a^2 \cdot x_b^2]_{a<b} = \frac{1}{2} S[x_a^2 \cdot x_b^2]_{a \gtrless b}$ und $S[x_a^2 \cdot x_b \cdot x_c]_{a \gtrless c,\ a \gtrless b,\ b<c} = \frac{1}{2}\, S[x_a^2 \cdot x_b \cdot x_c]_{a \gtrless b \gtrless c}$

und $S[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot x_d]_{a<b<c<d} = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{1}{24} S[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot x_d]_{a \gtrless b \gtrless c \gtrless d}$ ist.

Nun ist aber nach (§. 470.):

---

*) Dies sind dem (§. 467. Nr. 5.) gemäß zusammen wieder 240 Glieder, so daß man hieran gleichsam eine Probe hat, kein Glied übergangen zu haben.

$$S[x_a^3 \cdot x_b] = S[x_a^3] \cdot S[x_a] - S[x_a^4],$$
$$a \gtrless b$$

$$S[x_a^2 \cdot x_b^2] = \left(S[x_a^2]\right)^2 - S[x_a^4],$$
$$a \gtrless b$$

$$S[x_a^2 \cdot x_b \cdot x_c] = S[x_a^2] \cdot \left(S[x_a]\right)^2 - 2S[x_a^3] \cdot S[x_a] - \left(S[x_a^2]\right)^2 + 2S[x_a^4],$$
$$a \gtrless b \gtrless c$$

$$S[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot x_b] = \left(S[x_a]\right)^4 - 6S[x_a^2] \cdot \left(S[x_a]\right)^2 + 3\left(S[x_a^2]\right)^2 - 8S[x_a^3] \cdot S[x_a] - 6S[x_a^4].$$
$$a \gtrless b \gtrless c \gtrless b$$

Und daraus ergibt sich sogleich unsere symmetrische Funktion in die Koeffizienten A_1, A_2, A_3, A_4 ausgedrückt. —

Dritte Abtheilung.

Von den Ableitungen der ganzen Funktionen zweyer oder mehrer Veränderlichen.

---

§. 475. Erklärung.

Da eine ganze Funktion zweyer Veränderlichen x und y, bald als eine ganze Funktion von x allein (deren Koeffizienten wiederum ganze Funktionen von y sind), bald als eine ganze Funktion von y allein (deren Koeffizienten wieder ganze Funktionen von x seyn werden), angesehen werden kann, so kann man von ihr die Ableitungen im doppelten Sinne nehmen, einmal nach x, und dann auch noch nach y; und es ist deshalb nothwendig, diese beyden verschiedenen Ableitungen auch durch verschiedene Zeichen von einander zu unterscheiden.

Stellt daher $F(x,y)$ irgend eine ganze Funktion der beyden Veränderlichen x und y vor, so sollen

∂F_x und ∂F_y

die Ableitungen bedeuten, in diesem doppelten Sinne genommen.

Beyspiel. Ist z. B. $F(x,y)$ die ganze Funktion

$$a+bx^2+cy^2+dxy+ex+gxy^3+fx^4+lx^3y,$$

so ist

1) $\partial F_x = 2bx+dy+e+gy^3+4fx^3+3lx^2y$

und 2) $\partial F_y = 2cy+dx+3gxy^2+lx^3$.

Im erstern Fall wird nämlich $F(x,y)$ als eine ganze Funktion von x allein angesehen, kann so geschrieben werden:

$$fx^4+lyx^3+bx^2+(gy^3+dy+e)x+(cy^2+a),$$

und gibt dann nach (§. 436.) sogleich die durch ∂F_x bezeichnete Ableitung:

$$4fx^3+3lyx^2+2bx+gy^3+dy+e.$$

Im andern Falle dagegen wird $F(x,y)$ blos als eine Funktion von y angesehen, kann so geschrieben werden:

$$gxy^3+cy^2+(lx^3+dx)y+lx^4+bx^2+ex+a),$$

und gibt sogleich nach (§. 436.) die durch ∂F_y vorgestellte Ableitung, nämlich $3gxy^2+2cy+lx^3+dx$.

Es versteht sich aber von selbst, daß man nach (§. 436.) die Ableitungen nehmen kann, ohne daß die Funktion erst als solche geordnet zu seyn braucht, wenn man nur von den einzelnen Gliedern, je nachdem man sie als ganze Funktionen von x, oder von y ansieht, nach (§. 436.) die Ableitungen nimmt; wie solches namentlich auch noch aus (§. 442. II.) erhellet.

Anmerkung. Es ist also in dieser Abtheilung nicht von neuen Ableitungen die Rede, sondern nur von neuen Zeichen, um die Ableitungen der Funktion $F(x,y)$ in dem doppelten Sinne, in welchem sie statt finden können, dadurch von einander zu unterscheiden.

§. 476. Erklärung.

Weil ∂F_x und ∂F_y selbst wieder ganze Funktionen von x und y seyn werden, wie F selbst, so kann man von jeder derselben wiederum die Ableitungen nach x und nach y nehmen, welche natürlich dann so:

$$\partial(\partial F_x)_x,\quad \partial(\partial F_x)_y,\quad \partial(\partial F_y)_x,\quad \partial(\partial F_y)_y$$

geschrieben werden müssen, der Kürze wegen aber immer so:

$$\partial^2 F_x, \quad \partial^{1,1} F_{x,y}, \quad \partial^{1,1} F_{y,x}, \quad \partial^2 F_y,$$

geschrieben werden sollen.

Und da jeder dieser Ausdrücke, gerade wie F selbst, wieder als eine ganze Funktion von x und y angesehen werden kann oder muß, so kann man wieder von jeder derselben die Ableitungen nehmen nach x und nach y, welche nach (§. 475.) durch $\partial(\partial^2 F_x)_x$, $\partial(\partial^2 F_x)_y$, $\partial(\partial^{1,1} F_{x,y})_x$, $\partial(\partial^{1,1} F_{x,y})_y$, $\partial(\partial^{1,1} F_{y,x})_x$, &c. bezeichnet werden müssen, von uns hier aber noch kürzer durch

$$\partial^3 F_x, \quad \partial^{2,1} F_{x,y}, \quad \partial^{1,1,1} F_{x,y,x}, \quad \partial^{1,2} F_{x,y}, \quad \partial^{1,2} F_{y,x}$$

bezeichnet werden.

Beyspiel. Verfolgt man das Beyspiel zu (§. 475.), so ergibt sich aus den dortigen (1.) und (2.):

3) $\partial^2 F_x = 2b + 12f x^2 + 6lxy;$

4) $\partial^{1,1} F_{x,y} = d + 3gy^2 + 3lx^2;$

5) $\partial^{1,1} F_{y,x} = d + 3gy^2 + 3lx^2;$

6) $\partial^2 F_y = 2c + 6gxy.$

Und hieraus wieder:

7) $\partial^3 F_x = 24fx + 6ly;$

8) $\partial^{2,1} F_{x,y} = 6lx;$

9) $\partial^{1,1,1} F_{x,y,x} = 6lx;$

10) $\partial^{1,2} F_{x,y} = 6gy;$

11) $\partial^{1,2} F_{y,x} = 6lx;$

12) $\partial^{1,1,1} F_{y,x,y} = 6gy;$

13) $\partial^{2,1} F_{y,x} = 6gy;$

14) $\partial^3 F_y = 6gx.$

Betrachtet man noch überdies die Resultate (4. und 5.), so sieht man, wie für

$$\partial^{1,1} F_{y\,x} \quad \text{und} \quad \partial^{1,1} F_{x,y}$$

sich ein und dasselbe Resultat ergeben hat; während aus den (Nummern 10. 12. und 13.) hervorgeht, daß auch für

$$\partial^{1,2} F_{x,y}, \quad \partial^{1,1,1} F_{y,x,y} \quad \text{und} \quad \partial^{2,1} F_{y,x}$$

ein und dasselbe herauskommt.

Und demnach scheint es, als wenn die Ordnung der Ableitungen nach x und nach y hinsichtlich des Endresultats jedesmal ganz gleichgültig wäre.

Auch fällt in die Augen, wie man fortfahren kann, von den erhaltenen Ableitungen immer auf's Neue die Ableitungen zu nehmen, bis solche zuletzt Null werden, so daß alle nun folgenden als Null angesehen werden müssen.

§. 477. Der Taylor'sche Lehrsatz für ganze Funktionen zweyer Veränderlichen.

Ist $F(x,y)$ eine beliebige ganze Funktion zweyer Veränderlichen von der mten Ordnnng, und stellt $F(x+h,y+k)$ das vor, was aus ihr wird, wenn $x+h$ statt x, und $y+k$ statt y gesetzt wird, so ist allemal

$$F(x+h,y+k) = S\left[\partial^{a,b}F_{x,y}\cdot\frac{h^a}{a!}\cdot\frac{k^b}{b!}\right]_{a+b+c=m},$$

oder, wenn man zuerst m, dann $m-1$, $m-2$, $m-3$, &c., zuletzt 0 statt c setzt,

$$F(x+h,y+k) = F(x,y)+\partial F_x\cdot h+\partial^2 F_x\cdot\frac{h^2}{2!}+\partial^3 F_x\cdot\frac{h^3}{3!}+\cdots$$

$$+\partial F_y\cdot k+\partial^{1,1}F_{x,y}\cdot\frac{hk}{1.1}+\partial^{2,1}F_{x,y}\cdot\frac{h^2k}{2!1.}+\cdots$$

$$+\partial^2 F_y\cdot\frac{k^2}{2!}+\partial^{1,2}F_{x,y}\cdot\frac{hk^2}{1.2!}+\cdots$$

$$+\partial^3 F_y\cdot\frac{k^3}{3!}+\cdots$$

$$+\cdots$$

Beweis. Denn da $F(x,y)$ als eine ganze Funktion von y angesehen werden kann, so folgt, nach dem einfachen Taylor'schen Lehrsatze des (§. 440.):

$$1)\ F(x,y+k) = S\left[\partial^b F_y\cdot\frac{k^b}{b!}\right]_{b+c=m}.$$

Und setzt man hier links und rechts $x+h$, statt x, so folgt hieraus:

$$2)\ F(x+h,y+k) = S\left[(\partial^b F_y)_{x+h}\cdot\frac{k^b}{b!}\right]_{b+c=m}.$$

Nun ist aber $(\partial^b F_y)$ eine ganze Funktion von x und y, für jeden stehenden Werth von b, also auch eine ganze Funktion von x gewesen, im allgemeinen vom $m$ten Grade, in welcher $x+h$ statt x gesetzt worden, auf welche also der einfache Taylor'sche Lehrsatz des (§. 440.) noch einmal angewandt werden kann; also daß man hat:

$$3)\quad (\partial^b F_y)_{x+h} = S\left[\partial^a (\partial^b F_y)_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right]_{a+b=m} = S\left[\partial^{a,b} F_{x,y} \cdot \frac{h^a}{a!}\right]_{a+b=m},$$

in so ferne wir durch $\partial^{a,b} F_{x,y}$ nichts weiter bezeichnen, als die $a$te Ableitung nach x, von der ganzen Funktion $\partial^b F_y$, welche selbst schon die $b$te Ableitung nach y, von F selbst ist. Und substituirt man diesen Werth in (2.) zur Rechten, so erhält man:

$$4)\quad F(x+h,y+k) = S\left[\partial^{a,b} F_{x,y} \cdot \frac{h^a k^b}{a!\ b!}\right]_{a+b=m,\ b+c=m},$$

während man statt der beschränkenden Gleichungen $a+b=m$, $b+c=m$, da sie nichts weiter verlangen, als daß weder a, noch b, größer als m werden sollen, die einzige, dasselbe leistende, $a+b+c=m$ setzen kann.

Beyspiel. Nimmt man wieder statt $F(x,y)$ die ganze Funktion des Beyspiels zu (§. 475.), so findet sich für das, was aus ihr wird, wenn man $x+h$ statt x und zugleich $y+k$ statt y setzt, nach vorstehendem Lehrsatze:

als erstes Glied sie selber

$$+(2bx+dy+e+gy^3+4fx^3+3lx^2y)\cdot h+(2cy+dx+3gxy^2+lx^3)\cdot k$$
$$+(2b+12fx^2+6lxy)\cdot\frac{h^2}{2}+(d+3gy^2+3lx^2)\cdot hk+(2c+6gy)\cdot\frac{k^2}{2}$$
$$+(24fx+6ly)\cdot\frac{h^3}{3!}+6lx\cdot\frac{h^2k}{2}+6gy\cdot\frac{hk^2}{2}+6gx\cdot\frac{k^3}{3!}$$
$$+24f\cdot\frac{h^4}{4!}+6l\cdot\frac{h^3k}{3!}+6g\cdot\frac{hk^3}{3!},$$

in so ferne aus den (Nrn. 7. 11. 13. und 14.) des, im (§. 476.) fortgesetzten Beyspiels, wiederum,

$$\partial^4 F_x = 24f,\quad \partial^{3,1} F_{x,y} = 6l,\quad \partial^{2,2} F_{x,y} = 0,\quad \partial^{1,3} F_{x,y} = 6g$$
$$\text{und}\qquad \partial^4 F_y = 0$$

sich ergeben.

§. 478. Zusatz.

Man konnte in der Entwickelung von $F(x+h,y+k)$, statt in $F(x,y)$ zuerst $y+k$ statt y zu setzen, lieber zuerst $x+h$ statt x setzen, und nachher erst $y+k$ statt y. — Dann bekam man:

$$F(x+h,y+k) = S\left[\partial^{b,a}F_{y,x}\cdot\frac{k^b\cdot h^a}{b!\ a!}\right]_{b+a+c=m}.$$

Und wenn man diese Reihe mit der des (§. 477.) vergleicht, so ergibt sich nach (§. 423.):

$$\partial^{a,b}F_{x,y} = \partial^{b,a}F_{y,x}, \quad \text{d. h.} \quad \partial^a(\partial^b F_y)_x = \partial^b(\partial^a F_x)_y$$

für jede ganze Zahl oder Null, die statt a und b gesetzt werden mag; so daß sich bestätigt findet, was am Ende des Beyspiels zu (§. 476.) nur vermuthet wurde.

§. 479. Zusatz.

Setzt man in (§. 477.) ph statt k, so erhält man:

$$F(x+h,y+ph) = S\left[\partial^{a,b}F_{x,y}\cdot p^b\cdot\frac{h^{a+b}}{a!\ b!}\right]_{a+b+d=m};$$

und wenn man die beschränkende Gleichung $a+b=c$ noch hinzufügt, in so ferne sie dasmal nicht beschränkt, so kann dieses Resultat auch so geschrieben werden:

$$F(x+h,y+ph) = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!}\partial^{a,b}F_{x,y}\cdot p^b\cdot\frac{h^c}{c!}\right]_{a+b=c,\ c+d=m},$$

wo $\frac{(a+b)!}{a!\ b!}$ der Binomial-Koeffizient $(a+b)_b$, oder $(a+b)_a$, oder c_b, oder c_a ist, und aus welchem Aggregat zur Rechten, wenn man hier 0, 1, 2, 3, ꝛc. statt c setzt, hervorgeht:

$$F(x+h,y+ph) =$$

$$F+(\partial F_x+\partial F_y\cdot p)\cdot h+(\partial^2 F_x+2\partial^{1,1}F_{x,y}\cdot p+\partial^2 F_y\cdot p^2)\cdot\frac{h^2}{2!}$$

$$+(\partial^3 F_x+3\partial^{2,1}F_{x,y}\cdot p+3\partial^{1,2}F_{x,y}\cdot p^2+\partial^3 F_y\cdot p^3)\cdot\frac{h^3}{3!}+\text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

§. 480. Zusatz.

Aus dieser Form geht hervor:

1) Wenn man in einer reelen ganzen Funktion $F(x,y)$ zweyer Veränderlichen x und y, dem x und dem y, nach und nach beliebig und unabhängig von einander, alle reelen Werthe von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin beygelegt sich denkt, so ändert sich $F(x,y)$ mit den stetig und unabhängig von einander sich ändernden Werthen von x und y, selbst nur stetig.

Denn wenn sich der Werth von x um h ändert, was im Moment des Verschwindens gedacht wird, und der von y um ph, wo p ganz willkührlich gedacht ist, so ändert sich die Funktion selbst um Glieder, welche mit h, h^2, ꝛc. multiplizirt, also selber im Moment des Verschwindens sind.

2) Ist der Koeffizient von h, $= 0$, dagegen der von h^2 nicht Null sondern positiv, so ist für diese Werthe von x und y,

$$F(x+h,y+ph) > F(x,y),$$

man mag h positiv oder negativ nehmen, wenn nur jedesmal im Moment des Verschwindens; nach (§§. 458. und 459.).

Macht man also diesen Koeffizienten von h, nämlich:

$$\partial F_x + \partial F_y \cdot p, = 0,$$

wie auch p genommen seyn mag, d. h. macht man

$$\text{I.}\quad \partial F_x = 0, \qquad \text{und} \qquad \text{II.}\quad \partial F_y = 0,$$

so bekommt man aus diesen beyden Gleichungen die Werthe von x und von y, für welche $F(x,y)$ kleiner ist, als die, zu stetig und unabhängig von einander geänderten Werthen von x und y, gehörigen Werthe dieser Funktion, wenn nur dieselben Werthe von x und von y den Koeffizienten von h^2, nämlich:

$$\partial^2 F_x + 2\partial^{1,1} F_{x,y} \cdot p + \partial^2 F_y \cdot p^2,$$

welchen reelen Weeth man auch statt p setzen mag, doch immer positiv machen. — Dies letztere findet aber nach (§§. 260. und 261.) statt, wenn

$\partial^2 F_x$ positiv, und $\partial^2 F_x \cdot \partial^2 F_y > (\partial^{1,1} F_{x,y})^2$ wird, welche letztere Bedingung zur nothwendigen Folge hat, daß auch $\partial^2 F_y$ zu gleicher Zeit positiv seyn muß.

Wird aber dieser letztere Ausdruck durchaus negativ, für diese Werthe von x und y, welche den Gleichungen (I. und II.) genügen, und für jeden Werth von p; und dies ist der Fall, wenn für dieselben Werthe von x und y,

$$\partial^2 F_x \text{ negativ, und } \partial^2 F_x \cdot \partial^2 F_y > (\partial^{1,1} F_{x,y})^2$$

wird; so ist F(x,y) für diese Werthe von x und y, allemal größer, als die zu, beliebig und unabhängig von einander stetig geänderten Werthen von x und y, gehörigen Werthe dieser Funktion, wie solche durch F(x+h,y+ph) vorgestellt sind.

Im erstern Falle nennt man F(x,y) ein Kleinstes, im andern ein Größtes.

3) Wenn endlich reele Werthe von x und y, nicht blos

$$\partial F_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial F_y = 0,$$

sondern auch den Koeffizienten von h^2, der Null gleich machen, so müssen sie auch noch den Koeffizienten von h^3, $= 0$ machen, wenn, je nachdem der Koeffizient von h^4 durch sie positiv oder negativ wird, der zugehörige Werth von F(x,y) ein Kleinstes ode ein Größtes werden soll.

U. s. w. f.

Schluß-Anmerkung.

Es ist aber nicht zu verkennen, daß alles, was hier für ganze Funktionen zweyer Veränderlichen gesagt worden ist, ohne weiteres auf ganze Funktionen dreyer oder mehrer Veränderlichen ausgedehnt werden könne.

Zahlenlehre.

Ein und zwanzigstes Kapitel.

Fortsetzung der Lehre der ganzen Funktionen. Lehre der höhern Gleichungen.

Erste Abtheilung.

Fundamentalsätze der höhern Gleichungen.

§. 481. Lehrsatz.

Sind in einer ganzen Funktion f(x) vom mten Grade, nämlich in:

$$A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots+A_m\cdot x^m, \text{ oder } S\left[A_a\cdot x^a\right]_{a+b=m},$$

die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, $\cdots A_m$ alle ganz beliebige allgemein-numerische Ausdrücke (d. h. Ausdrücke von der Form $p+qi$, die sowohl reel als auch imaginär seyn können), so gibt es allemal wenigstens einen allgemein-numerischen Ausdruck $y+z\cdot i$ (wo y und z reel, i aber die $\sqrt{-1}$ ist), welcher statt x gesetzt, diese ganze Funktion f(x) zu Null macht.

Beweis. Denn man nehme an, daß für jeden Werth von a, der Koeffizient A_a die Form $B_a+C_a\cdot i$ hätte, wo B_a und C_a reel sind; und man setze zu gleicher Zeit $y+z\cdot i$ statt x, so wird:

$$1)\quad f(x)=S\left[(B_a+C_a\cdot i)(y+z\cdot i)^a\right]_{a+b=m}.$$

Nun ist aber für jeden stehenden Werth von a, nach dem binomischen Lehrsatze (§§. 401. und 402.):

$$2)\quad (y+z\cdot i)^a = S\left[\frac{a!}{c!\ d!}y^c\cdot z^d\cdot i^d\right]_{c+d=a},$$

oder nach (§. 387.), wenn man zuerst $2d$, hernach $2d+1$ statt d setzt, und bemerkt, daß $i^{2d} = (i^2)^d = (-1)^d$ und $i^{2d+1} = i\cdot(-1)^d$ ist,

$$3)\quad (y+z\cdot i)^a$$
$$= S\left[\frac{a!}{c!(2d)!}y^c z^{2d}(-1)^d\right]_{c+2d=a} + i\cdot S\left[\frac{a!}{c!(2d+1)!}y^c z^{2d+1}(-1)^d\right]_{c+2d+1=a},$$

wo in dem 2ten Aggregat zur Rechten, nach (§. 389.), und weil für $a = 0$ keine Werthe für c und d existiren, ohne weiteres $a+1$ statt a gesetzt werden kann, so daß man hat:

$$4)\quad (y+z\cdot i)^a$$
$$= S\left[\frac{a!}{c!(2d)!}y^c z^{2d}(-1)^d\right]_{c+2d=a} + i\cdot S\left[\frac{(a+1)!}{c!(2d+1)!}y^c z^{2d+1}(-1)^d\right]_{c+2d=a}.$$

Setzt man nun diesen Werth statt $(y+z\cdot i)^a$ in (1.), so erhält man:

$$5)\quad f(x) = S\left[B_a\cdot\frac{a!}{c!(2d)!}(-1)^d y^c z^{2d} - C_a\cdot\frac{(a+1)!}{c!(2d+1)!}(-1)^d y^c z^{2d+1}\right]_{c+2d=a,\ a+b=m}$$
$$+ i\cdot S\left[B_a\cdot\frac{(a+1)!}{c!(2d+1)!}(-1)^d y^c z^{2d+1} + C_a\cdot\frac{a!}{c!(2d)!}(-1)^d y^c z^{2d}\right]_{c+2d=a,\ a+b=m},$$

oder:

$$6)\quad f(x) = \varphi(y,z) + i\cdot\psi(y,z)\ *),$$

wenn man unter $\varphi(y,z)$ oder φ, und unter $\psi(y,z)$ oder ψ, die beyden vorstehenden Aggregate versteht, welche, wie man sieht, reele ganze Funktionen der beyden Veränderlichen y und z sind, im Allgemeinen vom $m$ten Grade.

---

*) Der ganze Beweis dreht sich um diese Punkte herum:
1) $y+z\cdot i$ statt x in $f(x)$ zu setzen, und sich zu überzeugen, daß $f(x)$ in die Form $\varphi+i\cdot\psi$ übergeht, wo φ und ψ reele ganze Funktionen von y und z sind; 2) nachzuweisen, daß es reele Werthe für y und z geben müsse, welche $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ machen.

Diesem letztern Punkt zu Folge nimmt man $\varphi^2+\psi^2$, welche lauter reele und positive Werthe hat, für alle reelen Werthe, die man nur immer statt y und statt z setzen mag, — welche also nothwendig einen kleinsten reelen Werth haben muß, — und zeigt, daß dieser kleinste Werth 0 ist, woraus $\varphi = 0$, $\psi = 0$ folgt, nach (§. 321. II.).

Nimmt man nun links und rechts in (6.) die Ableitungen nach y und nach z, indem man bemerkt, daß

$$x = y + z \cdot i,$$

also nach (§. 436.) und (§. 475.) *),

$$7)\ \frac{\partial}{y}x = 1 \qquad \text{und} \qquad 8)\ \frac{\partial}{z}x = i$$

ist, so erhält man mit Hilfe des (§. 445.) und nach (§. 442. II.):

$$9)\ \partial f(x) \cdot \frac{\partial}{y}x = \frac{\partial}{y}\varphi + i \cdot \frac{\partial}{y}\psi$$

und 10) $\partial f(x) \cdot \frac{\partial}{z}x = \frac{\partial}{z}\varphi + i \cdot \frac{\partial}{z}\psi$;

d. h. wenn man statt $\frac{\partial}{y}x$ und $\frac{\partial}{z}x$ ihre Werthe aus (9. und 10.) substituirt, und letztere Gleichung mit $-i$ multiplizirt:

$$11)\ \partial f(x) = \frac{\partial}{y}\varphi + i \cdot \frac{\partial}{y}\psi,$$

$$12)\ \partial f(x) = \frac{\partial}{z}\psi - i \cdot \frac{\partial}{z}\varphi,$$

also auch

$$\frac{\partial}{y}\varphi + i \cdot \frac{\partial}{y}\psi = \frac{\partial}{z}\psi - i \cdot \frac{\partial}{z}\varphi,$$

oder 13) $\left(\frac{\partial}{y}\varphi - \frac{\partial}{z}\psi\right) + i \cdot \left(\frac{\partial}{y}\psi + \frac{\partial}{z}\varphi\right) = 0.$

In so ferne aber φ, ψ, und auch $\frac{\partial}{y}\varphi$, $\frac{\partial}{y}\psi$, $\frac{\partial}{z}\varphi$, $\frac{\partial}{z}\psi$ lauter reele Funktionen von y und z sind, und selbst blos reele Werthe haben sollen, so muß auch noch nach (§. 326.):

$$14)\ \frac{\partial}{y}\varphi - \frac{\partial}{z}\psi = 0 \qquad \text{und} \qquad 15)\ \frac{\partial}{y}\psi + \frac{\partial}{z}\varphi = 0$$

seyn.

Nun betrachte man die Summe der Quadrate $\varphi^2 + \psi^2$, welche ebenfalls eine ganze Funktion von y und z seyn wird, und durch F(y,z) oder F bezeichnet seyn mag, so daß man hat

$$16)\ F = \varphi^2 + \psi^2,$$

und suche nach (§. 480.) alle Werthe von y und z, welche F zu einem Kleinsten machen. — Man muß zu dem Ende nehmen

---

*) Es ist hier, der größern Deutlichkeit wegen, $\frac{\partial}{y}x$ statt ∂x_y, und dann auch $\frac{\partial}{y}\varphi$ statt $\partial\varphi_y$, $\frac{\partial^2}{yz}F$ statt $\partial^{1,1}F_{y,z}$, $\frac{\partial^2}{z^2}\varphi$ statt $\partial^2\varphi_z$, u. s. w. f. geschrieben worden, namentlich der erstern, öfter wiederkehrenden Gleichungen halber.

17) $\frac{\partial}{y}F = 0$ und 18) $\frac{\partial}{z}F = 0$,

und aus diesen beyden Gleichungen diejenigen Werthe von y und z herausnehmen, für welche $\frac{\partial^2}{x^2}F$ und $\frac{\partial^2}{y^2}F$ positiv, so wie

$$\frac{\partial^2}{y^2}F \cdot \frac{\partial^2}{z^2}F > \left(\frac{\partial^2}{yz}F\right)^2$$ wird.

Nun ist aber aus (16.) nach (§§. 444. und (§. 442. II.)

19) $\frac{\partial}{y}F = 2\left[\varphi \cdot \frac{\partial}{y}\varphi + \psi \cdot \frac{\partial}{y}\psi\right]$,

20) $\frac{\partial}{z}F = 2\left[\varphi \cdot \frac{\partial}{z}\varphi + \psi \cdot \frac{\partial}{z}\psi\right]$;

und wenn man hier noch einmal links und rechts die Ableitungen nimmt, und noch (§. 442. III.) benutzt:

21) $\frac{\partial^2}{y^2}F = 2\left[\varphi \cdot \frac{\partial^2}{y^2}\varphi + \psi \cdot \frac{\partial^2}{y^2}\psi + \left(\frac{\partial}{y}\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial}{y}\psi\right)^2\right]$,

22) $\frac{\partial^2}{z^2}F = 2\left[\varphi \cdot \frac{\partial^2}{z^2}\varphi + \psi \cdot \frac{\partial^2}{z^2}\psi + \left(\frac{\partial}{z}\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial}{z}\psi\right)^2\right]$,

23) $\frac{\partial^2}{yz}F = 2\left[\varphi \cdot \frac{\partial^2}{yz}\varphi + \psi \cdot \frac{\partial^2}{yz}\psi + \frac{\partial}{y}\varphi \cdot \frac{\partial}{z}\varphi + \frac{\partial}{y}\psi \cdot \frac{\partial}{z}\psi\right]$.

Die beyden Gleichungen (17.) und (18.) zur Bestimmung von y und z, sind daher:

24) $\varphi \cdot \frac{\partial}{y}\varphi + \psi \cdot \frac{\partial}{y}\psi = 0$,

25) $\varphi \cdot \frac{\partial}{z}\varphi + \psi \cdot \frac{\partial}{z}\psi = 0$,

oder, wenn man hier den (14. und 15.) zu Folge, $\frac{\partial}{y}\varphi$ statt $\frac{\partial}{z}\psi$ und $-\frac{\partial}{y}\psi$ statt $\frac{\partial}{z}\varphi$ schreibt,

26) $\varphi \cdot \frac{\partial}{y}\varphi + \psi \cdot \frac{\partial}{y}\psi = 0$,

27) $-\varphi \cdot \frac{\partial}{y}\psi + \psi \cdot \frac{\partial}{y}\varphi = 0$.

Und multiplizirt man hier die (26.) mit $\frac{\partial}{y}\psi$ und die (27.) mit $\frac{\partial}{y}\varphi$, so erhält man, addirend:

28) $\psi\cdot\left[\left(\frac{\partial}{y}\psi\right)^2+\left(\frac{\partial}{y}\varphi\right)^2\right]=0;$

und, auf ähnliche Weise die obere (26.) mit $\frac{\partial}{y}\varphi$, die untere (27.) dagegen mit $\frac{\partial}{y}\psi$ multiplizirend und addirend:

29) $\varphi\cdot\left[\left(\frac{\partial}{y}\psi\right)^2+\left(\frac{\partial}{y}\varphi\right)^2\right]=0.$

Diese Gleichungen geben aber:

30) $\psi=0$ und 31) $\varphi=0$,

wenn nicht

32) $\left(\frac{\partial}{y}\psi\right)^2+\left(\frac{\partial}{y}\varphi\right)^2=0$ ist.

Setzen wir letzteren Ausnahmsfall vorläufig bey Seite, so sind die Werthe von y und z, welche F d. h. $\varphi^2+\psi^2$ zu einem Kleinsten machen, solche, welche $\varphi=0$ und $\psi=0$ machen. Da nun F eine reele Funktion von y und z ist, die für alle reelen Werthe von y und z, selbst immer reel wird, so gibt es nothwendig unter allen reelen Werthen von y und z, auch solche, für welche F den kleinsten Werth hat, also auch solche, welche $\varphi=0$ und $\psi=0$ d. h. $f(x)=0$ machen, wenn $y+z\cdot i$ statt x gesetzt wird. — Welches zu erweisen war.

Um aber den Beweis völlig genügend zu machen, so muß noch gezeigt werden, daß für die Werthe von y und z, welche in obiger (Nr. 32.) enthalten sind, d. h. welche

32) $\left(\frac{\partial}{y}\varphi\right)^2+\left(\frac{\partial}{y}\psi\right)^2=0,$

also auch nach (§. 321. II.):

33) $\frac{\partial}{y}\varphi=0$ und 34) $\frac{\partial}{y}\psi=0,$

mithin auch

34) $\partial f(x)=0$

machen, für $x=y+z\cdot i$, die Funktion F oder $\varphi^2+\psi^2$, nie einen kleinsten Werth hat, es müßten denn dieselben Werthe von y und z auch wiederum $\varphi=0$ und $\psi=0$ machen. Zu dem Ende muß man nach (§. 480. Nr. 2.) zu den zweyten Ableitungen von F vorwärts gehen. Nimmt man aber die Ableitungen der Ausdrücke zur Linken

und zur Rechten in den Gleichungen (11. und 12.) nach y und nach z, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} 35)\ \partial^2 f(x)\cdot\frac{\partial}{y}x &= \frac{\partial^2}{y^2}\varphi + i\cdot\frac{\partial^2}{y^2}\psi \\ 36)\ \partial^2 f(x)\cdot\frac{\partial}{z}x &= \frac{\partial^2}{yz}\varphi + i\cdot\frac{\partial^2}{yz}\psi \end{aligned}\right\} \text{ aus (11.)}$$

$$\left.\begin{aligned} 37)\ \partial^2 f(x)\cdot\frac{\partial}{y}x &= \frac{\partial^2}{yz}\psi - i\cdot\frac{\partial^2}{yz}\varphi \\ 38)\ \partial^2 f(x)\cdot\frac{\partial}{z}x &= \frac{\partial^2}{z^2}\psi - i\cdot\frac{\partial^2}{z^2}\varphi \end{aligned}\right\} \text{ aus (12.).}$$

Und weil die Ausdrücke rechts in (35.) und (37.), desgleichen die in (36.) und (38.) einander gleich seyn müssen, so folgt nach (§. 325.), in so ferne hier wieder blos reele Werthe vorkommen:

$$39)\ \frac{\partial^2}{yz}\varphi = \frac{\partial^2}{z^2}\psi = -\frac{\partial^2}{y^2}\psi,$$

und $$40)\ \frac{\partial^2}{yz}\psi = \frac{\partial^2}{y^2}\varphi = -\frac{\partial^2}{z^2}\varphi;$$

und die Gleichungen (21. — 23.) reduziren sich, für die Werthe von y und z, welche $\frac{\partial}{y}\varphi$, $\frac{\partial}{z}\varphi$, $\frac{\partial}{y}\psi$, $\frac{\partial}{z}\psi$, d. h. $\partial f(x)$ zu Null machen, auf

$$41)\ \frac{\partial^2}{y^2}F = 2\left(\varphi\cdot\frac{\partial^2}{y^2}\varphi + \psi\cdot\frac{\partial^2}{y^2}\psi\right),$$

$$42)\ \frac{\partial^2}{z^2}F = -2\left(\varphi\cdot\frac{\partial^2}{y^2}\varphi + \psi\cdot\frac{\partial^2}{y^2}\psi\right),$$

$$43)\ \frac{\partial^2}{yz}F = 2\left(\psi\cdot\frac{\partial^2}{y^2}\varphi - \psi\cdot\frac{\partial^2}{y^2}\psi\right),$$

wo sich denn $\frac{\partial^2}{z^2}F\cdot\frac{\partial^2}{y^2}F - \left(\frac{\partial^2}{zy}F\right)^2$ als ein nothwendig negativer Ausdruck findet, nämlich als die negativ genommene Summe zweyer Quadrate, wenn nicht dieselben Werthe von y und z zu gleicher Zeit auch $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ machen. Also hat nach (§. 480.), eben weil jetzt nicht $\frac{\partial^2}{z^2}F\cdot\frac{\partial^2}{y^2}F > \left(\frac{\partial^2}{zy}F\right)^2$ ist, die Funktion F, d. h. $\varphi^2 + \psi^2$ nicht den kleinsten Werth, wenn y und z solche Werthe bedeuten, welche $\frac{\partial}{y}\varphi$ und $\frac{\partial}{z}\varphi$, nicht aber zu gleicher Zeit φ und ψ selbst, zu Null machen. Demnach sind die reelen Werthe von y und z, für welche F, d. h. $\varphi^2 + \psi^2$ den kleinsten Werth bekommt, und die allemal

existiren, nothwendig solche, welche $\varphi = 0$ und $\psi = 0$, (und natürlich dann auch $F = 0$) machen: so also, daß allemal ein Ausdruck $y+z\cdot i$, wo y und z reel sind, existirt, welcher $\varphi+i\cdot\psi$, d. h. $f(x)$ zu Null macht, wenn er statt x gesetzt wird.

§. 482. Zusatz.

Daraus folgt aber, daß jede solche ganze Funktion vom mten Grade, mit allgemein-numerischen Koeffizienten (die beliebig reel oder imaginär seyn können), allemal in ein Produkt von m Faktoren zerlegt werden könne, von denen jeder die Form $x-(P+Qi)$ hat, wo P und Q reel sind.

Denn es gibt nach dem vorhergehenden (§.), allemal einen Werth $p+qi$, welcher statt x gesetzt, $f(x) = 0$ macht, und dann ist nach (§. 433.) $f(x)$ durch $x-(p+qi)$ theilbar, und dabey der Quotient $f_1(x)$ eine ganze Funktion vom m—1ten Grade, nothwendig wieder mit allgemein-numerischen Koeffizienten, d. h. mit solchen von der Form $P+Q\cdot i$, während

$$f(x) = [x-(p+qi)]\cdot f_1(x) \quad \text{ist.}$$

Nun gibt es aber wieder einen Werth $p_1+q_1\cdot i$, welcher statt x gesetzt, $f_1(x) = 0$ macht, so daß $f_1(x) = [x-(p_1+q_1\cdot i)]\cdot f_2(x)$, also $f(x) = [x-(p+qi)][x-(p_1+q_1\cdot i)]\cdot f_2(x)$ wird, wo $f_2(x)$ eine ganze Funktion vom m—2ten Grade ist, mit allgemein-numerischen Koeffizienten.

Und so fortfahrend überzeugt man sich bald, daß $f(x)$ in ein Produkt zerlegt werden kann von m Faktoren, wo jeder die Form $x-(P+Qi)$ hat.

§. 483. Zusatz.

Daher hat jede höhere Gleichung $f(x) = 0$, vom mten Grade mit allgemein-numerischen Koeffizienten, im Allgemeinen m verschiedene allgemein-numerische Werthe (von der Form $P+Qi$), welche statt x gesetzt, sie identisch machen, weil $f(x)$ als ein Produkt von m solchen Faktoren von der Form $x-(P+Q\cdot i)$, nothwendig 0 wird, so oft einer der m Faktoren zu Null wird, also m mal.

§. 484. Zusatz.

Weil wir aber bereits (§. 425.) gesehen haben, daß eine ganze Funktion f(x) nie durch mehr als m verschiedene Werthe von x, $= 0$ werden kann, so folgt:

1) daß jede höhere Gleichung vom mten Grade, mit allgemein-numerischen Koeffizienten, für den Unbekannten x nie mehr als m Werthe liefern kann, und im Allgemeinen gerade m Werthe liefern wird, die jedoch im Besondern zum Theil oder alle einander gleich werden können, während sie alle nothwendig allgemein-numerische Zahlen, d. h. Ausdrücke von der Form $P+Qi$ sind, wo P und Q reel seyn müssen, so daß auch $Q = 0$ seyn kann;

2) daß jede allgemein-numerische ganze Funktion f(x) vom mten Grade aus m bestimmten Faktoren von der Form $x-(P+Qi)$ besteht, so daß sie nicht noch in ein anderes Produkt von m solchen Faktoren verwandelt werden kann, in welchem auch nur ein einziger Faktor von einem der obigen verschieden wäre.

Denn gienge dies, so würde f(x) für mehr als m Werthe von x der Null gleich, weil sie auch für denjenigen Werth von x noch $= 0$ werden würde, der diesen neuen verschiedenen Faktor zu Null macht.

§. 485. Lehrsatz.

Es ist immer möglich, die Begriffe der besonderen Zahlzeichen dergestalt zu erweitern, daß jeder höheren Gleichung vom mten Grade, mit allgemeinen Koeffizienten,

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \cdots + Sx^2 + Tx + U = 0$$

durch m verschiedene Werthe von x genügt werden kann, wenn auch solche in besonderen Fällen zum Theil oder alle einander gleich werden, daher in eine geringere Zahl derselben zusammenfallen können.

Beweis. Denn da dieselbe Gleichung, wenn die Koeffizienten allgemein-numerisch sind, m allgemein-numerische Werthe für x liefert

(d. h. solche von der Form $p+q\cdot i$), die von den Koeffizienten nothwendig abhängen, also aus den Koeffizienten zusammensetzbar seyn müssen, so darf man nur diese Zusammensetzungen allgemein auffassen, um allgemein m (Form-) Ausdrücke zu haben, welche der gegebenen Gleichung genügen, wenn sie statt x gesetzt werden, und welche der Erscheinung im Besondern, nie widersprechen können, weil sie mit den allgemein-numerischen Zahlen, d. h. mit solchen von der Form $p+qi$ nicht im Widerspruch stehen, diese aber die allgemeinsten der speziellen Zahlenformen sind, zu denen die bisherigen Begriffe uns geführt haben.

§. 486. Zusatz.

In jeder allgemeinen höheren Gleichung vom mten Grade, wird also der Unbekannte x als ein Ausdruck angesehen, welcher aus den Koeffizienten der Gleichung zusammengesetzt ist, m deutig seyn muß, und eben deshalb, wenn man weiter mit ihm rechnet, mit derselben Vorsicht zu behandeln ist, wie solches bereits (§§. 293. 270. 238.) für die mehrdeutigen Ausdrücke überhaupt angegeben und empfohlen worden ist.

§. 487. Zusätze.

1) Demnach ist auch jede ganze Funktion $f(x)$ vom mten Grade, mit allgemeinen Koeffizienten, allemal in ein Produkt von m einfachen Faktoren von der Form $x-\alpha$ zerlegbar; und namentlich ist

$$A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots+A_m\cdot x^m$$
$$= A_m\cdot(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_m)\ *),$$

wenn $x_1, x_2, x_3, \cdots x_m$ die m Werthe von x sind, welche die

---

*) Es ist nämlich

$$A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+\cdots+A_m\cdot x^m$$
$$= A_m\left(x^m+\frac{A_{m-1}}{A_m}\cdot x^{m-1}+\frac{A_{m-2}}{A_m}\cdot x^{m-2}+\cdots+\frac{A_1}{A_m}\cdot x+\frac{A_0}{A_m}\right);$$

und letzterer Faktor ist nach (§. 482.):

$$= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_m).$$

ganze Funktion $f(x)$ oder $A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+\cdots+A_m\cdot x^m$ zu Null machen.

2) Eben so ist, unter denselben Voraussetzungen, dieselbe ganze Funktion

$$f(x) \text{ oder } A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+\cdots+A_m\cdot x^m$$

$$=A_0\cdot\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right)\left(1-\frac{x}{x_3}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{x_m}\right);$$

wie sogleich hervorgeht, wenn man in der vorhergehenden Gleichung zur Rechten, den ersten Faktor A_m mit $\frac{A_0}{A_m}$ multiplizirt, dagegen das Produkt der übrigen m Faktoren, durch

$$(-1)^m\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdots x_m \text{ (welches } =\frac{A_0}{A_m} \text{ ist)},$$ dividirt.

3) Und dabey ist:

$$\overset{1}{C}=-\frac{A_{m-1}}{A_m};\quad \overset{2}{C}=+\frac{A_{m-2}}{A_m};\quad \overset{3}{C}=-\frac{A_{m-3}}{A_m};$$

$$\overset{4}{C}=+\frac{A_{m-4}}{A_m};\ \cdots\cdots\cdots;\ \overset{m-2}{C}=(-1)^{m-2}\frac{A_2}{A_m};$$

$$\overset{m-1}{C}=(-1)^{m-1}\frac{A_1}{A_m};\quad \overset{m}{C}=(-1)^m\frac{A_0}{A_m};$$

unter $\overset{1}{C}, \overset{2}{C}, \overset{3}{C}, \cdots \overset{m-1}{C}, \overset{m}{C}$, die Kombinations-Klassen verstanden, aus den m Elementen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_m$, ohne Wiederholungen entwickelt, die Verbindungen als Produkte angesehen, die alle zu einander addirt werden müssen; und wo die Potenzen von -1 nur zur Bestimmung der jedesmaligen (+)- oder (—)-Zeichen gebraucht worden sind (§§. 413.—415.).

4) Jede Prim-Funktion ist daher nothwendig vom ersten Grade.

5) Jede ganze Funktion vom mten Grade mit allgemeinen oder allgemein-numerischen Koeffizienten, besteht daher aus denselben m bestimmten Faktoren vom ersten Grade (§. 484.).

§. 488. Erklärung.

Die m Werthe von x, welcher einer höhern Gleichung vom mten Grade

1) $A_m \cdot x^m + A_{m-1} \cdot x^{m-1} + A_{m-2} \cdot x^{m-2} + \cdots + A_1 \cdot x + A_0 = 0$

genügen, heißen die Wurzelwerthe der höhern Gleichung. — Dabey heißt α ein nfacher Wurzelwerth, wenn n der m Wurzelwerthe einander gleich und $= \alpha$ geworden sind. — Ein einfacher Wurzelwerth ist also derjenige, welchem keiner der m—1 übrigen Wurzelwerthe gleich ist.

§. 489. Zusatz.

1) Dividirt man die höhere Gleichung vom mten Grade, nämlich:

$$A_m \cdot x^m + A_{m-1} \cdot x^{m-1} + A_{m-2} \cdot x^{m-2} + \cdots + A_1 \cdot x + A_0 = 0,$$

durch A_m weg, damit sie blos mit x^m anfange, so sind die dann entstehenden Koeffizienten von x, die verschiedenen Kombinations-Klassen aus den m Wurzelwerthen $x_1, x_2, x_3, \cdots x_m$ dieser Gleichung genommen, ohne Wiederholungen, und als addirte Produkte angesehen, diese Klassen abwechselnd mit dem (—)- und (+)-Zeichen versehen. — Namentlich ist $-\frac{A_{m-1}}{A_m}$ die Summe aller m Wurzelwerthe, und $(-1)^m \frac{A_0}{A_m}$ das Produkt derselben.

2) Ist daher der Koeffizient von x^{m-1}, nämlich A_{m-1}, $= 0$, so ist die Summe aller m Wurzelwerthe $= 0$.

3) Ist dagegen der letzte Koeffizient, nämlich $A_0 = 0$, so ist das Produkt aller m Wurzelwerthe, und daher auch wenigstens einer dieser Wurzelwerthe $= 0$.

4) Sind die letzten n Koeffizienten, nämlich A_0, A_1, A_2, A_{n-1}, der Null gleich, so sind n Wurzelwerthe selbst der Null gleich, weil die ganze Funktion dann durch x^n, d. h. durch $(x-0)^n$ theilbar ist.

Anmerkung. In der Folge werden wir immer die höheren Gleichungen vom mten Grade, blos mit x^m anfangend voraussetzen, weil, wenn sie mit $A_m \cdot x^m$ anfiengen, solche sogleich durch A_m wegdividirt, und auf den bequemern Fall zurückgebracht werden können.

§. 490. Zusatz.

Sind $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ die m Wurzelwerthe einer höhern Gleichung:

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m = 0,$$

so findet nun offenbar sogleich der (§. 472. und §. 473.) entwickelte Newton'sche Lehrsatz, so wie auch das (§. 474.) dort weiter darauf gegründete statt; namentlich:

Jede aus den m Wurzelwerthen einer höhern Gleichung vom mten Grade gebildete symmetrische ganze Funktion, läßt sich allemal in die Koeffizienten der höhern Gleichung rational, d. h. ohne Wurzelzeichen ausdrücken, so daß sie immer nur eindeutig ist.

§. 491. Zusatz.

Eine höhere Gleichung vom mten Grade $F(x) = 0$, hat einen nfachen Wurzelwerth a, wenn $F(x)$, $\partial F(x)$, $\partial^2 F(x)$, $\cdots \partial^{n-1} F(x)$, zu gleicher Zeit Null sind, während $\partial^n F(x)$ nicht Null wird, für $x = a$.

Beweis. Nach der Bedingung hat nämlich $\partial^{n-1} F(x)$ die Form $(x-a) \cdot \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nicht Null wird für $x = a$; folglich hat dann $F(x)$ die Form $(x-a)^n \cdot \psi(x)$, wo $\psi(x)$ nicht Null wird, für $x = a$ (§. 449.).

Beyspiel. Ist also $F(x)$ und $\partial F(x)$, aber nicht $\partial^2 F(x)$ der Null gleich, für $x = a$, so hat $F(x) = 0$ den doppelten Wurzelwerth a.

§. 492. Zusatz.

Hat eine höhere Gleichung $F(x) = 0$ den nfachen Wurzelwerth a, so sind $F(x)$, $\partial F(x)$, $\partial^2 F(x)$, $\cdots \partial^{n-1} F(x)$,

nothwendig der Null gleich, für $x = a$, während $\partial^n F(x)$ nicht mehr der Null gleich seyn kann, für $x = a$.

Hat also eine höhere Gleichung $F(x) = 0$ den doppelten Wurzelwerth a, so ist nothwendig $F(x) = 0$ und $\partial F(x) = 0$, aber nicht zugleich $\partial^2 F(x) = 0$, für $x = a$.

§. 493. Zusatz.

Haben $F(x)$ und $\partial F(x)$ den größten gemeinschaftlichen Theiler $\mathfrak{T}$, und ist dieser letztere von der Form:

$$[(x-\alpha)(x-\beta)\cdots]\cdot[x-a)(x-a_1)\cdots]^n\cdot[(x-b)(x-b_1)\cdots]^p\cdots,$$

so daß die Gleichung $\mathfrak{T} = 0$, die einfachen Wurzelwerthe α, β, ꝛc. ꝛc., die nfachen Wurzelwerthe a, a_1, ꝛc. ꝛc., die pfachen Wurzelwerthe b, b_1, ꝛc. ꝛc., u. s. w. f. hat, so hat die Gleichung $F(x) = 0$, die doppelten Wurzelwerthe α, β, ꝛc. ꝛc., die $n+1$fachen Wurzelwerthe a, a_1, ꝛc. ꝛc., die $p+1$fachen Wurzelwerthe b, b_1, ꝛc. ꝛc.; wie solches unmittelbar aus (§. 449.) hervorgeht.

Und das (§. 450.) beschriebene Verfahren liefert dabey alle die Gleichungen, welche beziehlich alle diejenigen Wurzelwerthe als einfache enthalten, die in $F(x)$ als doppelte, dreyfache vierfache ꝛc. ꝛc. $n+1$fache, $p+1$fache, ꝛc. ꝛc., vorkommen; welches für die Auffindung der Wurzelwerthe von $F(x) = 0$, wenn unter ihnen mehrfache, d. h. gleiche vorkommen, zuweilen von großer Wichtigkeit wird.

§. 494. Zusatz.

Haben aber $F(x)$ und $\partial F(x)$ gar keinen gemeinschaftlichen Theiler, so hat die höhere Gleichung

$$F(x) = 0$$

lauter einfache (d. h. lauter ungleiche) Wurzelwerthe.

§. 495. Lehrsatz.

Sind die Koeffizienten einer höhern Gleichung vom mten Grade:

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Sx^2 + Tx + U = 0,$$

alle Null oder positive oder negative ganze Zahlen, so gibt es weder eine positive, noch eine negative rationale gebrochene Zahl $\frac{a}{b}$, welche ein Wurzelwerth dieser Gleichung seyn könnte.

Beweis. Denn wäre wirklich $\pm\frac{a}{b}$ ein Wurzelwerth der gegebenen Gleichung, und dabey $\frac{a}{b}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt, so hätte man:

$$\pm\frac{a^m}{b^m} \pm A\frac{a^{m-1}}{b^{m-1}} \pm B\frac{a^{m-2}}{b^{m-2}} \pm \cdots \pm S\frac{a^2}{b^2} \pm T\frac{a}{b} \pm U = 0,$$

oder

$$\frac{\pm a^m \pm Aa^{m-1}b \pm Ba^{m-2}b^2 \pm \cdots \pm Sa^2b^{m-2} \pm Tab^{m-1}}{b^m} \pm U = 0,$$

folglich müßte die allgebraische Summe:

$$\pm a^m \pm Aa^{m-1}b \pm Ba^{m-2}b^2 \pm \cdots \pm Sa^2b^{m-2} \pm Tab^{m-1}$$

durch b^m, also auch durch b, theilbar seyn. Dann müßte aber auch das Glied a^m durch b theilbar seyn, was gegen die Voraussetzung ist, daß nämlich $\frac{a}{b}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt seyn soll.

§. 496. Zusatz.

Hat daher eine solche Gleichung, deren Koeffizienten alle Null oder positive oder negative ganze Zahlen sind, reele Wurzelwerthe, so sind solche entweder ganze Zahlen oder irrationale Zahlen.

§. 497. Erklärung.

Hat eine fallend geordnete ganze Funktion von x, außer den Null-Koeffizienten, deren Glieder fehlen und nicht beachtet werden sollen, lauter positive oder negative (übrigens ganze oder gebrochene), so folgt auf einen $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\\text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Koeffizienten entweder ein mit demselben (+)- oder (—)-Zeichen versehener, und dann sagt man: diese beyden Zeichen bilden eine Folge der

Zeichen; oder es folgt auf einen { negativen / positiven } Koeffizienten einer mit entgegengesetztem (+)= oder (—)=Zeichen, und dann sagt man: sie bilden eine Abwechslung der Zeichen.

So z. B. hat die ganze Funktion

$$x^6-4x^4+x^2+7x-4$$

3 Abwechslungen und 1 Folge der Zeichen.

Anmerkung. Dieselbe Erklärung läßt sich sofort für höhere Gleichungen ausgedehnt ansehen.

§. 498. Zusatz.

Hat eine ganze Funktion vom mten Grade a Abwechslungen und b Folgen der Zeichen, so hat sie a+b+1 wirkliche Glieder, daher nothwendig m—a—b Koeffizienten, welche Null und deren zugehörigen Glieder demnach weggelassen worden sind.

§. 499. Zusatz.

Ist F(x) eine beliebige ganze Funktion von x, und versteht man unter F(—x) das, was aus F(x) wird, wenn durchaus (—x) statt x gesetzt wird, so haben F(—x) und F(x), wenn sie beyde fallend geordnet sind, zwischen zwey nächst auf einander folgenden, z. B. mit x^a und x^b affizirten Gliedern zu gleicher Zeit eine Abwechslung der Zeichen, so oft die Zahl der dazwischen fehlenden Glieder eine ungerade (so oft also a—b eine gerade Zahl) ist; dagegen hat F(—x) allemal zwischen zwey solchen zunächst auf einander folgenden Gliedern eine Abwechslung, wo F(x) eine Folge, und eine Folge, wo F(x) eine Abwechslung der Zeichen hat, so oft die Zahl der dazwischen fehlenden Glieder Null oder eine gerade (also die Differenz a—b der Exponenten eine ungerade Zahl) ist.

Denn ist die Zahl der z. B. zwischen

$$A \cdot x^a \quad \text{und} \quad B \cdot x^b$$

fehlenden Glieder ungerade, also $= 2\nu+1$, so ist $a-b = 2\nu+2$,

eine ungerade Zahl, folglich a und b beyde zugleich gerade Zahlen, oder beyde zugleich ungerade Zahlen; und deshalb gehen, wenn $(-x)$ statt x gesetzt wird, entweder beyder Glieder Zeichen in die entgegengesetzten über, oder sie bleiben alle beyde dieselben; und in jedem Falle bilden sie in $F(-x)$ entweder wieder eine Folge, oder wieder eine Abwechslung, je nachdem sie vorher in $F(x)$ ebenfalls eine Folge oder eine Abwechslung gebildet haben.

Ist dagegen die Zahl der dazwischen fehlenden Glieder gerade und $= 2\nu$, so ist $a-b = 2\nu+1$ eine ungerade Zahl, also der eine der Exponenten a und b, eine gerade Zahl (dessen Glied also sein $(+)$- oder $(-)$-Zeichen nicht ändert, wenn $-x$ statt x gesetzt wird), der andere dagegen eine ungerade Zahl (dessen Glied sein Zeichen also nothwendig ändert, wenn $-x$ statt x gesetzt werden sollte). Sobald aber ein Glied sein Zeichen behält, das andere dagegen es ändert, so geht die Abwechslung in eine Folge und die Folge in eine Abwechslung der Zeichen über.

Beyspiel. Ist

$$F(x) = x^{12}+7x^{11}-3x^{10}+4x^{8}+9x^{5}+2x^{3}-7,$$

so ist

$$F(-x) = x^{12}-7x^{11}-3x^{10}+4x^{8}-9x^{5}-2x^{3}-7,$$

und die Behauptungen zeigen sich auch durch den Erfolg bestätigt.

§. 500. Zusatz.

Ist aber $F(x) = 0$ eine höhere Gleichung, welche positive, negative, auch imaginäre Wurzelwerthe haben kann, so ist auch $F(-x) = 0$ eine höhere Gleichung von demselben Grade, welcher allemal durch $x = -\alpha$ genügt wird, so oft die erstere $F(x) = 0$, durch $x = +\alpha$ identisch werden sollte. Die Gleichung $F(-x) = 0$ hat also genau so viele positive Wurzelwerthe, als der $F(x) = 0$ negative zukommen; und umgekehrt.

§. 501. Lehrsatz.

Ist $F(x)$ eine fallend geordnete ganze Funktionen von x mit oder ohne fehlende Glieder, sonst aber mit lauter positiven oder negativen Koeffizienten, so daß sie durch

$$F(x) = x^{m}+\cdots+\cdot-A_a\cdot x^{m-a}-\cdots\cdot-\cdot+A_b\cdot x^{m-b}+\cdots\cdot$$
$$+\cdot-A_c\cdot x^{m-c}-\cdots\cdot$$

ausgedrückt werden kann, wo immer nur die Glieder wirklich ausgeschrieben gedacht sind, in welchen ein Zeichenwechsel statt findet; — so ist $(x-\alpha)\cdot F(x)$ ebenfalls eine ganze Funktion, welche wiederum fallend geordnet, durch F_1 bezeichnet seyn mag; und ist α eine absolute (positive) Zahl, so hat $F_1(x)$ wenigstens eine Abwechslung der Zeichen mehr, als $F(x)$ deren hat.

Beweis. Multiplizirt man $F(x)$ zuerst mit x, hernach mit $-\alpha$, so bilden sich zwey Linien, nämlich:

$$x^{m+1}+\ldots\ldots-A_a\cdot x^{m-a+1}-\ldots\ldots+A_b\cdot x^{m-b+1}+\ldots\ldots-A_c\cdot x^{m-c+1}-\ldots\ldots$$

und $$-\alpha\cdot x^m-\ldots\ldots+\alpha A_a\cdot x^{m-a}+\ldots\ldots-\alpha A_b\cdot x^{m-b}-\ldots\ldots+\alpha A_c\cdot x^{m-c}+\ldots\ldots,$$

in welchen nach der Ordnung genau die entgegengesetzten (+)- oder (—)-Zeichen, also genau dieselben Abwechslungen und dieselben Folgen statt finden. Beyde Linien zusammenaddirt, geben $F_1(x)$. — Die (+)- oder (—)-Zeichen in $F_1(x)$ sind entweder die der obern Linie oder sie werden die der untern. — So lange sie die einen oder die andern sind, hat $F_1(x)$ offenbar dieselben Abwechslungen und Folgen, wie $F(x)$; so oft aber die (+)- oder (—)-Zeichen von der obern Linie zur untern übergehen, so oft ist augenfällig eine Abwechslung mehr in $F_1(x)$ als in $F(x)$; und so oft diese Zeichen von der untern Linie zur obern Linie übergehen, so oft kann in $F_1(x)$ eine Folge mehr (also eine Abwechslung weniger), als in $F(x)$ entstehen. Da nun das erste Glied von $F_1(x)$ sich in der obern, das letzte Glied dagegen in der untern Linie sich befindet, so gehen die Zeichen einmal mehr von der obern zur untern Linie, als von der untern zur obern über; also ist in $F_1(x)$ nothwendig eine Abwechslung wenigstens mehr, als in $F(x)$.

Beyspiel. Multiplizirt man z. B. die ganze Funktion

$$F(x) = x^4+7x^2-4x-8$$

mit $x-1$, so erhält man:

$$F_1(x) = x^5-x^4+7x^3-11x^2-4x+8;$$

und wenn man sieht, wie $F(x)$ zwey Folgen und eine Abwechslung hat, während $F_1(x)$ 4 Abwechslungen und nur eine einzige Folge zur Schau trägt.

§. 502. Zusatz.

Eine höhere Gleichung $F(x) = 0$ hat daher wenigstens eben so viele Abwechslungen der Zeichen, als positive Wurzelwerthe $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$; und nie mehr positive Wurzelwerthe (wohl aber kann sie weniger positive Wurzelwerthe haben), als Abwechslungen der Zeichen in $F(x)$ vorkommen.

Denn es ist:

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)\cdot f(x),$$

wo $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ absolute (positive) Zahlen sind; also hat $F(x)$ gegen $f(x)$ wenigstens so viele Abwechslungen der Zeichen mehr, als solche positive Wurzelwerthe, der Gleichung $F(x) = 0$ zukommen.

§. 503. Lehrsatz.

Ist wiederum $F(x) = 0$ eine höhere Gleichung vom mten Grade, mit oder ohne Null-Koeffizienten, während die mit Null-Koeffizienten versehenen Glieder weggelassen seyn, die übrigen aber positive oder negative Koeffizienten haben sollen; ist ferner μ die Anzahl der Wechsel, ν dagegen die Anzahl der Folgen der Zeichen, zwischen denen eine gerade Anzahl von Gliedern fehlt oder gar keines, und μ_1 die Zahl der Wechsel, so wie ν_1 die Zahl der Folgen der Zeichen, zwischen denen eine ungerade Anzahl der Glieder fehlt (so also, daß $\mu+\mu_1$ die Anzahl aller Abwechslungen, und $\nu+\nu_1$ die Anzahl aller Folgen der Zeichen, mithin überhaupt $\mu+\mu_1+\nu+\nu_1+1$ Glieder wirklich vorhanden sind, also

$$m-(\mu+\mu_1+\nu+\nu_1)$$

Glieder überhaupt fehlen (Null-Koeffizienten haben)), so hat diese Gleichung $F(x) = 0$ höchstens $\mu+\mu_1$ positive Wurzelwerthe und höchstens $\nu+\mu_1$ negative Wurzelwerthe, also höchstens

$$\mu+\nu+2\mu_1 \text{ reele Wurzelwerthe, *)}$$

---

*) Die Wurzelwerthe, welche Null sind, denkt man sich hier nach (§. 489.) bereits abgesondert; so daß in der gegebenen Gleichung nur solche reele Wurzelwerthe vorkommen, welche positiv oder negativ sind.

mithin wenigstens

$$m-(\mu+\nu+2\mu_1)$$ imaginäre Wurzelwerthe.

Beyspiel. Nehmen wir die Gleichung:

$$x^{20}+5x^{15}-3x^{12}+4x^{11}+10x^7-4x^5-8x^4-7x^3+8x^2+5=0,$$

so zeigt sie: 1 Folge mit 4 fehlenden Gliedern, dann 1 Abwechslung mit 2 fehlenden Gliedern, hierauf 1 Abwechslung mit keinem fehlenden Gliede, dann 1 Folge mit 3 fehlenden Gliedern, 1 Abwechslung mit 1 fehlenden Gliede, 2 Folgen mit keinem fehlenden Gliede, 1 Abwechslung mit keinem fehlenden Gliede, zuletzt 1 Folge mit 1 fehlenden Gliede; also 3 Abwechslungen und 3 Folgen mit einer geraden Anzahl fehlender Glieder, oder mit gar keinem fehlenden Gliede, ferner 1 Abwechslung und 2 Folgen mit einer ungeraden Anzahl fehlender Glieder; — so ist dasmal $\mu=3$, $\nu=3$, $\mu_1=1$, $\nu_1=2$, also $\mu+\mu_1=4$, $\nu+\mu_1=4$, $\mu+\nu+2\mu_1=8$ und $m-(\mu+\nu+2\mu_1)=12$; und es hat also diese höhere Gleichung vom 20sten Grade höchstens 4 positive, höchstens 4 negative, mithin höchstens 8 reele, also mindestens 12 imaginäre Wurzelwerthe.

Beweis. Denn nach (§. 502.) hat die gegebene Gleichung $F(x)=0$ höchstens $\mu+\mu_1$ positive Wurzelwerthe; und nach (§. 500.) höchstens so viele negative Wurzelwerthe als $F(-x)$ Abwechslungen der Zeichen liefert, während nach (§. 499.) diese letztere Zahl der Abwechslungen $\nu+\mu_1$ ist. Folglich ist der Lehrsatz außer Zweifel.

§. 504. Zusatz.

Ist h die Anzahl aller fehlenden Glieder, so ist

$$m=h+(\mu+\mu_1+\nu+\nu_1),$$

folglich

$$m-(\mu+\nu+2\mu_1)=h+\nu_1-\mu_1;$$

also hat die Gleichung $F(x)=0$ mindestens $h+\nu_1-\mu_1$ imaginäre Wurzelwerthe, wo μ_1 und ν_1 die Anzahl der Abwechslungen und Folgen ist, zwischen denen eine ungerade Anzahl von Gliedern fehlt, oder in welchen die Differenz der Exponenten von x eine gerade Zahl ist.

§. 505. Zusatz.

Fehlt gar kein Glied, so kann die höhere Gleichung lauter reele Wurzelwerthe haben, weil dann $h=\mu_1=\nu_1=0$, und

μ die Anzahl aller Abwechslungen, so wie ν die Anzahl aller Folgen der Zeichen ist. Und es hat dann die höhere Gleichung höchstens μ positive und höchstens ν negative Wurzelwerthe.

§. 506. Lehrsatz.

Hat eine höhere Gleichung $F(x) = 0$, mit reelen Koeffizienten, einen imaginären aber numerischen Wurzelwerth $p \pm qi$, so hat sie auch allemal noch den zweyten $p - qi$, so daß die reele ganze Funktion $F(x)$ sich doch allemal in reele doppelte Faktoren zerlegen läßt; und diejenigen dieser doppelten Faktoren, welche die imaginären einfachen enthalten, sind dabey immer von der Form $x^2 \mp 2px + (p^2 + q^2)$.

Der Beweis erhellet unmittelbar aus (§§. 434. 435.).

Anmerkung. Jede höhere Gleichung mit reelen Koeffizienten hat daher die imaginären Wurzelwerthe jedesmal paarweise.

Zweyte Abtheilung.

Von der Bildung neuer höherer Gleichungen, deren Wurzelwerthe gegebene Zusammensetzungen sind aus den Wurzelwerthen einer andern gegebenen höhern Gleichung.

---

§. 507. Aufgabe.

Eine höhere Gleichung zu bilden, deren jeder Wurzelwerth ein gegebener, beziehlich aus einem jeden x der m Wurzelwerthe der gegebenen höhern Gleichung vom mten Grade,

$$(1.) \quad x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m = 0$$

oder $F(x) = 0$, und andern gegebenen Zahlen, zusammengesetzter, durch $\varphi(x)$ bezeichneter Ausdruck ist.

Auflösung. Man schreibe $\varphi(x) = z$, finde daraus x in z ausgedrückt, etwa $x = \psi(z)$, und setze diesen Werth $\psi(z)$ statt x in die gegebene Gleichung (1.), so bekommt man eine neue Gleichung in z, welche, wenn sie wieder eine algebraische höhere Gleichung wird, nothwendig die verlangte seyn muß, weil sie nur unter der Voraussetzung identisch ist, daß z den Ausdruck $\varphi(x)$, x aber irgend einen der m Wurzelwerthe der Gleichung (1.) vorstellt.

§. 508. Zusatz.

Hierher gehört die Aufgabe, wo eine Gleichung in z gesucht wird, deren Wurzelwerthe alle um a kleiner *) seyn sollen, als die Wurzelwerthe x der gegebenen Gleichung. — Man hat hier $-a+x$ oder $x-a = z$, also $x = a+z$, und nach dem Taylorschen Lehrsatze (§. 440.):

$$F(x) = F(a+z) = F(a)+\partial F(a)\cdot z+\frac{\partial^2 F(a)}{2!}\cdot z^2+\cdots$$

$$+\frac{\partial^{m-1} F(a)}{(m-1)!}\cdot z^{m-1}+\frac{\partial^m F(a)}{m!}\cdot z^m = 0,$$

wo man statt $F(a)$, $\partial F(a)$, $\partial^2 F(a)\cdots\partial^m F(a)$, setzen muß, was aus $F(x)$, $\partial F(x)$, $\partial^2 F(x)\cdots\partial^m F(x)$ wird, wenn man a statt x substituirt. Und da findet sich:

---

*) Sind x_0, x_1, x_2, ꝛc. die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung in x, so sollen x_0-a, x_1-a, x_2-a, ꝛc. ꝛc. die Wurzelwerthe der neuen Gleichung werden. Diese letztern sind gerade nicht immer kleiner, weil a selbst noch positiv, negativ, ja sogar noch imaginär seyn kann, in welchem letztern Fall, oder wenn x etwa imaginär seyn sollte, vom Größern oder Kleinern nicht mehr die Rede ist. Wenn man aber die Redensart, wie sie oben gebraucht ist, in dem hier näher bezeichneten Sinne nimmt, so schadet solches wenigstens nichts, sobald man noch besonders auf den Sinn aufmerksam gemacht wird.

$$F(a) = a^m + A_1 \cdot a^{m-1} + A_2 \cdot a^{m-2} + \cdots + A_{m-1} \cdot a + A_m,$$
$$\partial F(a) = ma^{m-1} + (m-1)A_1 \cdot a^{m-2} + (m-2)A_2 \cdot a^{m-3} + \cdots + A_{m-1},$$
$$\partial^2 F(a) = m^{2|-1} a^{m-2} + (m-1)^{2|-1} A_1 \cdot a^{m-3} + \cdots + A_{m-2},$$
$$\vdots$$
$$\partial^{m-1} F(a) = m^{m-1|-1} \cdot a + (m-1)! A_1,$$
$$\partial^m F(a) = m!,$$

so daß die obige Gleichung in z wird:

$$\text{I.} \begin{cases} z^m + \frac{\partial^{m-1} F(a)}{(m-1)!} z^{m-1} + \frac{\partial^{m-2} F(a)}{(m-2)!} z^{m-2} + \cdots + \frac{\partial^{m-n} F(a)}{(m-n)!} z^{m-n} + \cdots \\ \qquad + \frac{\partial^2 F(a)}{2!} z^2 + \partial F(a) \cdot z + F(a) = 0; \end{cases}$$

oder:

$$\text{I.} \begin{cases} z^m + \left|\begin{matrix} ma \\ +A_1 \end{matrix}\right| z^{m-1} + \left|\begin{matrix} m_2 \cdot a^2 \\ +(m-1)a \cdot A_1 \\ + A_2 \end{matrix}\right| z^{m-2} + \cdots + \left|\begin{matrix} a^m \\ +a^{m-1} \cdot A_1 \\ +a^{m-2} \cdot A_2 \\ +a^{m-3} \cdot A_3 \\ \vdots \\ + A_m \end{matrix}\right| = 0 \end{cases}$$

Mit Aggregaten macht sich die Rechnung, wie immer in solchen Fällen, wunderbar einfach. Die gegebene Gleichung $F(x) = 0$ ist nämlich:

$$S\left[A_a \cdot x^{m-a}\right]_{a+b=m} = 0;$$

weil aber nach (§. 402.):

$$x^{m-a} = (z+a)^{m-a} = S\left[(m-a)_c \cdot z^b \cdot a^c\right]_{b+c=m-a} \quad \text{ist,}$$

so wird, wenn man diesen Werth statt x substituirt, die gesuchte Gleichung in z, folgende, nämlich:

$$S\left[A_a \cdot (m-a)_c \cdot a^c \cdot z^b\right]_{a+b=m,\ b+c=m-a} = 0,$$

in welchem Aggregat die beschränkende Gleichung $a+b = m$, welche verhindern soll, daß a nicht größer als m werde, durch

die andere $b+c = m-a$, oder $a+b+c = m$, bereits überflüssig gemacht ist, so daß sich ergibt:

$$\text{II.}\quad S\Big[\underset{a+c+b=m}{(m-a)_c}\cdot A_a\cdot a^c\cdot z^b\Big] = 0,$$

welches die gesuchte Gleichung in z ist.

Will man z. B. hieraus den Koeffizienten von z^{m-n} haben, so setze man nur $m-n$ statt b, und der fragliche Koeffizient ist:

$$S\Big[\underset{a+c=n}{(m-a)_c}\cdot A_a\cdot a^c\Big];$$

und wenn man hier statt a nach und nach $0, 1, 2, 3, \cdots$ bis n setzt, so gibt dies, sobald man sich erinnert, daß hier oben $A_0 = 1$ vorausgesetzt worden, die Glieder:

$$m_n\cdot a^n + (m-1)_{n-1}\cdot A_1\cdot a^{n-1} + (m-2)_{n-2}\cdot A_2\cdot a^{n-2} + \cdots\cdot$$
$$+ (m-n+1)_1\cdot A_{n-1}\cdot a + (m-n)_0\cdot A_n,$$

welche den Koeffizienten von z^{m-n} bilden, in der gesuchten Gleichung nach z, und wobey noch $(m-n)_0 = 1$ ist.

Beyspiel. Ist gegeben die Gleichung

$$x^3-2x^2-x^1+2 = 0,$$

so ist $m = 3$, $A_1 = -2$, $A_2 = -1$, $A_3 = 2$;
ferner:

$$F(x) = x^3-2x^2-x+2,$$
$$\partial F(x) = 3x^2-4x-1,$$
$$\partial^2 F(x) = 6x-4,$$
$$\partial^3 F(x) = 6,$$
$$\partial^4 F(x) = \partial^5 F(x) = \text{ꝛc. ꝛc.} = 0.$$

Sollen nun die Wurzelwerthe der neuen Gleichung alle um 3 kleiner werden, so ist noch $a = 3$, also

$$F(a) = 8,\quad \partial F(a) = 14,\quad \partial^2 F(a) = 14,\quad \partial^3 F(a) = 6;$$

demnach die gesuchte Gleichung:

$$z^3+7z^2+14z+8 = 0.$$

Die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung in x, waren:

$$+1,\quad -1,\quad \text{und}\quad +2;$$

die der jetzigen Gleichung in z, sind um 3 kleiner, sind daher:

$$-2,\quad -4,\quad \text{und}\quad -1.$$

Sollten die Wurzelwerthe der Gleichung in z alle um 3 größer

werden, als die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung, so dürfte man nur $a = -3$ nehmen, und erhielte jetzt:

$$F(a) = -40, \quad \partial F(a) = 38, \quad \partial^2 F(a) = -22,$$

also die gesuchte Gleichung in z:

$$z^3 - 11z^2 + 38z - 40 = 0,$$

deren Wurzelwerthe alle positiv, nämlich:

$+4$, $+2$ und $+5$ sind.

§. 509. Zusatz.

Ist in (§. 508.) a eine absolute Zahl, so werden die reelen Wurzelwerthe von z wirklich um a kleiner, als die reelen Wurzelwerthe von x. Wäre aber $a = -b$ und b eine absolute Zahl, also a eine negative Zahl, so würden die reelen Wurzelwerthe von z alle um b größer, als die reelen Wurzelwerthe von x *).

Und ist a noch ganz unbestimmt gelassen, so kann man sich dieses unbestimmten a bedienen, um in der neuen Gleichung in z, irgend ein Glied fortzuschaffen, d. h. dessen Koeffizienten $= 0$ zu machen. Indem man nämlich irgend einen dieser Koeffizienten $= 0$ setzt, so hat man eine algebraische (einfache, quadratische, kubische, oder sonst eine höhere) Gleichung mit dem Unbekannten a, findet 1, 2, 3 oder mehr Werthe für a, welche sie identisch machen, und für diesen Werth von a fällt also aus der neuen Gleichung in z, das mit diesem Null-Koeffizienten versehene Glied weg.

Der gewöhnlichste Fall ist der, wo das Glied z^{m-1} weggeschafft wird. Um dies zu bewirken, muß man a so nehmen, daß $A_1 + ma = 0$ oder $a = -\frac{A_1}{m}$ wird, und man erreicht augenblicklich seinen Zweck.

Eine solche Gleichung, deren zweytes Glied fehlt (weggeschafft ist), nennt man eine reduzirte höhere Gleichung.

---

*) Man kann sich daher dieses Verfahrens bedienen, um zu bewirken, daß in der neuen Gleichung in z, jeder reele Wurzelwerth positiv, oder jeder derselben negativ wird.

Und sind $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ die Wurzelwerthe der gegebenen höhern Gleichung in x, so sind die Wurzelwerthe dieser reduzirten höhern Gleichung:

$$x_0+\frac{A}{m},\quad x_1+\frac{A}{m},\quad x_2+\frac{A}{m},\quad \cdots,\quad x_{m-1}+\frac{A}{m},$$

und die Summe dieser letztern Wurzelwerthe ist $= 0$.

Anmerkung. Dieses letztere Geschäft ist früher (§§. 241. 272. 297.) bey Auflösung der quadratischen, kubischen und biquadratischen allgemeinen Gleichungen immer mit Vortheil angewandt worden.

§. 510. Zusatz.

Ein besonderer Fall der allgemeinen Aufgabe (§. 507.) ist es ferner, wenn die Gleichung in z zu Wurzelwerthen haben soll die Ausdrücke

$$ax_0,\ ax_1,\ ax_2,\ ax_3,\ \cdots ax_{m-2},\ ax_{m-1}.$$

Man gelangt aber auch hier sogleich zum Ziel, wenn man $ax = z$ oder $x = \frac{z}{a}$ setzt. — Die Gleichung in z wird dann

$$z^m+A_1\cdot az^{m-1}+A_2\cdot a^2z^{m-2}+\cdots+A_{m-1}\cdot a^{m-1}\cdot z+A_m\cdot a^m=0^*).$$

§. 511. Zusatz.

Setzt man hier $\frac{1}{b}$ statt a, so erhält man

$$z^m+\frac{A_1}{b}\cdot z^{m-1}+\frac{A_2}{b^2}\cdot z^{m-2}+\cdots+\frac{A_{m-1}}{b^{m-1}}\cdot z+\frac{A_m}{b^m}=0,$$

deren Wurzelwerthe folgende sind:

$$\frac{x_0}{b},\quad \frac{x_1}{b},\quad \frac{x_2}{b},\quad \cdots \frac{x_{m-2}}{b},\quad \frac{x_{m-1}}{b}.$$

---

*) Auf diese Weise kann man bewirken, daß die neue Gleichung in z, keine gebrochenen Wurzelwerthe habe.

§. 512. Zusatz.

Abermals ist es ein besonderer Fall des (§. 507.), wenn die Gleichung in z zu Wurzelwerthen haben soll:

$$\frac{1}{x_0},\ \frac{1}{x_1},\ \frac{1}{x_2},\ \cdots\ \frac{1}{x_{m-2}},\ \frac{1}{x_{m-1}}.$$

Sie wird dann, indem $\frac{1}{x} = z$ und $\frac{1}{z}$ statt x gesetzt wird:

$$z^m + \frac{A_{m-1}}{A_m} z^{m-1} + \frac{A_{m-2}}{A_m} z^{m-2} + \cdots + \frac{A_2}{A_m} z^2 + \frac{A_1}{A_m} z + \frac{1}{A_m} = 0 \ *).$$

§. 513. Aufgabe.

Es ist gegeben eine höhere Gleichung vom mten Grade:

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + A_3 \cdot x^{m-3} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m = 0,$$

deren m Wurzelwerthe durch $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$ vorgestellt seyn mögen. Man soll eine Gleichung in z finden, so daß irgend eine rationale Zusammensetzung eines oder mehrer der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$ jedesmal ein Wurzelwerth dieser neuen Gleichung sey, welche der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, man auch an die Stelle der erst gesetzten, substituiren möge.

Auflösung. Man schreibe den gegebenen Ausdruck Φ (z. B. $\alpha + \beta + M\alpha\beta$, wo M beliebig, aber von den Wurzelwerthen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, unabhängig ist), hin; und leite aus ihm alle möglichen verschiedenen Werthe ab, die er durch Vertauschung der Wurzelwerthe erhalten kann. Diese verschiedenen Werthe (z. B. $\alpha + \gamma + M\alpha\gamma$, $\alpha + \nu + M\alpha\nu$, $\mu + \nu + M\mu\nu$ u. dergl.), deren Anzahl n seyn mag [in dem angenommenen Beyspiel $= \frac{m(m-1)}{2}$ (nach §. 367. V.)], werden durch $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$, u. s. w. bezeichnet. — Dann bilde man das Produkt:

---

*) Dadurch kann man bewirken, daß die neue Gleichung in z, sehr kleine Wurzelwerthe bekommt, wenn die gegebene in x deren sehr große hat; und umgekehrt.

$$(z-\varphi)(z-\varphi_1)(z-\varphi_2)(z-\varphi_3)\cdots$$

deren Faktoren-Anzahl $= n$ ist; verwandle solches in eine ganze Funktion $F(z)$ vom nten Grade, so ist solches sowohl, als auch jeder ihrer Koeffizienten, nothwendig eine rationale symmetrische Funktion der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$. Diese symmetrischen Funktionen können aber nach (§. 490.) jedesmal durch die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \cdots A_m$, der gegebenen höhern Gleichung rational ausgedrückt werden. Folglich hat man, ohne die Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, zu kennen, die neue Gleichung in z, aus der gegebenen Gleichung

$$x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + A_m = 0$$

abgeleitet, wenn man $F(z) = 0$ setzt; weil jede der Funktionen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$, ꝛc. statt z gesetzt, einen Faktor von $F(z)$ zu Null macht, folglich ein Wurzelwerth von $F(z) = 0$ seyn muß.

§. 514. Zusatz.

Unter denselben Voraussetzungen, wie (§. 513.), hat man einen besondern Fall dieser allgemeinen Aufgabe, wenn man eine Gleichung in z sucht, deren Wurzelwerthe, die Summe von je zwey der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \cdots \nu$, ist. Auch hier wird, weil $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ ist, der Grad der Gleichung in z, $= \frac{m(m-1)}{2}$ $= m_2$, nach (§. 367. V.).

Beyspiel. Ist z. B. geegeben die Gleichung vom 3ten Grade

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$

deren 3 Wurzelwerthe α, β und γ seyn mögen, (so daß

$$\alpha+\beta+\gamma = -P, \quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = Q \quad \text{und} \quad \alpha\beta\gamma = -R$$

ist), so sind die Wurzelwerthe der gesuchten Gleichung in z selbst, folgende:

$$[z-(\alpha+\beta)]\cdot[z-(\alpha+\gamma)]\cdot[z-(\beta+\gamma)] = 0,$$

oder:

$$z^3 - 2(\alpha+\beta+\gamma)z^2 + [(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)+(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)+(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)]\cdot z - (\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma) = 0.$$

Um nun diese Koeffizienten, welche rationale symmetrische Funktionen von α, β und γ sind, durch die gegebenen Koeffizienten P, Q, R, rational auszudrücken, verfährt man auf die im (Kap. XX. Abtheil. 2.)

gelehrte Art. Erstlich ist $-2(\alpha+\beta+\gamma) = 2P$. Dann ist der folgende Koeffizient (der von z), wenn man algebraisch multiplizirt,

$$= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) = S[x_a^2]+3Q.$$

Endlich ist der letzte Koeffizient, wenn man algebraisch multiplizirt,

$$= -(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)-2\alpha\beta\gamma = -S[x_a^2\cdot x_b]+2R,$$
$$a\gtrless b$$

wo x_0, x_1, x_2, die Werthe α, β, γ vorstellen. Es bleibt also nur noch übrig, $S[x_a^2\cdot x_b]$ ebenfalls durch die Koeffizienten P, Q, R der
$$a\gtrless b$$

gegebenen Gleichung auszudrücken. Man hat aber $S[x_a^2] = P^2-2Q$, und $S[x_a^2\cdot x_b] = -PQ+3R$. Daher endlich die gesuchte Gleichung
$$a\gtrless b$$

in z: $$z^3+2P\cdot z^2+(P^2+Q)\cdot z+(PQ-R) = 0,$$

deren 3 Wurzelwerthe $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ und $\beta+\gamma$ sind.

§. 515. Zusatz.

Ein zweyter besonderer Fall der allgemeinen Aufgabe (§. 513.) wäre es, wenn man eine Gleichung in z suchte, deren Wurzelwerthe die Differenzen je zweyer der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, wären. — Diese Gleichung in z würde aber, weil $\alpha-\beta$ und $\beta-\alpha$ von einander verschieden sind, weil daher aus den m Wurzelwerthen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$, nach (§. 367. III.), $m(m-1)$ solche Differenzen gebildet werden können, vom Grade $m(m-1)$ seyn.

Weil aber z. B. $\beta-\mu$ und auch $\mu-\beta$ Wurzelwerthe dieser Gleichung in z seyn müssen, so muß solche zu Faktoren haben: $[z-(\beta-\mu)]\cdot[z-(\mu-\beta)]$, oder $[z-(\beta-\mu)]\cdot[z+(\beta-\mu)]$, oder $z^2-(\beta-\mu)^2$. —

Diese Gleichung in z enthält daher blos Potenzen von z^2; und setzt man y statt z^2, so wird sie wiederum vom Grade $\frac{m(m-1)}{2}$, nach y; und ihre Wurzelwerthe sind dann die Quadrate der Differenzen je zweyer der Wurzelwerthe $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$.

Anmerkung 1. Diese Gleichung für die Quadrate der Differenzen hat mancherlei merkwürdige Eigenschaften, in Bezug auf ihre

Wurzelwerthe. Es ist natürlich, daß sie nach (§. 513.) auch direkt gefunden werden konnte.

Anmerkung 2. Endlich ist nicht zu verkennen, daß die letztere allgemeinere Aufgabe des (§. 513.) auch die frühere des (§. 507.) und natürlich auch alle in letzterer enthaltenen speziellern Aufgaben, als besondere Fälle in sich schließt.

Dritte Abtheilung.

Von dem Eliminiren eines oder mehrer der Unbekannten aus zwey oder mehr gegebenen Gleichungen von beliebiger Ordnung.

---

§. 516. Aufgabe.

Es sind gegeben die beyden höhern Gleichungen mit zwey Unbekannten x und y:

1) $A_0 \cdot x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} \cdot x + A_m = 0$

und

2) $B_0 \cdot x^n + B_1 \cdot x^{n-1} + B_2 \cdot x^{n-2} + \cdots + B_{n-1} \cdot x + B_n = 0,$

welche kürzer durch:

3) $S[A_a \cdot x^{m-a}] = 0$ oder $\mathfrak{A} = 0,$

und 4) $S[B_a \cdot x^{n-a}] = 0$ oder $\mathfrak{B} = 0,$

vorgestellt seyn können oder mögen. — Die erste Gleichung soll von der mten Ordnung, die zweyte von der nten Ordnung seyn, so daß die Koeffizienten A_a und B_a ganze Funktionen von y, höchstens von der aten Ordnung seyn können. Man soll x aus beyden gegebenen Gleichungen eliminiren, d. h. man soll eine Gleichung in y ohne x finden, welche nicht durch mehr und auch nicht durch weniger Werthe von y identisch wird, als es Paare zusammengehöriger Werthe von x und y gibt, welche die

beyden gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ zugleich identisch machen.

Auflösung. 1) Man denke sich die erste Gleichung $\mathfrak{A} = 0$ nach x allgemein aufgelöst; und die m Wurzelwerthe $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ werden im Allgemeinen Ausdrücke seyn, welche y enthalten.

2) Jeden dieser m Werthe denke man sich in die zweyte Gleichung $\mathfrak{B} = 0$ statt x gesetzt, so erhält man m neue Gleichungen, alle von der Form:

$$S[B_a \cdot x_\mu^{n-a}] = 0,$$

wo μ nach und nach $0, 1, 2, 3, \cdots, m-1$ vorstellt.

3) Gibt es nun k Paare zusammengehöriger Werthe von x und y, welche beyden gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ zugleich genügen, so werden sich solche in m verschiedene Parthien anordnen lassen, wo in jeder dieser Parthie $\frac{k}{m}$ dieser zusammengehörigen Werthe sind, welche jedesmal einer einzigen der m Gleichungen in (Nr. 2.) genügen, weil jede dieser m Gleichungen im Allgemeinen nur unter der Voraussetzung identisch ist, daß die andern es zu gleicher Zeit nicht sind.

4) Multiplizirt man aber alle diese m Gleichungen in (2.), mit einander, so erhält man:

$$S[B_a \cdot B_b \cdot B_c \cdot B_d \cdots B_m \cdot x_0^{n-a} \cdot x_1^{n-b} \cdot x_2^{n-c} \cdot x_3^{n-d} \cdots\cdots x_{m-1}^{n-m}] = 0,$$
$$a+b+c+d+\cdots+m+p = nm$$

in so ferne der größte Werth von jedem der m Buchstaben a, b, c, d, $\cdots$ m, jedesmal n, also der größte Werth der Summe derselben, mn ist.

Diese Gleichung wird nun identisch, so oft irgend einer der Faktoren in (2.), identisch 0 wird, also durch alle k Paare zusammengehöriger Werthe von x und y, welche den beyden gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ zugleich genügen, durch nicht mehr und nicht weniger. Wenn man daher aus dieser Gleichung die noch Unbekannten $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ wegbringt, so wird sie die verlangte Eliminationsgleichung seyn.

5) Das kombinatorische Aggregat zur Linken in der Gleichung in (4.), ist aber ohnstreitig eine symmetrische Funktion der Wurzelwerthe $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$, läßt sich daher in die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \cdots A_m$ rational (d. h. ohne Wurzelzeichen) ausdrücken, nach (§. 490.). Und dann erhält diese Eliminationsgleichung diese unbekannten Wurzelwerthe $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$ nicht mehr, sondern dafür blos die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \cdots A_m$, so wie vorher schon $B_0, B_1, B_2, \cdots B_n$, welche gegebene und ganze Funktionen von y sind, die in der Eliminationsgleichung rational, also in Form einer ganzen Funktion von y mit einander in Verbindung getreten sind.

Beyspiel. Es seyen gegeben die Gleichungen der zweyten Ordnung:

$$A_0 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_2 = 0,$$
$$B_0 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + B_2 = 0,$$

wo A_0, B_0 nach x und nach y konstant, A_1 und B_1 die Form $\alpha y + \beta$, endlich A_2 und B_2 die Form $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ haben, so daß die gegebenen Gleichungen selbst, nach x und y beyde von der zweyten Ordnung sind. Denkt man sich nun die erste nach x aufgelöset, und die beyden Auflösungen durch x_0 und x_1 vorgestellt, so daß

$$x_0 + x_1 = -\frac{A_1}{A_0}, \quad x_0 \cdot x_1 = \frac{A_2}{A_0} \qquad \text{ist,}$$

diese Werthe x_0 und x_1 statt x in die zweyte Gleichung substituirt, und die Resultate multiplizirt, so ist die gesuchte Eliminations-Gleichung:

$$[B_0 \cdot x_0^2 + B_1 \cdot x_0 + B_2] \cdot [B_0 \cdot x_1^2 + B_1 \cdot x_1 + B_2] = 0,$$

oder wenn man wirklich multiplizirt:

$$B_0^2 \cdot (x_0 \cdot x_1)^2 + B_0 \cdot B_1 \cdot (x_0 \cdot x_1^2 + x_1 \cdot x_0^2) + B_1^2 \cdot x_0 \cdot x_1 + B_0 \cdot B_2 \cdot (x_0^2 + x_1^2) + B_1 \cdot B_2 \cdot (x_0 + x_1) + B_2^2 = 0.$$

Nun ist aber:

$$(x_0 \cdot x_1)^2 = \frac{A_2^2}{A_0^2}, \quad x_0 \cdot x_1^2 + x_1 \cdot x_0^2 = x_0 \cdot x_1 \cdot (x_0 + x_1) = -\frac{A_1 \cdot A_2}{A_0^2},$$

$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + x_1)^2 - 2x_0 \cdot x_1 = \frac{A_1^2}{A_0^2} - 2\frac{A_2}{A_0} = \frac{A_1^2 - 2A_0 \cdot A_2}{A_0^2};$$

und daher vorstehende Eliminationsgleichung jetzt:

$$\frac{B_0^2 \cdot A_2^2}{A_0^2} - \frac{B_0 \cdot B_1 \cdot A_1 \cdot A_2}{A_0^2} + \frac{B_1^2 \cdot A_2}{A_0} + \frac{B_0 \cdot B_2 \cdot (A_1^2 - A_0 \cdot A_2)}{A_0^2} - \frac{B_1 \cdot B_2 \cdot A_1}{A_0} + B_2^2 = 0,$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung in y, und nach y im Allgemeinen von der 4ten Ordnung ist. Vergleicht man dieses Beyspiel mit derselben Aufgabe, wie solche bereits (§§. 301.—304.) behandelt sich findet, indem man x statt y, und $A_0 = a$, $B_0 = a_1$,

$$A_1 = b\,x + d\,, \qquad A_2 = c\,x^2 + e\,x + f\,,$$
$$B_1 = b_1 x + d_1, \qquad B_2 = c_1 x^2 + d_1 x + f_1,$$

setzt, so wird die Uebereinstimmung der beyden Resultate in die Augen springen.

§. 517. Zusatz.

Diese Eliminationsgleichung in y ist höchstens vom mnten Grade. — Denn es ist B_μ offenbar eine ganze Funktion von y, höchstens vom μten Grade, also:

$$B_a \cdot B_b \cdot B_c \cdots B_m$$

eine ganze Funktion von y, höchstens vom (mn—p)ten Grade. Ferner folgt aus dem Newton'schen Lehrsatze (§. 490.), daß die aus

$$x_0^{n-a} \cdot x_1^{n-b} \cdot x_2^{n-c} \cdot x_3^{n-d} \cdots x_{m-1}^{n-m}$$

gebildete symmetrische Funktion, nach y höchstens vom Grade p werden kann. Also ist jedes Glied der Eliminations-Gleichung nach y höchstens vom Grade mn—p+p, d. h. höchstens vom Grade mn.

§. 518. Zusatz.

Es kann die Eliminations-Gleichung identisch $0 = 0$ werden. — Dann ist einer, oder sind mehrere der Faktoren

$$S[B_a \cdot x_0^{n-a}], \quad S[B_b \cdot x_1^{n-b}], \quad \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

identisch 0; folglich von den Wurzelwerthen x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{m-1} als Funktionen von y, wenigstens einer, vielleicht aber einige für jeden Werth von y, zugleich Wurzelwerthe der zweyten Gleichung $\mathfrak{B} = 0$; und es haben also dann die beyden Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, den gemeinschaftlichen

Faktor $x - x_0$, oder $(x - x_0)(x - x_1)$, oder u. s. w. für jeden Werth von y.

Würde man aber für die Eliminations-Gleichung erhalten $\mathfrak{A} = 0$, und $\mathfrak{A}$ nach y konstant; so wäre dies ein Beweis, daß die gegebenen Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ sich widersprechen, und daß es also nicht ein einziges Paar zusammengehöriger Werthe für x und y gibt, welches beyden Gleichungen zugleich ein Genüge leistete.

§. 519. Zusatz.

Hat die Gleichung $\mathfrak{B} = 0$, den Faktor $\varphi(y)$ ohne x, so kann man $\frac{\mathfrak{B}}{\varphi(y)}$ durch $\mathfrak{B}_1$ bezeichnen, und dann y aus $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B}_1 = 0$ auf die (§. 516.) angegebene Art eliminiren, die erhaltene Eliminationsgleichung aber mit $[\varphi(y)]^m$ noch multipliziren, um die Eliminationsgleichung nach y zwischen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ zu haben, wie solches unmittelbar aus der Auflösung (§. 516.) hervorgeht, in so ferne $\mathfrak{B} = \varphi(y) \cdot \mathfrak{B}_1$ ist.

Hätten $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$, dieselbe ganze Funktion von y, nämlich $\varphi(y)$, zum größten gemeinschaftlichen Theiler, so könnte man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erst durch ihn dividiren, und dann die Eliminationsgleichung zwischen $\mathfrak{A}_1 = 0$ und $\mathfrak{B}_1 = 0$ aufsuchen.

§. 520. Zusatz.

So viele Paare von Werthen von x und y es gibt, welche den beyden Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ ein Genüge leisten, so viele Wurzelwerthe muß auch die Eliminationsgleichung in y haben; und umgekehrt. — Die zu jedem Werth a von y, zugehörigen Werthe von x, findet man aber, wenn man in $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{B}$, a statt y setzt, und dann zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den größten gemeinschaftlichen Theiler $\psi(x)$ nach x sucht, diesen $= 0$ setzt, und nun die Wurzelwerthe dieser Gleichung $\psi(x) = 0$ auffindet.

Jeder Werth von x aus $\psi(x) = 0$, mit dem Werth $y = a$ in Verbindung, leistet dann den Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ ein Genüge. — Daraus folgt aber noch:

1) Hat die Eliminationsgleichung in y den kfachen Wurzelwerth a, so hat die Gleichung $\psi(x) = 0$ nothwendig k Wurzelwerthe für x; sie ist also dann vom Grade k nach x.

2) Umgekehrt, wenn für $y = a$, ein solcher den beyden ganzen Funktionen A und B gemeinschaftlicher größter Theiler vom Grade k existirt, so muß die gesuchte Eliminationsgleichung in y, nothwendig eine Anzahl k, dem a gleicher Wurzelwerthe haben.

§. 521. Zusatz.

Weil für jeden Wurzelwerth der Eliminationsgleichung in y, wenn solcher statt y in A und in B gesetzt gedacht wird, diese ganzen Funktionen in A und B nothwendig einen gemeinschaftlichen Theiler in x haben müssen, so folgt, daß wenn man nach (§. 432. Nr: 5.) verfährt (zwischen A nnd B, während y noch ein allgemeiner Ausdruck ist, den größten gemeinschaftlichen Theiler aufsucht, und den letzten Rest, der im Allgemeinen eine Funktion von y ist und durch $f(y)$ bezeichnet werden kann, der Null gleich setzt), jeder Wurzelwerth von $f(y) = 0$, der nicht zugleich den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in irgend einem der Divisoren, der Null gleich macht, nothwendig ein Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung seyn müsse.

Es kann daher diese so gefundene Endgleichung $f(y) = 0$ alle Wurzelwerthe der Eliminationsgleichung enthalten. Sie kann aber auch nicht alle Wurzelwerthe der Eliminationsgleichung, dagegen in jedem Falle auch mehrere, der Eliminationsgleichung ganz fremde Wurzelwerthe, in sich aufgenommen haben. — Und deshalb ist dieses Verfahren an sich nicht geeignet, um in jedem Falle mit Nothwendigkeit die gesuchte Eliminationsgleichung zu liefern.

Ferner fällt in die Augen, daß wenn in irgend einem der Reste, welche im Allgemeinen ganze Funktionen von x seyn müssen, deren Koeffizienten wiederum Funktionen von y sind, diese letztern Koeffizienten alle für einen Werth a von y der Null

gleich werden, dieser Rest selbst der Null gleich werden muß. Wenn daher derselbe Werth a von y nicht zugleich auch den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in irgend einem der vorhergehenden Divisoren, der Null gleich macht, so ist auch solcher Werth a nothwendig ein Wurzelwerth der Eliminationsgleichung. Und ist der letzte Divisor nach x vom Grade r, so ist dieser Werth a ein rfacher Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung, nach (§. 518. Nr. 2.).

§. 522. Zusatz.

Setzen wir die beyden Gleichungen des (§. 514.), nämlich $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$, und $m \gtreqless n$ voraus, auch daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler nach x allein, oder nach x nnd y haben, unabhängig von einem bestimmten Werth von x oder y; so kann man auf obige Betrachtungen (§. 521.) und auf (§. 519.) folgendes Verfahren gründen, welches alle Wurzelwerthe der gesuchten Eliminatiansgleichung liefert, nicht mehr und nicht weniger.

Man verfahre nämlich wieder so, als wenn nach (§. 432. Nr. 5.) der größte gemeinschaftliche Theiler zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach x gefunden werden sollte, aber mit den Einschränkungen:

1) auf dem Wege des (§. 432. Nr. 6.) alle gebrochenen Funktionen von y, als Koeffizienten von x, zu vermeiden;

2) sowohl die Funktionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, als auch jeden, der während der Operation entstehenden Reste $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ꝛc. ꝛc., (in so ferne sie Funktionen von x sind, deren Koeffizienten im Allgemeinen wiederum ganze Funktionen von y seyn werden), von dem, allen diesen Koeffizienten gemeinschaftlichen größten Faktor in y zu befreyen, und nicht diese Funktionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, ꝛc. ꝛc. selbst, sondern erst die von diesem, beziehlich größten gemeinschaftlichen Theiler befreyten Funktionen ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{R}$), ($\mathfrak{R}_1$), ($\mathfrak{R}_2$), ꝛc. ꝛc. im Verlaufe der Operationen anzuwenden.

I. Hat nun $\mathfrak{A}$ den größten Theiler $\varphi(y)$, so nehme man jeden Wurzelwerth von $\varphi(y) = 0$, als so vielfachen Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung, als für ihn, wenn man solchen statt x in $\mathfrak{B}$ setzt, der Grad von $\mathfrak{B}$ wird.

II. Hat aber $\mathfrak{B}$ den größten Theiler $\varphi_1(y)$, so nehme man jeden Wurzelwerth von $\varphi_1(y) = 0$, der nicht zugleich ein Wurzelwerth von $\varphi(y) = 0$ ist, als so vielfachen Wurzelwerth, als für ihn der Grad von $(\mathfrak{A})$ wird.

III. Bezeichnen nun A, 'A, ''A, '''A, ꝛc. ꝛc. die Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in den zur Operation benutzten Divisoren $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{R})$, $(\mathfrak{R}_1)$, $(\mathfrak{R}_2)$ ꝛc., nnd hat dann der erste Rest $\mathfrak{R}_1$ den größten Theiler $\varphi_2(y)$, so nehme man jeden Wurzelwerth von $\varphi_2(y) = 0$, der nicht zugleich ein Wurzelwerth von $\varphi(y) = 0$, $\varphi_1(y) = 0$ und auch nicht von $A = 0$ ist, als so vielfachen Wurzelwerth der Eliminationsgleichung als der Grad von $(\mathfrak{B})$ ist.

IV. Hat ferner der zweyte Theil $\mathfrak{R}_1$ den größten Theiler $\varphi_3(y)$, so nehme man jeden Wurzelwerth von $\varphi_3(y) = 0$, der nicht zugleich Wurzelwerth ist, weder von $\varphi(y) = 0$, $\varphi_1(y) = 0$, $\varphi_2(y) = 0$, noch von $A = 0$, $'A = 0$, als so vielfachen Wurzelwerth der Eliminationsgleichung, als der Grad von $(\mathfrak{R})$ anzeigt.

V. Ist ferner $\varphi_4(y)$ der größte Theiler von dem nächsten Rest $\mathfrak{R}_2$, so ist jeder Wurzelwerth von $\varphi_4(y) = 0$, der nicht zugleich Wurzelwerth ist, weder von $\varphi(y) = 0$, $\varphi_1(y) = 0$, $\varphi_2(y) = 0$, $\varphi_3(y) = 0$, noch von $A = 0$, $'A = 0$, $''A = 0$, ein so vielfacher Wurzelwerth der Eliminationsgleichung, als der Grad von $(\mathfrak{R}_1)$ anzeigt.

VI. Es ist leicht, dieses Verfahren zu übersehen, bis zu dem letzten Rest $\mathfrak{R}_\nu$; jeder Wurzelwerth von $\mathfrak{R}_\nu = 0$, der nicht zugleich Wurzelwerth irgend einer der vorhergehenden Gleichungen $\varphi(y) = 0$, $\varphi_1(y) = 0$, $\varphi_2(y) = 0$, ꝛc. ist, und auch nicht von irgend einer der Gleichungen $A = 0$, $'A = 0$, $''A = 0$, $'''A = 0$, ꝛc. ꝛc. ist noch als ein so vielfacher Wurzelwerth der

gesuchten Eliminationsgleichung zu nehmen, als der Grad des letzten Divisors verlangt.

VII. Um endlich keinen der Wurzelwerthe der gesuchten Eliminationsgleichung zu übergehen, nehme man noch alle die verschiedenen Wurzelwerthe der Gleichungen $A = 0$, $'A = 0$, $''A = 0$, &c. &c., welche zugleich Wurzelwerthe von $\varphi(y) = 0$, $\varphi_1(y) = 0$, oder $\varphi_2(y) = 0$, oder $\varphi_3(y) = 0$, &c. &c. &c., oder endlich von $R_\nu = 0$ waren, setze solche, statt y, in die ganzen Funktionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, und sehe zu, ob diese Funktionen einen gemeinschaftlichen Theiler in x haben. Jeden dieser Wurzelwerthe, für welchen sich noch ein solcher gemeinschaftlicher Theiler in x, von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ findet, muß man dann noch als einen so vielfachen Wurzelwerth der Eliminationsgleichung nehmen, als der Grad dieses gemeinschaftlichen Theilers in x anzeigt.

VIII. Alle diese Wurzelwerthe zusammen, bilden dann genau die gesuchte Eliminationsgleichung.

Anmerkung 1. Will man aber von $\varphi_1(y) = 0$, die mit $\varphi(y) = 0$ gemeinschaftlichen Wurzelwerthe absondern, so darf man nur zwischen den Funktionen $\varphi(y)$ und $\varphi_1(y)$ den größten gemeinschaftlichen Theiler in y suchen, und $\varphi_1(y)$ durch ihn dividiren. Der Quotient $= 0$ gesetzt, gibt dann diejenigen Wurzelwerthe von $\varphi_1(y) = 0$, welche nicht zugleich Wurzelwerthe von $\varphi(y) = 0$ sind. — Auf ähnliche Weise werden aber auch von den übrigen Gleichungen, die gemeinschaftlichen Wurzelwerthe mit den vorhergehenden Gleichungen, abgesondert.

Anmerkung 2. Es versteht sich dabey von selbst, daß wenn irgend einer der Reste oder eine der Funktionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ selbst, keinen Theiler in y haben, sogleich zu dem folgenden Rest oder zu der folgenden Funktion von x fortgeschritten wird.

Anmerkung 3. Hätten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ noch einen gemeinschaftlichen Theiler T nach x vom Grade r, in x allein oder in x und y, unabhängig aber von y, und hätte man auf sie dennoch dasselbe Verfahren des (§.) angewandt, so wäre man zuletzt auf einen Rest R_1 gekommen, der identisch $= 0$ ist. Jeder Werth a von y aus $\varphi(y) = 0$, oder $\varphi_1(y) = 0$, oder $\varphi_2(y) = 0$, &c. &c., oder aus $A = 0$, $'A = 0$, &c., für welchen ein den Funktionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemeinschaftlicher Theiler T vom Grade t existirt, gibt aber dann doch den gemeinschaftlichen

Theiler $\frac{T}{\mathfrak{T}}$ nach x, der beyden Funktionen $\frac{A}{\mathfrak{T}}$ und $\frac{B}{\mathfrak{T}}$, für diesen Werth a von y; so daß dieser Werth a ein (t—r)facher Wurzelwerth der aus den beyden Gleichungen $\frac{A}{\mathfrak{T}} = 0$ und $\frac{B}{\mathfrak{T}} = 0$ hervorgehenden Elimi=nationsgleichung ist. — Das im (§.) gezeigte Verfahren liefert also, auch im Falle A und B noch einen von y unabhängigen Theiler T in x hätten, die Wurzelwerthe der Eliminationsgleichung, welche in diesem Falle möglich ist, ohne daß es nöthig wäre, die Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ vor der Operation von diesem gemeinschaft=lichen Theiler zu befreien.

Anmerkung 4. Weil z. B. $(R_1) = (R_2)\cdot Q + R_3$ ist, so folgt, daß wenn man für x oder für y einen Werth setzt, der $(R_2) = 0$ macht, dann sogleich $R_3 = (R_1)$ seyn müsse, für denselben Werth von x oder von y.

Erstes Beyspiel. Es seyen die beyden gegebenen Gleichungen

A) $x^3+(y^2+y-1)x^2+(y^2-2y)x+(-y^3-3y^2+3y) = 0$,

B) $x^3+\quad y\cdot x^2+(y^2-2y)x+(-\quad 3y^2+2y) = 0$;

und x zu eliminiren.

Die Theiler $\varphi(y)$, $\varphi_1(y)$ existiren nicht; $A = 1$ und $\mathfrak{R} = (y^2-1)x^2+(-y^3+y)$; daher $\varphi_2(y) = y^2-1$ und $(\mathfrak{R}) = x^2-y$ und $'A = 1$. — Dann ist weiter $R_1 = (y^2-y)x+(-2y^2+2y)$; folglich $\varphi_3(y) = y^2-y$ und $(R_1) = x-2$; daher $''A = 1$. — Endlich wird $R_2 = 4-y$. — Mithin die gesuchte Eliminations=gleichung

$$(y^2-1)^3\cdot y^2\cdot(y-4) = 0 \qquad \text{oder}$$
$$y^9-4y^8-3y^7+12y^6+3y^5-12y^4-y^3+4y^2 = 0.$$

Die zu jedem dieser Werthe von y zugehörigen Werthe von x, welche in Verbindung den gegebenen Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ ein Genüge leisten, findet man auf folgende Art. — Die zu jedem, aus $\varphi_2(y) = 0$, d. h. aus $y^2-1 = 0$ hervorgehenden Werth von y, gehörigen Werthe von x liefert die Gleichung $B = 0$; also für $y = 1$ die Gleichung $x^3+x^2-x-1 = 0$ oder $(x+1)^2\cdot(x-1) = 0$; und für $y = -1$, die Gleichung $x^3-x^2+3x-5 = 0$. — Ferner liefert die zu jedem aus $\varphi_3(y) = 0$ hervorgehenden Werth von y, nämlich zu $y = 0$, gehörigen Werthe von x, die Gleichung $(\mathfrak{R}) = 0$, d. h. $x^2 = 0$. — Endlich erhält man die zu $R_2 = 0$ oder $y = 4$ gehöri=gen Werthe von x, aus $R_1 = 0$, oder $x-2 = 0$.

Den beyden gegebenen Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ genügen also die 9 Paare von Werthen, nämlich

x	1,	−1,	−1,	0,	0,	2,
y	1,	1,	1,	0,	0,	4,

und noch die 3 Werthe aus $x^3-x^2+3x-5=0$, mit $y=-1$ in Verbindung.

Zweytes Beyspiel. Es sey x zu eliminiren aus den beyden Gleichungen:

$$\mathfrak{A})\quad x^2-(2y+5)x+(y^2+5y+6)=0,$$
$$\mathfrak{B})\quad x^2-\quad 4yx+(4y^2-1)\quad =0.$$

Hier ist $A=1$; $\varphi(y)$ und $\varphi_1(y)$ existiren nicht; ferner ist $\mathfrak{R}=(\mathfrak{R})=(2y-5)x+(-3y^2+5y+7)$, $\varphi_2(y)$ existirt nicht, und $'A=2y-5$. — Folglich wenn $\mathfrak{B}$ mit $'A^2$ (nach §. 432. Nr. 6) multiplizirt und die Operation weiter fortgesetzt wird, $\mathfrak{R}_1=y^4-10y^3+35y^2-50y+24$; und $(\mathfrak{R}_1)=0$ oder $(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)$ die gesuchte Eliminationsgleichung. — Die zugehörigen Werthe von x gibt die Gleichung $(\mathfrak{R})=0$ oder

$$x=\frac{3y^2-5y-7}{2y-5};$$

und den beyden Gleichungen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$ genügen die Paare

x	1,	2,	3,	4,
y	3,	5,	5,	7.

Drittes Beyspiel. Aus denselben beyden Gleichungen des vorigen Beyspiels, y zu eliminiren. — Nach y geordnet geben sie:

$$\mathfrak{A})\quad y^2+(-2x+5)y+(x^2-5x+6)=0,$$
$$\mathfrak{B})\quad 4y^2-\quad 4xy+(x^2-1)\quad =0.$$

Es ist hier $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ konstant, $'A=4$, und

$$\mathfrak{R}=(-4x+20)y+(3x^2-20x+25)=0,$$

daher $\varphi_2(x)=x-5$

und $(\mathfrak{R})=-4y+(3x-5)$, so wie $'A=-4$. —

Multiplizirt man hier $\mathfrak{B}$ statt mit 4^2 blos mit 4, so erhält man weiter den letzten Rest:

$$\mathfrak{R}_1=x^2-10x+21=(x-3)(x-7). —$$

Daher die gesuchte Eliminationsgleichung:

$(x-5)^2(x-3)(x-7)=0$ oder $x^4-20x^3+146x^2-460x+525=0$.

Viertes Beyspiel. Den Unbekannten x zu eliminiren aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{A})\quad x^3-(3y+5)x^2+(3y^2+10y+6)x-(y^3+5y^2+6y)=0$$
$$\mathfrak{B})\quad x^3-\quad 5y\cdot x^2+\quad (8y^2-1)x-(4y^3-y)\quad =0.$$

Hier ist $A = 1$, und $\varphi(y)$ und $\varphi_1(y)$ sind konstant; und dabey

$$\mathfrak{R} = (2y-5)x^2+(-5y^2+10y+7)x+(3y^3-5y^2-7y);$$

daher $\varphi_2(y)$ konstant, und $'A = 2y-5$; folglich wenn $\mathfrak{B}$ mit $(2y-5)^2$ multiplizirt wird:

$\mathfrak{R}_1 = (y^4-10y^3+35y^2-50y+24)x+(-y^5+10y^4-35y^3+50y^2-24y)$ und $\varphi_3(y) = y^4-10y^3+35y^2-50y+24$, so wie $(\mathfrak{R}_1) = x-y$ und $''A = 1$. — Der letzte Rest $\mathfrak{R}_2$ wird nun identisch $= 0$, und der letzte Quotient

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_1} = (2y-5)x+(-3y^2+5y+7).$$

Die beyden Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, haben also nach (Anmerkung 3.) den gemeinschaftlichen Theiler $(\mathfrak{R}_1)$ oder $x-y$ unabhängig von jedem Werth von y. Dividirt man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch ihn, so erhält man:

$$\begin{aligned} &x^2-(2y+5)x+(y^2+5y+6) = 0 \\ \text{und}\quad &x^2- \quad 4yx+(4y^2-1) \quad = 0, \end{aligned}$$

zwischen denen erst die Elimination von x möglich ist. Die Gleichung $\varphi_3(y) = 0$ oder $y^4-10y^3+35y^2-50y+24 = 0$ ist aber die gesuchte Eliminationsgleichung aus diesen letztern, und die zugehörigen Werthe von x gibt der letzte Quotient $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_1} = 0$, oder die Gleichung: $(2y-5)x+(-3y^2+5y+7) = 0$, oder $x = \frac{3y^2-5y-7}{2y-5}$.

(Man vergleiche damit das zweyte Beyspiel.)

Fünftes Beyspiel. Man soll x eliminiren aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A})\quad &yx^3-(y^3-3y-1)x+y = 0, \\ \mathfrak{B})\quad &x^2+ \quad (-y^2+3) \quad = 0. \end{aligned}$$

Hier sind φy, $\varphi_1(y)$ konstant; $A = 1$, $\mathfrak{R} = x+y$, $\varphi_2(y)$ konstant, $'A = 1$, $\mathfrak{R}_1 = 3$. — Folglich hat die gesuchte Eliminationsgleichung gar keinen Wurzelwerth, d. h. es findet keine Eliminationsgleichung statt.

Die beyden gegebenen Gleichungen finden also für dieselben Werthe von x und y nie zugleich statt.

Noch mehr Beyspiele zur Uebung.

1) $\begin{cases} x^3-(3y-1)x^2+(y^2-2y)x+(y^2+y) = 0, \\ x^3-(y-1)x^2-(y-1)x+1 = 0. \end{cases}$

Man findet den gemeinschaftlichen Theiler $x+1$ unabhängig von y. Für die neuen Gleichungen

$$x^2-3yx+(y^2+y)=0 \quad \text{und} \quad x^2-yx+1=0$$

findet sich dann als Eliminationsgleichung:

$$y^4-7y^2+1=0.$$

2) $\begin{cases} 2yx^3+(2y^2-4y-2)x^2+(2y^4-6y^3-2y^2+6y+1)x-2 = 0, \\ yx^2+(y^2-2y-1)x+(y^4-3y^3-y^2+3y) = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+(-y^3+3y^2+y-3) = 0, \\ x^2+(2y+4)x+(y^2+4y+3) = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3-(3y+9)x^2+(3y^2+18y+23)x-(y^3+9y^2+23y+15) = 0, \\ x^3+(3y-3)x^2+(3y^2-6y-1)x+(y^3-3y^2-y+3) = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x^3-2yx^2-3y^2x+2y^3 = 0, \\ (y^3-y)x-(6y^2-6) = 0. \end{cases}$

Hier ist $\varphi_1(y)=y^2-1$, und $(\mathfrak{B})=yx-6$; $A=y$.

6) $\begin{cases} (y^2-y)x^2+(y^3-y^2)x+(y^4-y^3-y+1) = 0, \\ (y^2-3y+2)x^2+(y^2-y)x+(-y^3+2y^2-y) = 0. \end{cases}$

Hier ist $\varphi(y)=y-1$ und $\varphi_1(y)=y-1$; daher haben $\varphi(y)$ und $\varphi_1(y)$ und also auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ den gemeinschaftlichen Theiler $y-1$ unabhängig von x, von dem sie erst befreit werden müssen, ehe man das Eliminiren versuchen kann.

7) $\begin{cases} x^3+(3y-1)x^2+(3y^2-2y-9)x+y^3-y^2-9y+9 = 0, \\ x^2-2yx+y^2+4x-4y+3 = 0. \end{cases}$

Endgleichung in $y \cdots y(y-2)^2(y-1)^2(y-3) = 0$,

Endgleichung in $x \cdots x^2(x-1)(x+1)(x+3)(x-4) = 0$.

8) $\begin{cases} y^3+(2x+2)y-x^2y+7xy-5y-2x^3+yx^2-7x-6 = 0, \\ y^2+3x^2+4xy+y+5x-2 = 0. \end{cases}$

Endgleichung in $y \cdots (y+2)(y+3)(2y+5)(2y-5)(y+5) = 0$,

Endgleichung in $x \cdots (x-1)^2(2x-1)(2x+1)(x-2) = 0$.

9) $\begin{cases} x^2-2xy+y^2-4x+4y+3 = 0, \\ x^2-2xy+y^2-6x+6y-7 = 0 \end{cases}$

haben keine Eliminationsgleichung.

10) $\begin{cases} x^2+2xy+y^2-10x-10y+21 = 0, \\ x^2-2xy+y^2+6x-6y+5 = 0. \end{cases}$

Endgleichung in $y \cdots (y-4)^2(y-6)(y-2) = 0$,

Endgleichung in $x \cdots (x-3)(x-1)^3 = 0$.

§. 523. Zusatz.

Kann eine der beiden Gleichungen $\mathfrak{A} = 0$ oder $\mathfrak{B} = 0$ in Faktoren zerlegt werden; ist z. B. $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E}$, und sind dabey $\mathfrak{C}$, und $\mathfrak{D}$, und $\mathfrak{E}$, Funktionen von x und y oder von x allein, so ist klar, daß jeder Werth von y, welcher verursacht, daß $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$, oder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$, einen gemeinschaftlichen Faktor in x haben, nothwendig ein Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung in y seyn müsse, und daß auch umgekehrt jeder Wurzelwerth der gesuchten Eliminationsgleichung in y zwischen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$, zugleich unter den Wurzelwerthen der Eliminationsgleichungen in y zwischen $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$, zwischen $\mathfrak{D} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$, und zwischen $\mathfrak{E} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ enthalten seyn müsse.

Wäre endlich auch $\mathfrak{B}$ noch in ein Produkt $\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{H}$ mehrer andern ganzen Funktionen von x und y oder von x allein zerlegbar, so dürfte man nur die Eliminationsgleichungen suchen, zwischen $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{F} = 0$, zwischen $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{G} = 0$, zwischen $\mathfrak{C} = 0$ und $\mathfrak{H} = 0$, dann zwischen $\mathfrak{D} = 0$ und $\mathfrak{F} = 0$, zwischen $\mathfrak{D} = 0$ und $\mathfrak{G} = 0$, zwischen $\mathfrak{D} = 0$ und $\mathfrak{H} = 0$; endlich zwischen $\mathfrak{E} = 0$ und $\mathfrak{F} = 0$, $\mathfrak{E} = 0$ und $\mathfrak{G} = 0$, und zwischen $\mathfrak{E} = 0$ und $\mathfrak{H} = 0$; und aus diesen Eliminationsgleichungen die gesuchte Eliminationsgleichung in y zwischen $\mathfrak{A} = 0$ und $\mathfrak{B} = 0$ durch Multiplikation zusammensetzen.

Beyspiel. Ist aus den gegebenen Gleichungen

$$\mathfrak{A})\ (yx-6)(x-1)(x+1) = 0,$$
$$\mathfrak{B})\ (2x-3y)(x-y)(x+y) = 0,$$

x zu eliminiren, so erhält man als Eliminationsgleichung in y zwischen

$$yx-6 = 0 \quad \text{und} \quad 2x-3y = 0,$$

die Gleichung $y^2-4 = 0$ oder $(y-2)(y+2) = 0$; dann als Eliminationsgleichung zwischen

$$x-1 = 0 \quad \text{und} \quad 2x-3y = 0,$$

die Gleichung $3y-2 = 0$;

und als Eliminationsgleichung zwischen

$$x+1=0 \quad \text{und} \quad 2x-3y=0,$$

die Gleichung $3y+2=0.$

Eben so sind die Eliminationsgleichungen zwischen

$$\left.\begin{aligned} yx-6&=0 \quad \text{und} \quad x-y=0\\ x-1&=0 \quad \text{und} \quad x-y=0\\ x+1&=0 \quad \text{und} \quad x-y=0 \end{aligned}\right\} \text{ beziehlich } \begin{cases} y^2-6=0,\\ y-1=0,\\ y+1=0. \end{cases}$$

Endlich sind die Eliminationsgleichungen zwischen

$$\left.\begin{aligned} yx-6&=0 \quad \text{und} \quad x+y=0\\ x-1&=0 \quad \text{und} \quad x+y=0\\ x+1&=0 \quad \text{und} \quad x+y=0 \end{aligned}\right\} \text{ beziehlich } \begin{cases} y^2+6=0,\\ y+1=0,\\ y-1=0. \end{cases}$$

Daher die gesuchte Eliminationsgleichung zwischen $\mathfrak{A}=0$ und $\mathfrak{B}=0$

$$(y^2-4)(3y-2)(3y+2)(y^2-6)(y^2+6)(y-1)^2(y+1)^2=0.$$

Eben so leicht läßt sich die Eliminationsgleichung in x finden.

§. 524. Zusatz.

Man kann auch zur Eliminationsgleichung zwischen den Gleichungen:

$$\text{I.} \quad x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0,$$
$$\text{II.} \quad x^2+px+q=0,$$

auf folgende Weise gelangen:

Man findet aus (II.):

$$1) \quad x^2=-px-q;$$

daraus $x^3=(-px-q)x=-px^2-qx,$

und indem man statt x^2 sogleich wieder den Werth $-px-q$ setzt:

$$2) \quad x^3=(p^2-q)x+pq;$$

daraus wieder, auf dieselbe Weise verfahrend, d. h. mit x multiplizirend, und statt x^2 rechts den Werth setzend:

$$x^4=(p^2-q)x^2+pqx$$
$$=(p^2-q)(-px-q)+pqx,$$

oder $$3) \quad x^4=(-p^3+2pq)x-q(p^2-q).$$

Diese Werthe für x^2, x^3 und x^4, substituirt man nun in die Gleichung (I.), und erhält eine Gleichung (III.), die im Allgemeinen

um einen Grad niedriger seyn wird, als die (II.), die also hier vom ersten Grade seyn muß. — Man hat dann:

$$\text{II.}\quad x^2+px+q=0,$$
$$\text{III.}\quad x+r=0.$$

Mit diesen Gleichungen (II.) und (III.) verfahre man nun gerade so, wie mit den Gleichungen (I.) und (II.). Dann erhält man z. B. aus (III.):

$$1)\quad x=-r.$$

Hieraus wieder $x^2=-rx=(-r)(-r)$, oder

$$2)\quad x^2=r^2.$$

Diese Werthe für x und x^2 in (II.) substituirt, geben dann wiederum eine Gleichung (IV.), welche im Allgemeinen um einen Grad niedriger seyn muß, als die (III.), die folglich hier vom nullten Grade, oder in x konstant wird.

Denkt man sich nun, daß in den beyden gegebenen Gleichungen, das y, wo es vorkommt, jedesmal einen seiner Werthe aus der Eliminationsgleichung repräsentirt, so ist klar, daß für diesen Werth von y, die Endgleichung (IV.) nothwendig identisch seyn muß. Es wird daher die Endgleichung alle Wurzelwerthe der Eliminationsgleichung enthalten. — Weil aber die Endgleichung auch noch, der Eliminationsgleichung fremde Wurzelwerthe enthalten kann, so darf solche nicht unbedingt als Eliminationsgleichung angenommen werden.

Anmerkung. Diese Methode selbst ist hier nur beyspielsweise angedeutet, weil das Verfahren so sehr einfach ist, daß ein Beyspiel hinreicht, um es erkennen zu lassen.

Die ganze Methode dreht sich um den Satz, daß wenn man die Gleichung:

$$1)\quad x^m=Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\cdots$$

hat, man jede höhere als die mte Potenz, durch eine Funktion vom m—1ten Grade nach x ausdrücken könne, dadurch daß man die gegebene Gleichung (1.) mit x multiplizirt, und rechts statt x^m sogleich wieder aus (1.) ihren Werth setzt.

So erhält man:

$$2)\quad x^{m+1} = Px^m + Qx^{m-1} + Rx^{m-2} + \cdots$$
$$= (P^2+Q)x^{m-1} + (PQ+R)x^{m-2} + \cdots$$

und $$3)\quad x^{m+2} = (P^2+Q)x^m + (PQ+R)x^{m-1} + \cdots$$
$$= [(P^2+Q)P + (PQ+R)]x^{m-1} + \cdots$$

u. s. w. f.

§. 525. Zusatz.

Um an einem Beyspiel auch noch ein viertes Eliminations-Verfahren anzudeuten, mag x aus den Gleichungen

$$Nx^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$
$$nx^3 + px^2 + qx + r = 0$$

eliminirt werden.

Zu dem Ende multiplizire man beyde Gleichungen dergestalt, daß bald die ersten, bald die letzten Koeffizienten in beyden einander gleich werden, und addire oder subtrahire die neuen Gleichungen, um Resultate mit weniger Gliedern zu bekommen, die sich dann auch auf einen niedrigern Grad bringen lassen. So z. B. erhält man:

$$Nnx^3 + Pnx^2 + Qnx + Rn = 0$$
$$Nnx^3 + pNx^2 + qNx + rN = 0$$

$$\text{I.}\quad (Pn - pN)x^2 + (Qn - qN)x + (Rn - rN) = 0.$$

Dann aber auch

$$Nr\,x^3 + Pr\,x^2 + Qrx + Rr = 0$$
$$nR\,x^3 + pR\,x^2 + qR\,x + Rr = 0$$

$$(Nr - nR)x^3 + (Pr - pR)x^2 + (Qr - qR)x = 0;$$

oder durch x dividirend:

$$\text{II.}\quad (Nr - nR)x^2 + (Pr - pR)x + (Qr - qR) = 0;$$

und da man nun zwey neue Gleichungen (I.) und (II.) hat, von niedrigerem Grade, so behandle man diese gerade so wie die gegebenen; setze zur Abkürzung

$$'N,\ 'P,\ 'Q,\ 'n,\ 'p,\ 'q,$$

beziehlich statt:

$$Pn-pN,\ Qn-qN,\ Rn-rN,\ Nr-nR,\ Pr-pR,\ Qr-qR,$$

wo $'Q = -'n$, und hat dann:

$$\text{I.}\quad 'Nx^2+'Px+'Q = 0,$$
$$\text{II.}\quad 'nx^2+'px+'q = 0.$$

Hieraus:

$$\text{III.}\quad ('P'n-'p'N)x+('Q'n-'q'N) = 0$$

und

$$\text{IV.}\quad ('N'q-'n'Q)x+('P'q-'p'Q) = 0,$$

oder:

$$\text{III.}\quad ''Nx+''P = 0$$
$$\text{IV.}\quad ''nx+''p = 0,$$

woraus zuletzt:

$$''N''p-''n''P = 0$$

als Endgleichung ohne x hervorgeht.

Aber auch hier muß diese Endgleichung zwar die Eliminationsgleichung enthalten, dagegen kann und wird sie auch noch der Eliminationsgleichung fremde Faktoren in sich aufnehmen. (Vgl. §. 302.).

§. 526. Zusatz.

Ein fünftes Verfahren, um aus den beyden Gleichungen:

$$\mathfrak{A})\quad x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\cdots A_{m-1}x+A_m = 0,$$
$$\mathfrak{B})\quad x^n+B_1x^{n-1}+B_2x^{n-2}+B_3x^{n-3}+\cdots\cdots+B_n = 0,$$

den Unbekannten x zu elimíniren, ist folgendes:

Man nimmt zwey ganze Funktionen von x an:

$$\mathfrak{C})\quad x^{m-1}+\alpha_1x^{m-2}+\alpha_2x^{m-3}+\cdots+\alpha_{m-1},$$
$$\mathfrak{D})\quad x^{n-1}+\beta_1x^{n-2}+\beta_2x^{n-3}+\cdots+\beta_{n-1},$$

und sucht zu bewirken, daß $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$ wird, welches nach (§§. 423. 424.) geschieht, und $m+n-1$ Gleichungen gibt zwischen ihren Koeffizienten. Diese $m+n-1$ Gleichungen sind, in Bezug auf jeden der $(m-1)+(n-1)$ Unbestimmten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\alpha_{m-1},$

$\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n-1}$, einfache Gleichungen, und es können daher diese $m+n-2$ Unbestimmten aus ihnen leicht eliminirt werden, so daß zuletzt eine Gleichung zwischen den Koeffizienten $A_1, A_2, \cdots A_m, B_1, B_2, \cdots B_n$ übrig bleibt. — Ist nämlich

$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$, so ist auch $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$, und es haben also dann $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen gemeinschaftlichen Theiler vom ersten Grade, weil $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ um einen Grad niedriger sind als $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Allein auch diese Methode gibt nicht nothwendig die Eliminationsgleichung genau, und es müßten daher, sollte sie zweckdienlich seyn, auch für sie noch die Modifikationen angegeben werden, die zu beobachten sind, um gewiß seyn zu können, jedesmal auch wirklich die gesuchte Eliminationsgleichung genau zu haben, d. h. eine Gleichung, welche genau alle und nicht mehr Werthe von y enthält, als es Paare von Werthen gibt, die den beyden gegebenen Gleichungen zugleich genügen.

§. 527. Aufgabe.

Es sind gegeben drey höhere Gleichungen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

zwischen drey Unbekannten x, y, z, so daß die erste von der mten, die zweyte von der nten und die dritte von der pten Ordnung ist, man soll zwey der Unbekannten x und y eliminiren.

Auflösung I. 1) Man eliminire x aus $A = 0$ und $B = 0$; dann auch aus $A = 0$ und $C = 0$.

2) Aus den beyden Eliminationsgleichungen eliminire man dann noch y; so bekommt man die gesuchte Eliminationsgleichung, wenn man die Endgleichung zuvor von ihren fremden, zur Eliminationsgleichung nicht gehörigen Faktoren befreyt.

Auflösung II. 1) Man denke sich die Gleichungen $A = 0$ und $B = 0$ nach x und y aufgelöset, und die mn Paare von Werthen für x und y, durch die Buchstaben

$\alpha, \beta, \gamma, \cdots \mu, \nu$ für x

und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \cdots \mu_1, \nu_1$ für y bezeichnet.

2) Man setze jedes dieser mn Paare von Werthen für x und y in die dritte Gleichung $C = 0$, statt x und statt y, so entstehen mn neue Gleichungen, deren Produkt die gesuchte Eliminationsgleichung seyn muß. — Diese Eliminationsgleichung bekommt dann die Form

$$S[P_{a,b} \cdot P_{c,d} \cdot P_{e,f,} \cdots P_{m,n} \cdot \alpha^a \cdot \alpha_1^b \cdot \beta^c \cdot \beta_1^d \cdot \gamma^e \cdot \gamma_1^f \cdots \nu^m \cdot \nu_1^n] = 0,$$

wo $P_{a,b}$, $P_{c,d}$, $P_{e,f}$, ꝛc. ganze Funktionen von z sind.

3) Dieses Produkt ist aber offenbar eine symmetrische Funktion der Wurzelwerthe α, β, γ, $\cdots \mu$, ν, und α_1, β_1, γ_1, $\cdots \mu_1$, ν_1, und es können daher die vorkommenden Koeffizienten von z, durch die Koeffizienten der aus $A = 0$ und $B = 0$, durch Elimination erstlich von y, dann von x, gezogenen Eliminationsgleichungen, rational ausgedrückt werden, so daß die Eliminationsgleichung in z die unbekannten Wurzelwerthe α, β, γ, $\cdots \mu$, ν und α_1, β_1, γ_1, $\cdots \mu_1$, ν_1, nicht mehr enthält.

§. 528. Zusatz.

Die Eliminationsgleichung in z kann nicht den Grad mnp übersteigen. — Es gibt daher nie mehr als mnp zusammengehörige Werthe von x, y und z, welche allen gegebenen Gleichungen

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0,$$

zugleich genügen.

Anmerkung. Was über die Elimination zwischen mehr als drey höhern Gleichungen gesagt werden kann, ist leicht zu übersehen.

Zahlenlehre.

Zwey und zwanzigstes Kapitel.

Von den allgemeinen Wurzeln und von der allgemeinen Auflösung der Gleichungen.

Erste Abtheilung.

Von den allgemeinen Wurzeln.

§. 529. Lehrsatz.

Die m Wurzelwerthe der höhern Gleichung vom mten Grade:

$$x^m = a \quad \text{oder} \quad x^m - a = 0,$$

sind alle von einander verschieden (d. h. einander nicht gleich), den einzigen Fall ausgenommen, in welchem $a = 0$ ist, und in welchem alle m Wurzelwerthe selbst der Null gleich sind.

Beweis. Denn bezeichnet man die ganze Funktion $x^m - a$ durch $F(x)$, so ist

$$\partial F(x) = mx^{m-1},$$

und es haben daher $F(x)$ und $\partial F(x)$ keinen gemeinschaftlichen Faktor, folglich die gegebene Gleichung nach (§. 494.) keine gleichen Wurzelwerthe, wenn nicht $a = 0$ ist, in welchem Falle $F(x)$ und $\partial F(x)$ den gemeinschaftlichen Theiler x^{m-1} selbst haben, der dann einen mfachen Wurzelwerth $= 0$ anzeigt.

§. 530. Zusatz.

Ist in der höhern Gleichung

$$x^m = a \quad \text{oder} \quad x^m - a = 0,$$

der Koeffizient a eine Zahl von der Form $p+qi$, wo p und q Null oder positive oder negative Zahlen bedeuten, wo also a sowohl reel als auch imaginär seyn kann, so sind die m Wurzelwerthe dieser höhern Gleichung

$$x^m = a \quad \text{oder} \quad x^m - a = 0,$$

alle von der Form $p+qi$, und können sowohl reel als auch imaginär seyn (§. 481.).

§. 531. Erklärung.

Unter allgemeiner Wurzel verstehe man von nun an, jedes Zeichen von der Form

$$\sqrt[m]{a},$$

wo m eine beliebige ganze Zahl repräsentirt, a aber ein ganz beliebiges Zeichen; und man denke sich darunter jeden Ausdruck, der mit m potenzirt, a gibt; d. h. jeden Ausdruck, welcher statt x gesetzt, der Gleichung

$$x^m = a \quad \text{oder} \quad x^m - a = 0,$$

ein Genüge leistet.

Diesem erweiterten Begriffe der Wurzel gemäß, mögen auch die Begriffe des Radikanden und des Wurzel-Exponenten erweitert seyn.

§. 532. Zusatz.

Ist a von der Form $p+qi$, und nicht p und q zugleich Null, so repräsentirt die

$$\sqrt[m]{a},$$

m verschiedene Ausdrücke von derselben Form $p+qi$. — Daher muß auch im Allgemeinen, wo a ein ganz beliebiges Zeichen ist, die

$$\sqrt[m]{a},$$

als ein mdeutiges Zeichen angesehen werden, welches einen von

m verschiedenen Werthen repräsentiren kann, ohne daß, wenn solches nicht anderweitig hervorgeht, man wissen kann, welcher von den m verschiedenen Ausdrücken der in jedem besondern Fall durch die $\sqrt[m]{a}$ repräsentirte sey.

Aus diesem Grunde darf dieselbe $\sqrt[m]{a}$, wenn sie in einer Gleichung oder in einem Ausdruck wiederholt vorkommt, nicht für einen und denselben Ausdruck angesehen und behandelt werden, bevor man sich nicht überzeugt hat, daß solche auch jedesmal einen und denselben ihrer Werthe repräsentire.

Anmerkung. Man darf also nicht unbedingt setzen:

$$2\sqrt[m]{a} \quad \text{statt} \quad \sqrt[m]{a}+\sqrt[m]{a},$$

nicht $(p\pm q)\sqrt[m]{a}$ statt $p\sqrt[m]{a}\pm q\sqrt[m]{a}$,

nicht $(\sqrt[m]{a})^2$ statt $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{a}$;

nicht aus den Gleichungen

$\sqrt[m]{a}=\alpha$ und $\sqrt[m]{a}=\beta$, schließen, daß auch $\alpha=\beta$ sey; weil alles dieses voraussetzen würde, daß das Zeichen $\sqrt[m]{a}$, so oft es in einem solchen Ausdruck (oder in den letzten beyden Gleichungen selbst) vorkommt, jedesmal einen und denselben der m Ausdrücke vorstellt. die solches repräsentirt; was im Allgemeinen nicht immer nothwendig ist, und nicht eher angenommen werden darf, bevor man sich nicht erst in dem vorkommenden besondern Fall, besonders davon überzeugt hat.

Dies ist aber die einzige Vorsicht, die man bey dem Operiren mit Wurzeln anzuwenden hat, um jedesmal mit Nothwendigkeit richtige Resultate zu erhalten.

§. 533. Zusatz.

Aus der Definition der allgemeinen Wurzel folgt auch noch, daß die Formeln der Kapitel (V. und VI.), die dort für wirkliche Wurzeln aufgestellt und für reele Wurzeln erweitert worden sind, auch für diese allgemeinen Wurzeln gelten müssen, wenn man nur auch hier nicht übersieht, daß die vorkommenden Wurzeln vieldeutige Zeichen sind, welche zwar immer einen von mehrern bestimmten Ausdrücken repräsentiren, für welche

man aber nicht einen bestimmten dieser Ausdrücke setzen darf, bevor man sich nicht überzeugt hat, daß die Wurzel, für welche dieser bestimmte Ausdruck gesetzt wird, auch wirklich denselben und nicht gerade einen andern ihrer Werthe repräsentirt.

So z. B. gibt die Gleichung (I.)

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{(a^n)},$$

wenn m statt n gesetzt wird,

$$(\sqrt[m]{a})^m = \sqrt[m]{(a^m)}.$$

Der Ausdruck links hat nur einen Werth, denn welcher Werth auch statt $\sqrt[m]{a}$ gesetzt werde, so ist doch immer $(\sqrt[m]{a})^m = a$. Der Ausdruck rechts repräsentirt also von den m Werthen, welche $\sqrt[m]{(a^m)}$ hat, gerade diesen einzigen a, und wenn dieser dafür gesetzt ist, so hat man die Gleichung

$$(\sqrt[m]{a})^m = a,$$ welche richtig ist.

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, daß in allen Formeln, welche als wahr anerkannt und weiter gebraucht werden sollen, nicht Zeichen vorkommen dürfen, wie z. B. $a^{\frac{2}{3}}$, oder $a^{\frac{4}{3}}$, oder $a^{-\frac{2}{5}}$; deren Bedeutung noch gar nicht festgesetzt worden ist. Die Gültigkeit der Formeln des (Kap. V. und Kap. VI.) ist daher dahin zu berichtigen.

§. 534. Zusatz.

1) Ist m eine ungerade Zahl, so hat die $\sqrt[m]{a}$ jedesmal einen reelen Werth, wenn a reel ist, aber auch jedesmal nur einen einzigen; und dieser reele Werth ist positiv oder negativ oder der Null gleich, je nachdem a positiv oder negativ ist, oder der Null gleich. (Indirekt.)

2) Ist aber m eine gerade Zahl, so hat die $\sqrt[m]{a}$ zwey reele Werthe, $+\alpha$ und $-\alpha$, wenn a positiv, dagegen gar keinen reelen Werth, wenn a negativ ist; und ist $a = 0$, so ist auch $\sqrt[m]{a} = 0$. (Indirekt.)

3) Ist a nicht reel, so hat auch $\sqrt[m]{a}$ keinen reelen, sondern

lauter imaginäre Werthe, es mag m eine gerade oder eine ungerade Zahl seyn. (Indirekt.)

§. 535. Zusatz.

Ist A irgend einer der Werthe von $\sqrt[m]{a}$, so stellen

$$A \cdot \sqrt[m]{1} \quad \text{und} \quad A \cdot \sqrt[m]{-1}$$

alle m Werthe von

$$\sqrt[m]{a} \quad \text{und} \quad \sqrt[m]{-a}$$

vor.

§. 536. Zusatz.

Betrachtet man aber die Werthe der $\sqrt[m]{1}$ etwas näher, so findet man:

1) Ist m eine ungerade Zahl, so ist ein Werth dieser $\sqrt[m]{1}$, $= 1$, die übrigen sind alle imaginär und von der Form $p+qi$. — Ist aber m eine gerade Zahl, so ist einer der Werthe von $\sqrt[m]{1}$, $= +1$, ein zweyter $= -1$, und die übrigen sind alle imaginär.

2) Bezeichnet α einen Werth von $\sqrt[m]{1}$, oder, was dasselbe ist, einen Wurzelwerth der Gleichung $x^m - 1 = 0$ oder $x^m = 1$, so sind die Potenzen

$$\alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \alpha^4, \ldots \alpha^n,$$

wo n jede beliebige ganze Zahl vorstellt, ebenfalls Werthe von $\sqrt[m]{1}$; die aber zum Theil oder alle einander gleich seyn können. — Auch gilt der Satz noch, wenn n eine negative ganze Zahl oder auch 0 ist. —

Denn es ist allemal

$$(\alpha^n)^m = (\alpha^m)^n = 1^n = 1,$$

weil $\alpha^m = 1$ ist.

3) Ist aber α einer der m Werthe von $\sqrt[m]{1}$, welcher nicht $= 1$, und auch nicht zugleich ein Werth einer niedrigern Wurzel z. B. $\sqrt[\mu]{1}$ (wo $\mu < m$) ist, so enthält die Reihe

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3, \ldots \alpha^{m-1},\ \alpha^m,\ \text{oder } 1,$$

auch alle m verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{1}$. —

Denn wären unter diesen Potenzen zwey derselben, z. B. α^p und α^q einander gleich, wo p und q von einander verschieden, und jede $\leqq m$ ist, so wäre $\alpha^p = \alpha^q$ und $\alpha^{p-q} = 1$, oder $\alpha^{q-p} = 1$; dabey aber auf jeden Fall $p-q$ oder $q-p$ kleiner als m; folglich wäre α ein Werth der niedrigern Wurzel $\sqrt[p-q]{1}$ oder $\sqrt[q-p]{1}$, was gegen die Voraussetzung ist.

4) Sind $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^m$ oder 1, Werthe der Wurzel $\sqrt[m]{1}$, so sind

$$\alpha^{mn+1},\ \alpha^{mn+2},\ \alpha^{mn+3} \ldots \alpha^{mn+m},$$

beziehlich dieselben Werthe der Wurzel $\sqrt[m]{1}$, wo n irgend einer Differenz ganzer Zahlen gleich seyn kann.

Denn es ist immer

$$\alpha^{mn+p} = (\alpha^m)^n \cdot \alpha^p = 1^n \cdot \alpha^p = \alpha^p.$$

5) Das Produkt je zweyer oder mehrer der m Werthe der Wurzel $\sqrt[m]{1}$, ist immer selbst wieder ein Werth derselben Wurzel $\sqrt[m]{1}$. — Eben so ist auch der Quotient zweyer solchen Werthe von $\sqrt[m]{1}$, selbst wieder einer dieser Werthe.

6) Ist p eine positive oder negative ganze Zahl, und sind

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3, \ldots \alpha^m \text{ oder } 1,$$

die m Werthe von $\sqrt[m]{1}$, oder die m Wurzelwerthe der höhern

Gleichung $x^m - 1 = 0$, und bedeutet nach (§. 383.)

$$S\left[(\alpha^{a+1})^p\right]_{a+b=m-1}$$

die Summe $\alpha^p + (\alpha^2)^p + (\alpha^3)^p + \cdots + (\alpha^m)^p$,

so ist allemal:

$S\left[(\alpha^{a+1})^p\right]_{a+b=m-1} = 0$, wenn p (absolut genommen) kein Vielfaches von m ist, dagegen

$S\left[(\alpha^{a+1})^p\right]_{a+b=m-1} = m$, wenn p (absolut genommen) ein Vielfaches von m, oder m selber ist.

Ist nämlich p eine absolute ganze Zahl, so erhellet der Satz unmittelbar aus der Ansicht des Newton'schen Lehrsatzes (§. 490.). — Ist aber p eine negative ganze Zahl $-q$: so setze man in $x^m - 1 = 0$, $\frac{1}{z}$ statt x, und man erhält die Gleichung $z^m - 1 = 0$, deren m Wurzelwerthe

$$\frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{1}{\alpha^3} \cdots \frac{1}{\alpha^m} \quad \text{oder } 1,$$

oder, weil α^m statt 1 gesetzt werden kann,

$$\alpha^{m-1}, \quad \alpha^{m-2}, \quad \alpha^{m-3}, \cdots \alpha^0 \quad \text{oder } 1$$

sind, so daß für diese Wurzelwerthe

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^q + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^q + \left(\frac{1}{\alpha^3}\right)^q + \cdots + \left(\frac{1}{\alpha^m}\right)^q = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{oder } m \end{pmatrix},$$

d. h. $$\alpha^p + (\alpha^2)^p + (\alpha^3)^p + \cdots (a^m)^p = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{oder } m \end{pmatrix}$$

ist, je nachdem q kein Vielfaches von m, oder ein Vielfaches von m (oder m selber) ist.

7) Die beyden Werthe von $\sqrt[2]{1}$ sind:

$+1$ und -1 (§. 237.).

8) Die drey Werthe von $\sqrt[3]{1}$ sind dagegen:

$$1, \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}, \quad -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3},$$

nach (§. 271.), wo $\sqrt{3}$, so oft sie vorkommt, ihren absoluten Werth vorstellt.

9) Die vier Werthe der $\sqrt[4]{1}$ sind ferner:

$$+1, \quad -1, \quad +i, \quad -i, \quad (\S.\ 296.).$$

10) Die fünf Werthe der $\sqrt[5]{1}$ sind endlich:

$$1, \quad -\frac{1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}; \quad -\frac{1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4};$$

$$-\frac{1-\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \quad -\frac{1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$

wo alle Wurzeln ihre absoluten Werthe vorstellen.

Dividirt man nämlich die Gleichung $x^5-1=0$, weil 1 einer ihrer Wurzelwerthe ist, mit $x-1$, so ergibt sich zur Bestimmung der übrigen 4 Wurzelwerthe die Gleichung $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, welche nach (§. 297.) aufgelöset wird, und dann die hier mitgetheilten 4 übrigen Wurzelwerthe gibt.

§. 537. Zusatz.

Untersucht man auf dieselbe Art auch die m Werthe von $\sqrt[m]{-1}$, oder die m Wurzelwerthe der Gleichung $x^m=-1$, oder $x^m+1=0$, so findet man ähnliche Sätze:

1) Ist m eine gerade Zahl, so sind alle m Werthe imaginär, und ist m eine ungerade Zahl, so ist einer der Werthe $=-1$, die übrigen dagegen sind imaginär.

2) Ist α einer der Werthe von $\sqrt[m]{-1}$, so sind die ungeraden Potenzen

$$\alpha, \quad \alpha^3, \quad \alpha^5, \quad \alpha^7, \ldots \alpha^{2p+1},$$

ebenfalls Werthe von $\sqrt[m]{-1}$; dagegen sind die geraden Potenzen

$$\alpha^2, \quad \alpha^4, \quad \alpha^6, \quad \alpha^8 \ldots \alpha^{2p},$$

jedesmal Werthe von $\sqrt[m]{1}$, und nicht von $\sqrt[m]{-1}$. — Denn es ist

$$(\alpha^{2p+1})^m = (\alpha^m)^{2p+1} = (-1)^{2p+1} = -1;$$

dagegen $(\alpha^{2p})^m = (\alpha^m)^{2p} = (-1)^{2p} = +1.$

3) Das Produkt aus einer ungeraden Anzahl von Werthen der $\sqrt[m]{-1}$, ist jedesmal selbst wieder ein Werth derselben $\sqrt[m]{-1}$; dagegen ist das Produkt aus einer geraden Anzahl der Werthe von $\sqrt[m]{-1}$, nicht mehr ein Werth derselben $\sqrt[m]{-1}$, sondern allemal ein Werth von $\sqrt[m]{1}$.

4) Bedeutet $S\left[\begin{smallmatrix} x_a^p \\ a+b=m-1 \end{smallmatrix}\right]$ nach (§. 477.) noch immer die Potenzsumme

$$x_0^p + x_1^p + x_2^p + \cdots + x_{m-1}^p,$$

wo $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{m-1}$, die Werthe von $\sqrt[m]{-1}$, oder die m Wurzelwerthe der Gleichung $x^m+1=0$ seyn mögen, und ist dabey p eine ganze positive oder eine ganze negative Zahl, so ist allemal auch hier:

$S\left[\begin{smallmatrix} x_a^p \\ a+b=m-1 \end{smallmatrix}\right] = 0$, wenn p kein Vielfaches von m, dagegen

$S\left[\begin{smallmatrix} x_a^p \\ a+b=m-1 \end{smallmatrix}\right] = m$, wenn p ein Vielfaches von m, oder m selber ist.

5) Die beyden Werthe von $\sqrt[2]{-1}$ oder $\sqrt{-1}$ sind:

$$+i \quad \text{und} \quad -i. \qquad (\S.\ 322.)$$

6) Die drey Werthe von $\sqrt[3]{-1}$ sind dagegen:

$$-1, \quad \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

7) Die vier Werthe der Wurzel $\sqrt[4]{-1}$ sind:

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+i), \quad -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-i),$$
$$+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+i), \quad +\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-i),$$

weil $x^4+1 = [x^2+(\sqrt{2})x+1][x^2-(\sqrt{2})x+1]$ ist.

8) Die fünf Werthe von $\sqrt[5]{-1}$ sind endlich (§. 395.):

$$-1;\quad \frac{1-\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{1-\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{1+\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{1+\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

§. 538. Aufgabe.

Es ist gegeben eine Bestimmungsgleichung $P = 0$, in welcher eine Wurzel $\sqrt[m]{a}$ vorkommt, wo a einen beliebigen von den Unbekannten abhängigen oder unabhängigen Ausdruck bedeuten mag. Man soll aus dieser Gleichung $P = 0$ diese Wurzel $\sqrt[m]{a}$ eliminiren, d. h. eine Gleichung ableiten, welcher noch durch dieselben Werthe der Unbekannten genügt wird, durch welche der gegebenen genügt wurde, in der aber diese Wurzel $\sqrt[m]{a}$ nicht mehr vorkommt.

Auflösung. Man nehme einen in der gegebenen Gleichung $P = 0$ nicht vorkommenden Buchstaben t, setze t statt $\sqrt[m]{a}$ in die gegebene Gleichung $P = 0$, und eliminire dann dieses t aus den beyden Gleichungen:

$$P = 0 \quad \text{und} \quad t^m - a = 0,$$

so ist die Eliminationsgleichung die gesuchte.

§. 539. Zusatz.

Ist die gegebene Gleichung $P = 0$ eine höhere Gleichung vom nten Grade mit einem Unbekannten x, so kann die durch Wegschaffung von $\sqrt[m]{a}$ entstehende Gleichung höchstens vom Grade mn seyn (§. 517.).

Anmerkung 1. Bedenkt man, daß $\sqrt[m]{a}$ in der gegebenen Gleichung $P = 0$, jeden ihrer m Werthe vorstellen kann, so folgt, daß die Eliminationsgleichung dieselbe wird für m verschiedene Gleichungen $P = 0$. Hat daher in jeder dieser Gleichungen $P = 0$, der Unbekannte x, n Werthe, so hat x in allen m Gleichungen $P = 0$,

nothwendig im Allgemeinen mn Werthe; welche der Unbekannte x in der Eliminationsgleichung haben muß.

Anmerkung 2. Träfe es sich, daß die $\sqrt[m]{a}$ in der Gleichung $P = 0$, z. B. zweymal vorkäme, und jedesmal einen andern der Werthe repräsentiren könnte, so müßte man den einen Werth durch t, den andern durch u bezeichnen, wo t und u, der Gleichung $P = 0$ fremde Buchstaben seyn müssen, und dann t und u aus den 3 Gleichungen

$$P = 0, \quad t^m - a = 0, \quad u^m - a = 0,$$

eliminiren, um die für diesen Fall gesuchte Gleichung zu haben, welche die $\sqrt[m]{a}$ nicht mehr enthält.

§. 540. Zusatz.

Aber gerade so, wie eine Wurzel $\sqrt[m]{a}$ aus einer gegebenen Gleichung eliminirt wird, kann man auch beliebig viele solcher Wurzeln, sowohl mit einerlei als auch mit verschiedenen Wurzel-Exponenten eliminiren, und dann auch jedesmal den Grad der Eliminations-Gleichung bestimmen, über den die entstehende Gleichung nicht hinausgehen kann, wenn die gegebene Gleichung $P = 0$ eine höhere Gleichung ist.

Anmerkung. Man kann eine Wurzel $\sqrt[m]{a}$ auch dadurch eliminiren, daß man die Gleichung nach dieser Wurzel auflöset, und nachher auf beyden Seiten mit m potenzirt. — Die Gleichung selbst braucht aber zu diesem Behufe nicht einmal aufgelöset zu seyn, wenn sie nur auf die Form

$$\frac{A \cdot \sqrt[m]{a}}{B} = C$$

gebracht worden ist.

Zweyte Abtheilung.

Ueber die Auflösung allgemeiner höherer Gleichungen von jedem Grade.

Vorerinnerung.

Offenbar kommt es bey dem allgemeinen Auflösen der höhern Gleichungen darauf an, die Wurzelwerthe derselben, von andern Gleichungen eines niedrigern Grades abhängig zu machen. — Die quadratische Gleichung hängt ab, von dem Auflösen einfacher Gleichungen. — Die kubische Gleichung wurde (§. 272.) dadurch aufgelöset, daß sie von einer Gleichung vom zweyten Grade abhängig gemacht wurde. — Die Gleichung des vierten Grades wurde aufgelöset (§. 297.), indem ihre Wurzelwerthe von Gleichungen vom dritten und zweyten Grade abhängig gemacht wurden. — Wollte man daher Gleichungen des fünften, sechsten und überhaupt eines höhern Grades auflösen, so müßte man dieselbe Verfahruugsart anwenden. Allein, obgleich die vorzüglichsten Mathematiker ihre Kräfte daran wendeten, so haben doch die verschiedenen Wege, durch welche man zur Auflösung einer jeden höhern Gleichung zu gelangen versuchte, immer nur wieder die Auflösungen des dritten und vierten Grades geliefert, ohne sich nur zur Auflösung des nächstfolgenden Grades mit Erfolg anwenden zu lassen. Wir verweisen daher auf die trefflichen Arbeiten von Bezout, Euler, La Grange und Andern, und führen nur noch einige der Methoden, die versucht worden sind, zur Uebersicht an.

Der Beweis des Ruffini, daß für höhere Gleichungen, die über den vierten Grad hinausgehen, eine geschlossene (endliche) Formel für den Unbekannten nicht existire, ist hier abermals weggelassen worden: weil er uns mehre schwache Stellen zu haben, und in der That nichts zu beweisen scheint, so viel Scharfsinn sich auch in ihm entwickelt findet.

§. 541. Tschirnhausen'sche Auflösungsmethode.

Die Methode, welche Tschirnhausen gebraucht, ist auf die Gleichungen vom dritten und vierten Grade angewandt, folgende:

I. Wenn die aufzulösende Gleichung vom dritten Grade ist:

$$z^3+pz^2+qz+r=0 \quad \cdots(1).$$

Man setzt $z^2+bz+(x+a)=0 \quad \cdots(2)$,

und eliminirt z aus (1.) und (2.), um eine Gleichung in x zu erhalten, welche nothwendig vom dritten Grade werden, und die Form

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0 \quad \cdots(3)$$

bekommen muß, nach (§. 516.).

Nun setzt man $A=0$ und $B=0$, und bestimmt daraus die Werthe von a und b, so wie aus $x^3+C=0$, die drey Werthe von x, alles durch die Koeffizienten p, q und r ausgedrückt. Hierauf substituirt man zusammengehörige Werthe von a, b und x in die Gleichung (2.), und sucht nachher zwischen (1.) und (2.) den größten gemeinschaftlichen Theiler in z. — Dieser der Null gleich gesetzt, gibt dann einen Werth von z, welcher ein Wurzelwerth der gegebenen Gleichung (1.) seyn muß.

Der Erfolg dieser Methode hängt davon ab, ob sich die beyden Gleichungen $A=0$ und $B=0$, nach a und b auflösen lassen; welches hier der Fall ist.

Man konnte auch statt der Gleichung (2.) die noch allgemeinere $cz^2+bz+(x+a)=0$ nehmen, und nachher in Bezug auf die Willkührlichkeit eines dieser Koeffizienten, eine für die Rechnung bequeme willkührliche Annahme [etwa $(=1)$, wie Bezout gethan] machen, wie von Euler geschehen ist.

II. Wenn aufzulösen ist, die Gleichung vom vierten Grade:

$$z^4+pz^3+qz^2+rz+s=0 \quad \cdots(1).$$

Man setzt $z^3+cz^2+bz+(x+a)=0 \quad \cdots(2)$, und eliminirt z aus (1.) und (2.). Dadurch erhält man nach (§. 516.)

nothwendig eine Gleichung in x vom vierten Grade von der Form:

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0 \quad \cdots(3).$$

In dieser Gleichung setzt man nun:

$$A=0 \text{ und } B=0 \text{ und } C=0,$$

und bestimmt daraus a, b und c, so wie dann aus:

$$x^4+D=0,$$

noch x durch p, q, r und s ausgedrückt; setzt zusammengehörige Werthe von a, b, c und x in die Gleichung (2.), und sucht dann zwischen (1.) und (2.) den größten gemeinschaftlichen Theiler in z. — Dieser der Null gleich gesetzt, gibt dann einen Werth von z, welcher der gegebenen Gleichung (1.) genügt.

Weil es aber hier schon schwerer seyn dürfte, aus $A=0$, $B=0$, $C=0$, die Unbestimmten a, b, c zu bestimmen; da ferner x aus (3.) schon gefunden werden kann, wenn nur $A=0$ und $C=0$ ist, so konnte man statt der Gleichung (2.) auch diese nehmen:

$$z^2+bz+(x+a)=0 \quad \cdots(4),$$

dann durch Elimination von z zwischen (1.) und (4.) die Gleichung

$$x^4+A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1=0 \quad \cdots(5),$$

ableiten, nachgehends $A_1=0$ und $C_1=0$ setzen, daraus a und b, und zuletzt aus

$$x^4+B_1x^2+D_1=0,$$

auch x finden; ein System der Werthe von a, b und x in (4.) substituiren, und endlich zwischen (1.) und (4.) den größten gemeinschaftlichen Theiler in z suchen, und diesen $=0$ setzen, um wenigstens einen Wurzelwerth der gegebenen Gleichung (1.) zu erhalten.

Man kann aber in beyden Fällen in den Gleichungen (2.) und (4.), der höchsten Potenz von z ebenfalls einen unbestimmten Koeffizienten d geben, um nachgehends noch eine beliebige Annahme machen, und dadurch die Rechnungen vereinfachen oder leichter übersehen zu können.

Anmerkung. Daß und wie man diese Methode auf Gleichungen von jedem Grade anwenden könne, fällt in die Augen. Daß sie aber nicht einmal auf eine Gleichung vom 5ten Grade mit Erfolg angewandt werden kann, liegt darin, weil die Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ ꝛc. ꝛc. zur Bestimmung der eingeführten Unbestimmten a, b, c, d, ꝛc. selbst auf einen höhern Grad steigen, der ihre allgemeine Auflösung nicht mehr verstattet.

§. 542. Zweyte Methode.

Die (§. 272.) angewandte Methode, die Auflösung der kubischen Gleichungen zu erhalten, hat La Grange auch auf die Gleichungen vom 4ten Grade ausgedehnt. Um also die Gleichung

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

aufzulösen, setze man

$$z = x + y + u,$$

und zerlege die entstehende Gleichung [durch Nullsetzung der Glieder, welche $(x + y + u)$ und $(xy + xu + yu)$ zum Faktor haben] in drey andere, aus denen nachgehends x, y und u, folglich dann auch z gefunden wird.

§. 543. Methode des La Grange.

I. Wenn aufzulösen ist die Gleichung vom dritten Grade:

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0.$$

Man bezeichne die drey Wurzelwerthe derselben durch a, b, c, und bilde sich mittelst unbestimmter Koeffizienten l, m, n, eine Funktion $la + mb + nc$, so wie alle durch Vertauschung der Elemente a, b, c, aus dieser hervorgehenden Funktionen:

1) $la + mb + nc$,
2) $lc + ma + nb$,
3) $lb + mc + na$,
4) $lb + ma + nc$,
5) $lc + mb + na$,
6) $la + mc + nb$,

Ferner bilde man nach (§. 513.) eine Gleichung in x, welche diese sechs Funktionen von a, b und c, zu Wurzelwerthen hat, welche also vom 6ten Grade seyn wird; bestimme aber die Unbestimmten l, m und n so, daß diese Gleichung vom 6ten Grade

in x die Form

$$x^6+Ax^3+B=0 \quad \ldots\ldots (2)$$

bekommt, folglich nach x^3 (§. 242.) aufgelöset werden kann. — Sind nun α, α^2 und α^3 (oder 1) die drey Werthe von der $\sqrt[3]{1}$, so können diese 6 Werthe von x dargestellt werden, durch x_1, $\alpha \cdot x_1$, $\alpha^2 \cdot x_1$, und x_2, $\alpha \cdot x_2$, $\alpha^2 \cdot x_2$. Dann hat man die drey Gleichungen

$$la+mb+nc=x_1; \quad lb+ma+nc=x_2 \quad \text{und} \quad a+b+c=-p,$$

aus denen, in so ferne l, m, n bestimmt, und die Gleichungen selbst in Bezug auf a, b, c einfache sind, diese Unbekannten a, b, c ohne weiteres gefunden werden können. — Dies mag nun hier näher aus einander gesetzt werden, und zwar der Einfachheit wegen, für $p=0$.

Dann ist

$$a+b+c=0, \quad ab+ac+bc=q \quad \text{und} \quad abc=-r,$$

und dabey l, m, n, so zu bestimmen, daß

$$\alpha^2(la+mb+nc)=\alpha(lc+ma+nb)=lb+mc+na,$$

$$\text{und } \alpha^2(lb+ma+nc)=\alpha(lc+mb+na)=la+mc+nb,$$

welchen Gleichungen Genüge zu leisten getrachtet werden muß. Dies geschieht aber, indem man einzeln die Koeffizienten von a, b und c einander gleich setzt, wodurch man erhält:

$$\alpha^2 l=\alpha m=n; \quad \alpha^2 m=\alpha n=l; \quad \alpha^2 n=\alpha l=m,$$

weshalb einer der Unbestimmten noch beliebig genommen werden kann. Setzt man daher $n=1$, so erhält man:

$$l=\alpha, \quad m=\alpha^2, \quad n=1.$$

Unter dieser Annahme der Unbestimmten l, m, n, wird also die Gleichung in x die Form bekommen:

$$x^6+Ax^3+B=0;$$

und dabey wird:

$$A=-\overset{3}{C} \quad \text{und} \quad B=\overset{6}{C},$$

wenn die Kombinationsklassen aus den 6 Elementen

$$\alpha a+\alpha^2 b+c,\quad \alpha c+\alpha^2 a+b,\quad \alpha b+\alpha^2 c+a,$$
$$\alpha b+\alpha^2 a+c,\quad \alpha c+\alpha^2 b+a,\quad \alpha a+\alpha^2 c+b,$$

entwickelt werden. Weil aber auch $-A = x_1^3+x_2^3$ und $B = x_1^3 \cdot x_2^3$ seyn muß, so kann man A und B noch leichter bestimmen, indem man bemerkt, daß die durch x_1 und x_2 bezeichneten Wurzelwerthe beziehlich sind $\alpha a+\alpha^2 b+c$ und $\alpha^2 a+\alpha b+c$. Dann hat man

$$\begin{aligned}-A &= (\alpha a+\alpha^2 b+c)^3+(\alpha^2 a+\alpha b+c)^3\\ &= 2(a^3+b^3+c^3)+12abc-3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c\\ &\qquad +bc^2)\\ &= -27r,\end{aligned}$$

wie sich sogleich ergibt, wenn man bemerkt, daß

$$a+b+c = 0 \quad \text{und} \quad \alpha+\alpha^2+1 = 0 = 1+\alpha^4+\alpha^2$$

und $\alpha^3 = \alpha^6 = 1$ ist.

Ferner wird

$$\begin{aligned}B = x_1^3 \cdot x_2^3 &= (x_1 \cdot x_2)^3 = [(\alpha a+\alpha^2 b+c)(\alpha^2 a+\alpha b+c)]^3\\ &= [(a^2+b^2+c^2)-(ab+ac+bc)]^3\\ &= [(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)]^3 = (-3q)^3 = -27q^3.\end{aligned}$$

Die Gleichung in x, deren Wurzelwerthe

$$x_1,\quad \alpha x_1,\quad \alpha^2 x_1,\quad x_2,\quad \alpha x_2 \quad \text{und} \quad \alpha^2 \cdot x_2$$

sind, ist daher:

$$x^6+27r \cdot x^3-27q^3 = 0;$$

woraus sich ergibt:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}r+\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2+\tfrac{1}{27}q^3}}$$

und

$$x_2 = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}r-\sqrt{\tfrac{1}{4}r^2+\tfrac{1}{27}q^3}},$$

wo die Quadrat- und die Kubik-Wurzel jedesmal einen bestimmten ihrer Werthe vorstellt.

Ist aber x_1 und x_2 gefunden, so hat man:

$$\alpha a+\alpha^2 b+c = x_1 \quad \text{und} \quad \alpha_2 a+\alpha b+c = x_2$$
$$\text{und} \quad a+b+c = 0;$$

daher $a = \frac{\alpha^2 x_1 + \alpha x_2}{3}$, $b = \frac{\alpha x_1 + \alpha^2 x_2}{3}$, $c = \frac{x_1 + x_2}{3}$.

Nun muß noch untersucht werden, welche der 6 Werthe von x, für x_1 und x_2 genommen werden müssen, und genommen werden dürfen. Zu diesem Zwecke muß man die Werthe von a und b und c in die gegebene Gleichung $z^3 + qz + r = 0$ statt z substituiren, und nun diejenigen Werthe für x_1 und x_2 nehmen, für welche diese Gleichung dadurch identisch wird. Dann findet man, daß dies der Fall ist, wenn $x_1 \cdot x_2 = -3q$; welches die einzige Bedingung ist, die beobachtet werden muß, wenn man hier jedesmal die 3 Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung erhalten will.

II. Wenn die Gleichung vom 4ten Grade

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

aufgelöset werden soll.

Man bezeichne die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung durch a, b, c, d, und bilde eine neue Gleichung in x, welche zu Wurzelwerthen hat, die Funktion ka + lb + mc + nd, und alle durch beliebige Versetzung der Wurzelwerthe a, b, c, d, aus ihr hervorgehenden Funktionen; weshalb solche Gleichung in x vom 24sten Grade seyn wird. Man muß nun die Unbestimmten k, l, m, n, so annehmen, daß diese Gleichung in x sich auf einen niedrigern Grad reduzirt.

Dies geschieht aber, wenn $k = l = 1$ und $m = n = -1$ genommen wird, weil aus a, b, c, d, nur 6 verschiedene Funktionen von der Form (a + b) — (c + d) gebildet werden können, von denen je zwey einander gleich, aber mit dem entgegengesetzten (+)- oder (—)-Zeichen versehen sind, so daß die Gleichung in x, welche diese 6 Wurzelwerthe hat, in Bezug auf x^2 nur vom 3ten Grade seyn, ihre Auflösung daher vorausgesetzt werden kann. — Setzt man $x^2 = y$, so wird die Gleichung in y die Form haben:

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0;$$

und dabey wird seyn:

$$A = -[(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+(a+d-b-c)^2];$$
$$B = (a+b-c-d)^2\cdot(a+c-b-d)^2+(a+b-c-d)^2 \cdot(a+d-b-c)^2+(a+c-b-d)^2\cdot(a+d-b-c)^2;$$
$$C = -(a+b-c-d)^2\cdot(a+c-b-d)^2\cdot(a+d-b-c)^2.$$

Es ist aber bequemer, die Rechnungen auf folgende Art auszuführen. — Es ist nämlich: $a+b+c+d = 0$, und

1) $(a+b-c-d)^2$
$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2cd-2ac-2ad-2bc-2bd$
$= (a+b+c+d)^2-4ac-4ad-4bc-4bd$
$= -4(ac+ad+bc+bd) = -4p+4ab+4cd.$

Eben so:

2) $(a+c-b-d)^2 = -4p+4ac+4bd$ und

3) $(a+d-b-c)^2 = -4p+4ad+4bc.$

Folglich die Gleichung in y:

$(y+4p-4ab-4cd)(y+4p-4ac-4bd)(y+4p-4ad-4bc)$
oder $[u-(ab+cd)]\cdot[u-(ac+bd)]\cdot[u-(ad+bc)] = 0,$
wenn man $y+4p = 4u$ setzt. Setzt man diese Gleichung in u, so wie folgt, nämlich

$$u^3+A_1\cdot u^2+B_1\cdot u+C_1 = 0,$$

so hat man:

$$A_1 = -(ab+cd+ac+bd+ad+bc) = -p;$$
$$B_1 = (ab+cd)\cdot(ac+bd)+(ab+cd)(ad+bc)+(ac+bd)\cdot(ad+bc);$$

und dies gibt $B_1 = -4r$, nach (§. 490.). — Endlich ist

$$-C_1 = -(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$$
$$= (a^3bcd+ab^3cd+abc^3d+abcd^3)+(a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2).$$

Der erste Summand ist $= -2pr$; der zweyte dagegen, nach (§. 490.) $= -2pr+q^2$; folglich $C_1 = 4pr-q^2$, und die Gleichung in u ist $u^3-pu^2-4ru+(4pr-q^2) = 0$.
Bezeichnet man die drey Wurzelwerthe derselben durch u_1, u_2 und u_3, so hat man aus (Nr. 1., Nr. 2. und Nr. 3.):

$$\left.\begin{aligned}(a+b-c-d)^2 &= 4(u_1-p)\\ (a+c-b-d)^2 &= 4(u_2-p)\\ (a+d-b-c)^2 &= 4(u_3-p)\end{aligned}\right\}\text{folglich}\left\{\begin{aligned}a+b-c-d &= 2\sqrt{u_1-p}\\ a+c-b-d &= 2\sqrt{u_2-p}\\ a+d-b-c &= 2\sqrt{u_3-p}\end{aligned}\right. \quad (\odot)$$

welche drey Gleichungen, in Verbindung mit $a+b+c+d=0$, die vier Wurzelwerthe a, b, c, d, bestimmen. Sie geben:

$$\left.\begin{aligned}a &= \tfrac{1}{2}(+\sqrt{u_1-p}+\sqrt{u_2-p}+\sqrt{u_3-p})\\ b &= \tfrac{1}{2}(+\sqrt{u_1-p}-\sqrt{u_2-p}-\sqrt{u_3-p})\\ c &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u_1-p}+\sqrt{u_2-p}-\sqrt{u_3-p})\\ d &= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{u_1-p}-\sqrt{u_2-p}+\sqrt{u_3-p})\end{aligned}\right. \quad (\mathbb{C})$$

wo die Quadratwurzeln jedesmal einen und denselben ihrer beyden Werthe vorstellen, während aber noch unbestimmt geblieben ist, welcher jedesmal der zu nehmende sey. Um dies zu bestimmen, muß man den Werth von a, nämlich

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{u_1-p}+\sqrt{u_2-p}+\sqrt{u_3-p})$$

nehmen, und ihn statt z in die gegebene Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r=0$$

setzen, und nun die Bedingungen bemerken, unter denen diese Gleichung identisch wird. Damit man aber ganz sicher seyn kann, alle Bedingungen hinsichtlich der jedesmal zu nehmenden Werthe der Wurzeln zu haben, muß man entweder nachsehen, ob nicht, wenn man b, c und auch d statt z setzt, dadurch noch neue Bedingungen entstehen, oder man muß auf einem andern Wege nachweisen, daß diese letztern Substitutionen keine von der erst erhaltenen verschiedene Bedingung liefern können.

Man kann aber diese Bedingungen auf folgendem einfachen Wege zu finden versuchen. — Es seyen nämlich α, β und γ gerade die für $\sqrt{u_1-p}$, $\sqrt{u_2-p}$ und $\sqrt{u_3-p}$ zu nehmenden Werthe, so sind die 4 Wurzelwerthe der Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r=0$$

folgende:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma),\quad \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta-\gamma),\quad \tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta-\gamma),\quad \tfrac{1}{2}(-\alpha-\beta+\gamma).$$

Sind aber α, β und γ, Werthe der oben bemerkten Quadratwurzeln, so sind $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$, die zweyten Werthe derselben Wurzeln, und man kann nun leicht folgende Bemerkung machen:

1) Setzt man in den vier Ausdrücken (C) statt zwey der Werthe α, β und γ, die andern $-\alpha$, $-\beta$ oder $-\gamma$, so ergeben sich dieselben Ausdrücke (C) wieder, nur in anderer Ordnung.

2) Setzt man aber in (C) statt eines oder statt aller drey der Werthe α, β, γ, die andern $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$, so erhält man zwar wiederum dieselben Ausdrücke (C), aber jeder ist dann mit dem (—)-Zeichen versehen, so daß wenn die Ausdrücke in (C) bezeichnet sind durch

$$\Phi, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \Phi_3,$$

die jetzigen seyn werden:

$$-\Phi, \quad -\Phi_1, \quad -\Phi_2, \quad -\Phi_3.$$

Da nun, nach der Annahme, Φ statt z gesetzt, der Gleichung $z^4+pz^2+qz+r=0$ genügt, so wird $-\Phi$ statt z gesetzt, nothwendig der andern Gleichung $z^4+pz^2-qz+r=0$ genügen. Daraus folgt aber:

3) Welche der beyden Werthe man in den Ausdrücken für a, b, c und d statt $\sqrt{u_1-p}$, $\sqrt{u_2-p}$, nnd $\sqrt{u_3-p}$ setzen mag, so hat man doch immer entweder die Wurzelwerthe der Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r=0,$$

oder doch die Wurzelwerthe dieser andern Gleichung

$$z^4+pz^2-qz+r=0;$$

und es bleibt daher nur noch übrig, die Bedingung aufzusuchen, durch welche man in den Stand gesetzt ist, diese beyden Fälle jedesmal von einander unterscheiden zu können.

Nun findet sich aber, wenn man die drey Gleichungen (⊙) mit einander multiplizirt,

$$\sqrt{u_1-p}\cdot\sqrt{u_2-p}\cdot\sqrt{u_3-p}=-q. \qquad (♂)$$

Im Falle die Wurzelwerthe der andern Gleichung z^4+pz^2-qz+r gefunden werden sollten, müßte man daher die Werthe der Wurzeln $\sqrt{u_1-p}$, $\sqrt{u_2-p}$, $\sqrt{u_3-p}$ so nehmen, daß ihr Produkt

$$\sqrt{u_1-p}\cdot\sqrt{u_2-p}\cdot\sqrt{u_3-p}=+q \quad \text{wird.}$$

Und weil keine weitere Bedingung statt finden kann, so ist die Bedingung (♂) die einzige, welche hinsichtlich der Werthe der Wurzeln $\sqrt{u_1-p}$, $\sqrt{u_2-p}$, $\sqrt{u_3-p}$, in besondern Fällen zu beobachten ist, wenn man in den obigen Ausdrücken für a, b, c und d die Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung vom 4ten Grade mit Nothwendigkeit erhalten will.

Anmerkung 1. Es scheint nicht unnöthig zu seyn, hier ausdrücklich noch darauf aufmerksam zu machen, daß bey dieser allgemeinen Auflösung der Gleichungen, die Koeffizienten p, q, r ganz allgemeine Ausdrücke sind, die eben so gut reel als auch imaginär, und im letztern Fall von der bis jetzt bekannten Form $\psi+\psi_1\cdot i$, oder von einer ganz unbekannten Form seyn können. Bey allen solchen allgemeinen Arbeiten kann daher nie die Rede seyn von positiven oder negativen Werthen, ja auch nie von imaginären; weil, um das eine oder das andere zu erkennen, immer schon bestimmte Zifernwerthe, also nicht mehr allgemeine Ausdrücke vorausgesetzt seyn müssen.

Anmerkung 2. Das in diesem Paragraphen angedeutete Verfahren des La Grange läuft darauf hinaus, nicht die Wurzelwerthe der aufzulösenden Gleichung selbst, sondern gewisse Funktionen von ihnen zu finden, z. B. la+mb+nc, oder a+b−c−d, u. s. w. f.; und dann aus den gefundenen Werthen dieser Funktionen, die Wurzelwerthe selbst abzuleiten. — Deshalb können diese Funktionen beliebig angenommen werden, nur so, daß die Gleichung, welche sie bestimmt, auf einen niedrigern Grad gebracht werden kann, als die aufzulösende; und daß dann die Wurzelwerthe a, b, c, d selbst in diesen Funktionen dergestalt vorkommen, daß nachgehends solche aus den Werthen dieser Funktionen entwickelt werden können.

§. 544. Euler's Methode.

Euler nahm an, daß die Wurzelwerthe der Gleichungen vom 3ten, 4ten, 5ten u. s. w. Grade immer beziehlich die Form haben müßten:

$$A\cdot\sqrt[3]{x}+B\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$

$$A\cdot\sqrt[4]{x}+B\cdot\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+C\cdot\left(\sqrt[4]{x}\right)^3$$

$$A\cdot\sqrt[5]{x}+B\cdot\left(\sqrt[5]{x}\right)^2+C\cdot\left(\sqrt[5]{x}\right)^3+D\cdot\left(\sqrt[5]{x}\right)^4$$

u. s. w. Konnte er nun mittelst dieser Annahme die Wurzelwerthe einer jeden höhern Gleichung wirklich entwickeln, so war die Annahme selbst gerechtfertigt. — Die Methode ist im wesentlichen folgende:

I. Wenn aufzulösen ist die Gleichung vom dritten Grade:

$$z^3+pz+q=0. \qquad \cdots(1)$$

Man setze $z=A\sqrt[3]{x}+B\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$,

bezeichne die 3 Werthe von $\sqrt[3]{1}$ durch α, α^2 und α^3 (oder 1), und erhält dann für die 3 Werthe von z (nach der Annahme):

$$A\sqrt[3]{x}+B\left(\sqrt[3]{x}\right)^2;\quad A\left(\alpha\sqrt[3]{x}\right)+B\left(\alpha\sqrt[3]{x}\right)^2;$$

$$A\left(\alpha^2\sqrt[3]{x}\right)+B\left(\alpha^2\sqrt[3]{x}\right)^2.$$

Nun bildet man eine Gleichung in z, welche diese drey Wurzelwerthe hat, und findet, wegen $\alpha+\alpha^2+1=0$, folgende:

$$z^3-3ABx\cdot z-(A^3x+B^3x^2)=0, \qquad \cdots(2)$$

und es kommt nun alles darauf an, A, B und x so zu bestimmen, daß die Gleichung (2.) mit der (1.) zusammenfällt; welches der Fall seyn muß, sobald

$$3ABx=-p \quad \text{und} \quad A^3x+B^3x^2=-q \quad \text{ist.}$$

Man kann daher einen der Unbestimmten nach Belieben annehmen. Euler setzt $A=1$, findet $B=\frac{-\frac{1}{3}p}{x}$, und die Gleichung zur Bestimmung von x:

$$x-\frac{\frac{1}{27}p^3}{x}=-q,$$

woraus sich x und nachher auch B ergibt.

Und weil die Annahme des Wurzelwerthes für z auf keinen

Widerspruch führt, so ist auf diese Weise die gegebene Gleichung wirklich aufgelöset, in so ferne man Resultate erhält, welche genügen und mit keinem andern in Widerspruch stehen.

II. Wenn die Gleichung vom vierten Grade:

$$z^4+pz^2+qz+r=0 \quad \cdots(1)$$

gelöset werden soll.

Man bezeichnet die 4 Wurzelwerthe von $\sqrt[4]{1}$ durch α, α^2, α^3 und α^4 (oder 1), und nimmt für die 4 Wurzelwerthe der Gleichung (1.) die Ausdrücke:

$$A\cdot\sqrt[4]{x}+B\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+C\left(\sqrt[4]{x}\right)^3;$$
$$A\left(\alpha\sqrt[4]{x}\right)+B\left(\alpha\sqrt[4]{x}\right)^2+C\left(\alpha\sqrt[4]{x}\right)^3;$$
$$A\left(\alpha^2\sqrt[4]{x}\right)+B\left(\alpha^2\sqrt[4]{x}\right)^2+C\left(\alpha^2\sqrt[4]{x}\right)^3;$$
$$A\left(\alpha^3\sqrt[4]{x}\right)+B\left(\alpha^3\sqrt[4]{x}\right)^2+C\left(\alpha^3\sqrt[4]{x}\right)^3;$$

bildet nun aus diesen Wurzelwerthen die Gleichung in z, und verfährt wie oben. — Man muß aber dieselbe Gleichung erhalten, wenn man aus der Gleichung

$$z=A\sqrt[4]{x}+B\left(\sqrt[4]{x}\right)^2+C\left(\sqrt[4]{x}\right)^3$$

die $\sqrt[4]{x}$ blos eliminirt (§. 539. Anmerk. 1.). Dann erhält man, wenn man bemerkt, daß $\left(\sqrt[4]{x}\right)^2=\sqrt{x}$ und $\left(\sqrt[4]{x}\right)^3=\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt{x}$ ist, sehr leicht nach (§. 540. Anmerk.):

$$z^4-2(B^2+2AC)x\cdot z^2-4(A^2+C^2x)Bx\cdot z-A^4x$$
$$+B^4x^2-C^4x^3-4AB^2Cx^2+2A^2C^2x^2=0;$$

folglich hat man A, B, C und x so anzunehmen, daß wird

$$2(B^2+2AC)x=-p;$$
$$4(A^2+C^2x)Bx=-q;$$
$$A^4x-B^4x^2+C^4x^3+4AB^2Cx^2+2A^2C^2x^2=-r.$$

Euler setzt nun $B=1$, und bestimmt dann A und C und x; und hat dann:

$$z = A\sqrt[4]{x} + B\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 + C\left(\sqrt[4]{x}\right)^3,$$

welcher Ausdruck sogleich alle vier Wurzelwerthe gibt, wenn man statt $\sqrt[4]{x}$ nach und nach ihre vier Werthe substituirt.

Anmerkung. Dies mag hinreichen, den Geist der verschiedenen Methoden zu erfassen, und die Schwierigkeiten sehen zu lassen, welche sich ihrer Anwendung auf Gleichungen eines höhern Grades, als der vierte, entgegenstellen.

Dritte Abtheilung.

Von der Auflösung allgemeiner höherer Gleichungen in besondern Fällen.

---

§. 543. Aufgabe.

Es ist gegeben die dreygliedrige Gleichung

$$x^{2m} + ax^m + b = 0;$$

man soll solche auflösen nach x.

Auflösung. Die gegebene Gleichung so geschrieben:

$$(x^m)^2 + a\cdot(x^m) + b = 0,$$

ist, in Bezug auf x^m, eine quadratische, und gibt daher:

$$x^m = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b},$$

wo also x^m zwey Werthe hat. — Hieraus folgt aber:

$$x = \sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}},$$

wo x für jeden der beyden Radikanden, m verschiedene Werthe hat, folglich nothwendig 2m Werthe erhält, sobald die beyden Radikanden

$$-\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b} \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}a-\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-b},$$

d. h. die beyden Werthe von x^m, wirklich von einander verschieden sind.

Anmerkung. Es hängt daher die Aufzählung aller 2m Werthe von x in der Gleichung:

$$x^{2m}+ax^m+b=0,$$

von der Entwickelung der m Werthe der $\sqrt[m]{1}$, ab, weshalb wir alle weitern Untersuchungen ähnlicher Art, bis zu dem Zeitpunkte versparen wollen, wo wir diese Werthe der Wurzeln der Einheit allgemein aufzustellen im Stande seyn werden.

§. 546. Zusatz.

Es kann daher auch jede höhere Gleichung von der Form

$$x^{3n}+ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

allgemein aufgelöset werden; indem man $x=\sqrt[n]{t}$ setzt, und dann die Gleichung

$$t^3+at^2+bt+c=0$$ auflöset.

Man erhält dann für x eine Anzahl 3n, im Allgemeinen verschiedener Werthe.

§. 547. Zusatz.

Desgleichen kann man auch die allgemeine höhere Gleichung

$$x^{4n}+A\cdot x^{3n}+B\cdot x^{2n}+C\cdot x^n+D=0$$

auflösen, indem man $x=\sqrt[n]{t}$ setzt, und dann die Gleichung

$$t^4+At^3+Bt^2+Ct+D=0$$

auflöset.

Man erhält dabey zugleich alle 4n Werthe, welche diese Gleichung für x haben muß.

§. 548. Erklärung.

Eine höhere Gleichung heißt reziprok, wenn sie keinen Wurzelwerth α hat, ohne auch den Wnrzelwerth $\frac{1}{\alpha}$ zu haben,

der entweder derselbe seyn kann, wenn nämlich $\alpha = 1$, oder $= -1$ ist, der aber im Allgemeinen ein neuer Wurzelwerth seyn wird.

So ist z. B. die Gleichung, deren vier Wurzelwerthe

$$-2, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad 3, \quad \tfrac{1}{3}$$ sind,

und welche

$$(x+2)(x+\tfrac{1}{2})(x-3)(x-\tfrac{1}{3}) = 0$$

d. h. $$x^4 - \tfrac{5}{6}x^3 - \tfrac{38}{6}x^2 - \tfrac{5}{6}x + 1 = 0$$ seyn muß,

eine reziproke.

Desgleichen gehören zu den reziproken Gleichungen die folgenden:

$$x^5 - \tfrac{11}{6}x^4 - \tfrac{11}{2}x^3 + \tfrac{11}{2}x^2 + \tfrac{11}{6}x - 1 = 0,$$

mit den 5 Wurzelwerthen $-2, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad 3, \quad \tfrac{1}{3}$ und 1;

und $$x^5 + \tfrac{1}{6}x^4 - \tfrac{43}{6}x^3 - \tfrac{43}{6}x^2 + \tfrac{1}{6}x + 1 = 0,$$

mit den 5 Wurzelwerthen $-2, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad 3, \quad \tfrac{1}{3}$ und -1:

und $$x^6 - \tfrac{17}{6}x^5 - \tfrac{11}{3}x^4 + 11x^3 - \tfrac{11}{3}x^2 - \tfrac{17}{6}x + 1 = 0,$$

mit den 6 Wurzelwerthen $-2, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad 3, \quad \tfrac{1}{3}, \quad 1$ und 1;

endlich auch $$x^6 - \tfrac{5}{6}x^5 - \tfrac{22}{3}x^4 + \tfrac{22}{3}x^2 + \tfrac{5}{6}x - 1 = 0,$$

mit den 6 Wurzelwerthen $-2, \quad -\tfrac{1}{2}, \quad 3, \quad \tfrac{1}{3}, \quad 1$ und -1.

§. 549. Zusatz.

1) Eine reziproke Gleichung kann nur dann von einem ungeraden Grade seyn, wenn sie den Wurzelwerth 1 oder -1 hat.

2) Hat aber eine reziproke Gleichung den Wurzelwerth 1 oder -1, so kann sie deshalb doch noch vom geraden Grade seyn.

Denn sie kann den Wurzelwerth 1 oder -1 doppelt, 4fach u. s. w., ja sie kann die Wurzelwerthe 1 und -1 zugleich, sie kann endlich den Wurzelwerth 1, pmal, und zugleich den Wurzelwerth -1, $2n-$pmal haben, wo $2n$ jede beliebige gerade Zahl vorstellt.

3) Hat eine reziproke Gleichung außer dem Wurzelwerth α, auch jedesmal noch dazu den Wurzelwerth $\frac{1}{\alpha}$, auch wenn $\alpha = 1$ oder $\alpha = -1$ ist, so daß sie im letztern Falle, den Wurzelwerth 1 oder -1 doppelt hat: so ist sie immer vom geraden Grade, und ihre Koeffizienten sind dann immer vom Anfang nach der Mitte hin, beziehlich genau dieselben, wie vom Ende nach der

Mitte hin gesehen, so daß die Gleichung allemal die Form hat:

$$y^{2m}+A_1\cdot y^{2m-1}+A_2\cdot y^{2m-2}+A_3\cdot y^{2m-3}+\cdots+A_{m-2}\cdot y^{m+2}$$
$$+A_{m-1}\cdot y^{m+1}+A_m\cdot y^m+A_{m-1}\cdot y^{m-1}+A_{m-2}\cdot y^{m-2}$$
$$+A_{m-3}\cdot y^{m-3}+\cdots+A_3\cdot y^3+A_2\cdot y^2+A_1\cdot y+1=0.$$

Denn da die Wurzelwerthe dieser Gleichung paarweise in der Form:

$$\alpha,\ \frac{1}{\alpha},\ \beta,\ \frac{1}{\beta},\ \gamma,\ \frac{1}{\gamma},\ \delta,\ \frac{1}{\delta},\ \text{ꝛc. ꝛc.},$$

vorkommen, und da $(x-\alpha)\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)=x^2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x+1$ ist, so hat die höhere Gleichung selbst die Form:

$$\left[x^2-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)x+1\right]\left[x^2-\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)x+1\right]\left[x^2-\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)x+1\right]\text{ꝛc.}=0,$$

in welcher, wenn man multiplizirt, augenfällig die erwähnte Eigenschaft hervortreten muß, weil jeder der einzelnen Faktoren bereits diese Eigenschaft hat.

4) Hat die höhere Gleichung noch außerdem den Wurzelwerth -1, so daß sie noch den Faktor $x+1$ bekommt, einmal oder mehremal, so befolgen die Koeffizienten der Gleichung offenbar noch immer dasselbe Gesetz, welches in der vorigen Nummer ausgesprochen worden.

5) Hat aber die höhere Gleichung auch noch den Wurzelwerth 1, also den Faktor $x-1$, so werden sich zwar die Koeffizienten nicht ändern, aber die Zeichen derselben; welches so oft der Fall seyn muß, so oft dieser Wurzelwerh 1 hier in ungerader Anzahl vorkommt.

6) Umgekehrt, sind die Koeffizienten einer gegebenen höhern Gleichung in den gleichvielten Gliedern vom Anfange und vom Ende abgerechnet, beziehlich alle einander gleich, entweder vollkommen gleich, oder mit gerade entgegengesetzten Zeichen versehen, übrigens gleich: so ist diese Gleichung eine reziproke, d. h. wenn α einer ihrer Wurzelwerthe ist, so ist auch $\frac{1}{\alpha}$ ein Werth ihres Unbekannten, der ihr genügt. — Und ist sie dabey vom ungeraden Grade, so hat sie den

Wurzelwerth 1 oder —1, je nachdem die gleichen Koeffizienten jedesmal einerlei, oder gerade entgegengesetzte (+)= oder (—)= Zeichen haben.

Denn setzt man zuerst α statt des Unbekannten z, so erhält man eine ganze Funktion von α, welche identisch Null ist, nach der Vor= aussetzung. Setzt man aber nun $\frac{1}{\alpha}$ statt z, und multiplizirt dann mit α^m weg, wenn m der Grad der gegebenen Gleichung ist, so erhält man entweder genau dieselbe ganze Funktion von α, oder alle ihre Glieder mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen, welche also wieder identisch Null seyn muß.

§. 550. Aufgabe.

Es ist gegeben eine reziproke Gleichung von einem geraden Grade, z. B.:

$$y^8+A_1\cdot y^7+A_2\cdot y^6+A_3\cdot y^5+A_4\cdot y^4+A_3\cdot y^3+A_2\cdot y^2+A_1 y+1 = 0,$$

deren Wurzelwerthe α, β, γ, δ, $\frac{1}{\alpha'}$ $\frac{1}{\beta'}$ $\frac{1}{\gamma'}$ $\frac{1}{\delta}$ seyn mögen. Man soll eine neue Gleichung in z finden, welche die Summen

$$\alpha+\frac{1}{\alpha},\quad \beta+\frac{1}{\beta},\quad \gamma+\frac{1}{\gamma},\quad \delta+\frac{1}{\delta},$$

zu Wurzelwerthen hat.

Auflösung. Diese Aufgabe ist wiederum ein besonderer Fall der (§. 507.) aufgestellten, die sich aber direkt leichter auf folgende Art lösen läßt.

Man setzt nämlich $y+\frac{1}{y}=z$, und findet:

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 = y^2+\frac{1}{y^2}+2 \qquad = z^2,$$

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^3 = y^3+\frac{1}{y^3}+3\left(y+\frac{1}{y}\right) \quad = z^3,$$

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^4 = y^4+\frac{1}{y^4}+4\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+6 = z^4.$$

Daraus aber wieder:

$$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2,$$

$$y^3+\frac{1}{y^3}=z^3-3z,$$

$$y^4+\frac{1}{y^4}=z^4-4z^2+2;$$

folglich, wenn man die gegebene Gleichung in y durch y^4 dividirt, und das Resultat so schreibt:

$$y^4+\frac{1}{y^4}+A_1\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+A_2\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)+A_3\left(y+\frac{1}{y}\right)+A_4 = 0,$$

nachher aber obige Werthe substituirt:

$$z^4+A_1z^3+(A_2-4)z^2+(A_3-3A_1)z+(A_4+2-2A_2)=0,$$

welches die verlangte Gleichung in z ist.

Man sieht aber leicht ein, wie das hier für Gleichungen vom 8ten Grade gesagte, auf Gleichungen von jedem geraden Grade angewandt werden kann.

§. 551. Zusatz.

Kann daher eine allgemeine Gleichung vom Grade m allgemein aufgelöset werden, so kann auch die reziproke Gleichung vom Grade 2m und 2m+1 in y allgemein aufgelöset werden; indem man $y+\frac{1}{y}=z$ (woraus $y^2-zy+1=0$ folgt) zur Bestimmung von y hat, sobald z aus der Gleichung vom Grade m gefunden ist.

§. 552. Zusatz.

Die Gleichung $y^{2m}-1=0$ ist eine reziproke Gleichung, und hat, wie der Augenschein lehrt, die beyden Wurzelwerthe +1 und −1. Dividirt man daher $y^{2m}-1$ durch $(y-1)(y+1)$ d. h. durch y^2-1, so erhält man für die übrigen Wurzelwerthe

eine reziproke Gleichung vom Grade 2m—2, deren allgemeine Auflösung abhängig ist von einer Gleichung vom Grade m—1.

Daher kann man, in so ferne die Gleichungen bis zum vierten Grade aufgelöset werden können, auch die Gleichungen $y^3-1=0$, $y^4-1=0$, $y^5-1=0$, $y^6-1=0$, $y^7-1=0$, $y^8-1=0$, $y^9-1=0$ und noch $y^{10}-1=0$ allgemein auflösen.

Man kann also allgemeine Ausdrücke finden für die Werthe der Wurzeln $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[7]{1}$, $\sqrt[8]{1}$, $\sqrt[9]{1}$, und zuletzt noch für die Werthe von $\sqrt[10]{1}$, die alle von der Form $p+qi$ sind.

Anmerkung. Weiter unten wird gezeigt werden können, wie man alle Werthe von $\sqrt[m]{1}$, für jede absolute ganze Zahl m, bequem ausdrücken kann.

§. 553. Aufgabe.

Eine höhere Gleichung vom Grade m, z. B. für $m=6$,

$$x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F=0,$$

aufzulösen, wenn zwischen einigen ihrer Wurzelwerthe z. B. zwischen a und b, eine algebraische Gleichung $\varphi(a,b)=0$ gegeben ist.

Auflösung. Man hat für die Wurzelwerthe a und b die 3 Gleichungen:

1) $a^6+Aa^5+Ba^4+Ca^3+Da^2+Ea+F=0$;
2) $b^6+Ab^5+Bb^4+Cb^3+Db^2+Eb+F=0$;
3) $\varphi(a,b)=0$.

Eliminirt man nun aus (2.) und (3.) den Ausdruck b, so erhält man eine höhere Gleichung (4.) in a, zum Resultat, welche mit der Gleichung (1.) zugleich existirt. Sucht man daher zwischen (1.) und (4.) den größten gemeinschaftlichen Theiler in a, und setzt solchen $=0$, so erhält man den Wurzelwerth a selbst; so wie dann, entweder aus $\varphi(a,b)=0$, oder direkt auf dieselbe Art, auch b gefunden werden kann. — Dividirt man nachgehends

die gegebene Gleichung durch (x—a)(x—b), so erhält man eine neue Gleichung für die übrigen Wurzelwerthe.

§. 554. Zusatz.

Dasselbe Verfahren, welches hier für den Fall gezeigt wurde, wenn zwischen zweyen der Wurzelwerthe a und b eine gegebene Relation $\varphi(a,b) = 0$ existirt; läßt sich aber auch auf den Fall ausdehnen, wo die gegebene Relation 3, 4 und beliebig viel der Wurzelwerthe enthält.

Man findet auch immer so viele Wurzelwerthe, als in der Relation $\varphi = 0$ deren vorkommen.

Anmerkung. Das Verfahren findet aber dann nicht mehr Anwendung, wenn der gemeinschaftliche Faktor in a von einem höhern Grade, als der 4te wird, oder allgemein, wenn die aus ihm hervorgehende Gleichung zur Bestimmung von a, nicht mehr allgemein aufgelöset werden kann. — Dies ist aber im Allgemeinen schon der Fall, wenn φ in der gegebenen Relation $\varphi = 0$, eine symmetrische Funktion ist von 5 der Wurzelwerthe a, b, c, d uud e. Denn alsdann kann dieser gemeinschaftliche Theiler in a, der gleich Null gesetzt, den Wurzelwerth a geben soll, von denen auf dieselbe Weise in b, c, d und e erhaltenen in gar nichts verschieden seyn, sondern es muß jeder derselben in jeden andern übergehen, so oft statt des Buchstaben a, b, c, d, oder e, irgend ein anderer derselben Buchstaben gesetzt wird. Und deshalb muß dieser Theiler in a alle 5 Wurzelwerthe a, b, c, d, e enthalten, also wenigstens vom 5ten Grade seyn.

§. 555. Zusatz.

Weil zwischen den Wurzelwerthen a und b einer reziproken Gleichung die Relation $ab = 1$ herrscht, so kann diese Methode unmittelbar zur Auflösung der reziproken Gleichungen angewandt werden. In so ferne aber hier mehrere solche Relationen zugleich herrschen, und zwar halb so viele, als der Grad der reziproken Gleichung (vom geraden Grade) anzeigt, die durch

$$ab = 1, \quad cd = 1, \quad ef = 1, \quad gh = 1 \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

ausgedrückt seyn können; so wird der gemeinschaftliche Theiler in a, der $= 0$ gesetzt, den Wurzelwerth a geben soll, eben so gut

den Wurzelwerth von a, als auch die von c, e, g ꝛc. ꝛc. geben, folglich vom Grade m seyn, wenn die gegebene reziproke Gleichung selbst, vom Grade 2m ist.

Anmerkung 1. Man kann aber mittelst dieser Methode des (§. 553.) auch die Relation finden, welche zwischen den Koeffizienten einer höhern Gleichung statt finden muß, wenn zwischen einigen ihrer Wurzelwerthe eine bestimmte und gegebene Relation $\varphi = 0$, soll statt finden können.

Anmerkung 2. Viele andere hierher gehörige wichtige Bemerkungen verstattet der Raum und der Zweck dieser Schrift nicht, hier mitzutheilen, weshalb wir uns mit dem zur allgemeinen Uebersicht hier Aufgestellten begnügen müssen.

Zahlenlehre.

Drei und zwanzigstes Kapitel.

Von den unendlichen Reihen.

Erste Abtheilung.

Von den unendlichen Reihen im Allgemeinen.

§. 556. Erklärung.

Eine ganze Funktion von x, die man sich in's Unendliche fortgesetzt denkt, so daß ihr Grad kein bestimmter, sondern größer ist, als jede noch so große denkbare Zahl; eine ganze Funktion also, die nie wirklich darstellbar ist, sondern nur in der Idee in uns lebt, nämlich:

$$A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_2\cdot x^3+\cdots \text{ in infinit.},$$

heißt eine nach ganzen Potenzen von x fortgehende (fortschreitende) unendliche Reihe. — Der Buchstabe x heiße der Fortschreitungsbuchstabe. — Die ganze Funktion von x von einem bestimmten Grade, mag dann eine endliche Reihe genannt werden.

Eine ganze Funktion zweyer Veränderlichen x und y, oder dreyer Veränderlichen x, y und z, oder überhaupt von m Veränderlichen, deren Glieder nach jedem der Veränderlichen geordnet, ins Unendliche fortgehend gedacht werden, heiße eine

unendliche Reihe der zweyten Ordnung, oder der drit= Ordnung, oder der mten Ordnung. — Obige unendliche Reihe kann dann, zum Unterschied, eine unendliche Reihe der ersten Ordnung genannt werden.

Die unendliche Reihe nenne man eine allgemein=nume= rische, wenn die Koeffizienten in ihr bestimmten Ziffernwerthen von der Form $p+qi$ (die also theils reel, theis imaginär seyn können) gleich sind; sie heiße konvergent, wenn der Fortschrei= tungsbuchstabe ebenfalls einen solchen Werth erhalten hat, und wenn die Summe von n ersten Gliedern derselben einen Ausdruck $P+Qi$ gibt, in welchem P und Q Ausdrücke sind, die nicht un= endlich werden, sondern einen endlichen reelen Werth annehmen, so oft $n = \infty$ genommen wird. Im entgegengesetzten Falle heiße die Reihe divergent.

Beyspiel. So ist z. B. jeder Dezimalbruch mit ohne Ende fortgehenden Dezimalstellen, allemal eine unendliche konvergente nu= merische Reihe. — Denn es ist z. B.

0, 761395 423511 233276 5..... in inf.

offenbar kleiner als

0, 999999 999999 999999 9..... in inf.

während letzterer Dezimalbruch

$= 9(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+\cdots$ in inf.),

ist, für $x = \frac{1}{10}$ gedacht. — Nun ist aber die Summe von n Glie= dern der letzten Reihe nach (§. 451.)

$$= 9 \cdot \frac{x-x^{n+1}}{1-x},$$

und für

$$x = \frac{1}{10},$$

$$= 1-\left(\frac{1}{10}\right)^n = 1-\frac{1}{10^n},$$

welcher Werth, je größer n gedacht wird, desto näher der 1 rückt, ohne jedoch die Einheit je erreichen, also noch weniger größer als 1 werden zu können.

Daher sind auch die nach (§§. 198. und 201.) zu findende Resul= tate allemal unendliche numerische und konvergente Reihen.

Anmerkung. Da hier zunächst nur immer von diesen unendlichen Reihen die Rede seyn wird, in so ferne andere noch nicht definirt sind, so wird man das „nach ganzen Potenzen von x fortschreitend“ nicht immer hinzuzusetzen nöthig haben. So oft also in der Folge von unendlichen Reihen nach x die Rede seyn wird, andere aber als diese, noch nicht erklärt seyn sollten, müssen immer die hiesigen, und nie andere, noch nicht definirte, verstanden werden.

§. 557. Zusatz.

Jede endliche Reihe ist auch zugleich eine unendliche; weil man zu jeder solchen unendlichen Reihe noch Glieder von der Form $0 \cdot x^n$, die selber der Null gleich sind, hinzugefügt denken kann, ins Unendliche fort. Dagegen ist nicht umgekehrt jede unendliche Reihe zugleich auch eine endliche.

Die unendliche Reihe ist daher der allgemeinere Begriff, und die endliche Reihe ein besonderer Fall der unendlichen Reihe. Da aber der besondere Begriff immer alle Merkmale des allgemeinern Begriffs haben muß, so wird man die Merkmale des allgemeinern Begriffs, aus denen des besondern erhalten müssen, wenn man diejenigen, die dem besondern, als solchen, eigenthümlich sind, wegläßt, und die übrigen in den allgemeinen Begriff vereinigt.

§. 558. Zusatz.

1) Was daher von den endlichen Reihen (von den ganzen Funktionen) im Allgemeinen gilt, unabhängig von einer bestimmten Gliederzahl derselben und unabhängig von ihrem numerischen Werth, das muß auch nothwendig von den unendlichen Reihen gelten, im Allgemeinen.

2) Was dagegen von den endlichen Reihen (von den ganzen Funktionen) nur in so ferne gilt, als sie besondern Ziffern-Ausdrücken gleich gedacht werden, doch aber noch unabhängig von jeder Gliederzahl, das kann von den unendlichen Reihen nur unter der Voraussetzung gelten, daß solche konvergent sind (d. h. daß solche selbst noch bestimmten Ziffernwerthen gleich gedacht sind); muß aber auch nothwendig gelten, sobald diese Bedingung wirklich erfüllt ist.

3) Was endlich von einer ganzen Funktion nur in so ferne gilt, als ihre Gliederzahl eine völlig bestimmte ist, darf für die unendlichen Reihen nicht unbedingt beybehalten werden.

Anmerkung. Wir glauben insbesondere noch auf vorstehende (Nr. 2.) aufmerksam machen zu müssen, weil man bey numerischen Reihen äußerst leicht in Gefahr kommen kann, sich in endlose Widersprüche zu verwickeln, wenn man nicht genau darauf sieht, daß die (numerischen) Reihen, ehe man sie gleich den übrigen endlichen Zahlen-Ausdrücken behandelt, auch wirklich die, letztern zukommende Eigenschaft haben, d. h. konvergent sind (im Sinne des §. 556.).

§. 559. Zusatz.

Hieraus folgen sogleich nachstehende Sätze:

1) Sind zwey nach x fortlaufende unendliche Reihen einander gleich, für jeden Werth von x, so sind auch beziehlich die Koeffizienten derselben Potenz von x in beyden einander gleich.

2) Ist eine nach x fortlaufende unendliche Reihe der Null gleich, für jeden Werth von x, so sind auch die Koeffizienten derselben einzeln der Null gleich.

3) Sind zwey unendliche Reihen höherer Ordnungen für jeden Werth der Fortschreitungs-Buchstaben x, y ꝛc., einander gleich, so sind auch nothwendig die Koeffizienten, welche dieselben Potenzen $x^m \cdot y^n$ ꝛc. affiziren, einander gleich.

4) Ist eine solche unendliche Reihe höherer Ordnung der Null gleich, für jeden Werth von x, y, ꝛc:, so sind auch die Koeffizienten derselben alle einzeln der Null gleich.

5) Stellt in einer unendlichen Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots \text{ in inf.}$$

das x einen oder mehrere solche bestimmte Werthe vor, daß sie selbst, für diese bestimmten (aber nicht für alle beliebigen) Werthe von x, der Null gleich wird, so hat man eine Gleichung von der Form der höhern Gleichungen, aber von einem unendlichen Grade. Eine solche Gleichung

$$0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots \text{ in inf.},$$

deren Koeffizienten alle die Form $p+qi$ haben, kann daher für x unendlich viele Wurzelwerthe von der Form $p+qi$ geben; allein, in so ferne die Anzahl der Koeffizienten dieser Gleichung unendlich groß ist, so können diese Wurzelwerthe zuuu Theil oder alle von der Art seyn, daß p oder q (oder p und q zugleich) selbst unendlich große Zahlen werden, d. h. Zahlen, die größer sind, als jede gegebene absolute Zahl, die daher nur in der Idee vorhanden, nie aber wirklich darstellbar sind, und die deshalb auch nie im Kalkul gebraucht werden können.

6) Hat aber umgekehrt die Gleichung

$$0 = a+bx+cx^2+dx^3+\cdots \text{ in inf.}$$

(in welcher nicht alle Koeffizienten einzeln der Null gleich sind, die daher in Bezug auf x eine Bestimmungsgleichung ist, von der Form einer höhern Gleichung, aber von einem unendlichen Grade) darstellbare Werthe, welche statt x gesetzt, ihr ein Genüge leisten, so sind solche nothwendig von der Form $p+qi$ (reel oder imaginär); wenn nur die einzelnen Koeffizienten a, b, c, d, ... alle von derselben Form $p+qi$ sind.

7) Kann man für eine solche Gleichung

$$0 = a+bx+cx^2+dx^3+\cdots \text{ in inf.}$$

unendlich viele (nach einem bestimmten Gesetz zu entwickelnde) Werthe von x angeben, die ihr genügen, und kann man zu gleicher Zeit nachweisen, daß es außer diesen keine andern Werthe mehr geben kann, welche statt x gesetzt, diese Gleichung identisch machen, so sind diese unendlich vielen, nach einem bestimmten Gesetz zu entwickelnden Werthe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. ꝛc., alle Wurzelwerthe der gegebenen Gleichung, also dann auch nach (§. 487.)

$$\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\beta}\right)\left(1-\frac{x}{\gamma}\right)\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\left(1-\frac{x}{\varepsilon}\right)\cdots \text{ in inf.}$$
$$= 1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x^3+\cdots \text{ in inf.}$$

8) Jede unendliche Reihe

(P) ... $a+bx+cx^2+dx^3\cdots$ in inf.

kann durch das kombinatorische Aggregat

$$S[P_a \cdot x^a]$$

ausgedrückt werden, wenn man nur statt a nach und nach 0, 1, 2, 3, 4, in inf. gesetzt denkt, und wenn P_a den Koeffizienten von x^a vorstellt.

9) Jede unendliche Reihe der zweyten Ordnung kann ausgedrückt werden durch das kombinatorische Aggregat

$$S[P_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b]_{a+b=c},$$

oder auch blos durch

$$S[P_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b],$$

wenn man sich in ersterem statt c, in letzterem aber statt a und statt b, nach und nach alle möglichen Verbindungen der Werthe 0, 1, 2, 3, ... in inf. gesetzt denkt; und dabey unter $P_{m,n}$, den Koeffizienten von $x^m \cdot y^n$ versteht,

10) Leicht ist es einzusehen, daß auch die Aggregate

$$S[P_{a,b,c} \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c] \quad \text{u. s. w. f.,}$$

unendliche Reihen der dritten und höhern Ordnung ausdrücken werden.

§. 560. Erklärung.

Einen gegebenen aus unendlichen Reihen (die auch endliche seyn können) oder andern Ausdrücken beliebig zusammengesetzten Ausdruck nach x entwickeln, soll nichts weiter heißen, als man soll eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe angeben, welche dem gegebenenen Ausdruck gleich ist.

§. 561. Zusatz.

Soll aber irgend ein Ausdruck F(x) in eine unendliche Reihe nach x entwickelt werden, so daß

$$F(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots \quad \text{wird,}$$

so ist klar, daß der erste Koeffizient α allemal gleich ist dem, was aus $F(x)$ wird, wenn man in $F(x)$, Null statt x setzt, sobald nur die Entwicklung möglich ist.

Denn die Gleichung soll ja für jeden Werth von x existiren, also auch für $x = 0$, wofür aber auf der rechten Seite α sich ergibt.

§. 562. Zusatz.

Das Addiren und Subtrahiren zweyer unendlichen Reihen geschieht nach den Formeln

1) $S[P_a \cdot x^a] \pm S[Q_b \cdot x^b] = S[(P_a \pm Q_a) \cdot x^a]$,

2) $S[P_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b] \pm S[Q_{c,b} \cdot x^c \cdot y^b] = S[(P_{a,b} \pm Q_{a,b}) \cdot x^a \cdot y^b]$;

u. s. w. f.

Und weil jede endliche Reihe zugleich auch als eine unendliche Reihe, also auch jede Reihe irgend einer niedrigern Ordnung, zugleich als eine Reihe jeder höhern Ordnung gedacht werden kann; so dienen dieselben Formeln, um auch Reihen verschiedener Ordnungen zu addiren, oder von einander zu subtrahiren.

§. 563. Lehrsatz.

Das Multipliziren zweyer unendlichen Reihen der ersten Ordnung geschieht dagegen nach der Formel

$$S[P_a \cdot x^a] \times S[Q_a \cdot x^a] = S[P_a \cdot Q_b \cdot x^{a+b}],$$

oder

$$= S[\underset{a+b=c}{P_a \cdot Q_a} \cdot x^c];$$

so daß der Koeffizient von der Potenz x^n im Produkt ausgedrückt seyn wird, durch:

$$S[\underset{a+b=n}{P_a \cdot Q_b}].$$

Auf dieselbe Weise hat man für die Multiplikation von drey gegebenen Reihen, die Formel

$$S[P_a \cdot x^a] \times S[Q_a \cdot x^a] \times S[R_a \cdot x^a] = S[P_a \cdot Q_b \cdot R_c \cdot x^{a+b+c}],$$

oder

$$= S[\underset{a+b+c=d}{P_a \cdot Q_b \cdot R_c} \cdot x^d],$$

so daß der Koeffizient von x^n ausgedrückt ist durch:

$$S[P_a \cdot Q_b \cdot R_c]_{a+b+c=n}.$$

Aehnliche Formeln lassen sich für die Multiplikation von beliebig viel unendlichen Reihen leicht angeben.

Beyspiel. Man soll den Koeffizienten von x^3 finden von dem Produkt der 4 Reihen

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$
$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \cdots$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots$$

Zu dem Ende bildet man die 4 Skalen

	0,	1,	2,	3	...
P	a,	b,	c,	d	...
Q	A,	B,	C,	D	...
R	$\mathfrak{A}$,	$\mathfrak{B}$,	$\mathfrak{C}$,	$\mathfrak{D}$	...
T	α,	β,	γ,	δ	...

und hat für den gesuchten Koeffizienten, das Aggregat

$$S[P_a \cdot Q_b \cdot R_c \cdot T_d]_{a+b+c+d=3}.$$

Um nun die einzelnen Glieder dieses Aggregats zu erhalten, muß man die Gleichung

$$a + b + c + d = 3$$

auflösen, und erhält:

a	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	2,	2,	2,	3
b	0,	0,	0,	0,	1,	1,	1,	2,	2,	3,	0,	0,	0,	1,	1,	2,	0,	0,	1,	0
c	0,	1,	2,	3,	0,	1,	2,	0,	1,	0,	0,	1,	2,	0,	1,	0,	0,	1,	0,	0
d	3,	2,	1,	0,	2,	1,	0,	1,	0,	0,	2,	1,	0,	1,	0,	0,	1,	0,	0,	0

und der gesuchte Koeffizient wird daher:

$$aA\mathfrak{A}\delta + aA\mathfrak{B}\gamma + aA\mathfrak{C}\beta + aA\mathfrak{D}\alpha + aB\mathfrak{A}\gamma + aB\mathfrak{B}\beta + aB\mathfrak{C}\alpha +$$
$$+ aC\mathfrak{A}\beta + aC\mathfrak{B}\alpha + aD\mathfrak{A}\alpha + bA\mathfrak{A}\gamma + bA\mathfrak{B}\beta + bA\mathfrak{C}\alpha + bB\mathfrak{A}\beta + bB\mathfrak{B}\alpha$$
$$+ bC\mathfrak{A}\alpha + cA\mathfrak{A}\beta + cA\mathfrak{B}\alpha + cB\mathfrak{A}\alpha + dA\mathfrak{A}\alpha.$$

Auf dieselbe Weise kann man den Koeffizienten jeder andern Potenz von x in dem Produkte dieser 4 Reihen angeben.

§. 564. Zusatz.

Für die Multiplikation unendlicher Reihen der zweyten Ordnung hat man die Formeln:

1) $S[P_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b] \times S[Q_{c,d} \cdot x^c \cdot y^d] = S[P_{a,b} \cdot Q_{c,d} \cdot x^{a+c} \cdot y^{b+d}]$,

oder

$$= S\left[P_{a,b} \cdot Q_{c,d} \cdot x^e \cdot y^f\right]_{a+c=e,\ b+d=f}.$$

2) $S[P_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b] \times S[Q_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b] \times S[R_{a,b} \cdot x^a \cdot y^b]$

$$= S\left[P_{a,b} \cdot Q_{c,d} \cdot R_{e,f} \cdot x^g \cdot y^b\right]_{a+c+e=g,\ b+d+f=b};$$

u. s. w. f.,

nach welchen man den Koeffizienten jedes beliebigen Gliedes $x^m \cdot y^n$ des Produkts ohne weiteres entwickeln kann *).

Anmerkung. Auf ähnliche Weise können auch unendliche Reihen höherer Ordnungen mit einander multiplizirt, und von dem Produkt, der Koeffizient eines jeden beliebigen Gliedes ohne weiteres angegeben werden.

§. 565. Aufgabe.

Eine unendliche Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

durch eine zweyte unendliche Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$$

zu dividiren, d. h. eine neue unendliche Reihe von derselben Form zu finden, welche mit der zweyten multiplizirt, genau die erste wiedergibt.

Auflösung. Man nehme die gesuchte unendliche Reihe mit unbestimmten Koeffizienten an, z. B.

---

*) In der kleinen Schrift: **De elevatione serierum infinit. secundi ordinis etc. Auct. *M. Ohm.* 1811.**, ist auch das praktische Verfahren für die Multiplikation der unendlichen Reihen der zweyten Ordnung ausführlicher behandelt. — Dieselbe ist von der Buchhandlung des Herrn T. H. Riemann ebenfalls und zwar für 10 Sgr. oder 8 gGr. zu beziehen.

$\alpha+\beta x+\gamma x^2+$ in inf.,

und multiplizire solche mit dem Divisor $A+Bx+Cx^2+\cdots$; so soll das Produkt dem Dividenden $a+bx+cx^2+\cdots$ gleich seyn. Dann sind aber auch die Koeffizienten einzeln beziehlich einander gleich (§. 559.), und man erhält dadurch unendlich viele, in Bezug auf die unbekannten Koeffizienten α, β, γ, δ ꝛc. einfache Gleichungen, aus deren jeder, einer der Koeffizienten α, β, γ, δ ꝛc. bestimmt werden kann; im Allgemeinen. — Diese einzelnen Gleichungen sind nämlich

$$a = A\alpha;$$
$$b = A\beta+B\alpha;$$
$$c = A\gamma+B\beta+C\alpha;$$
$$d = A\delta+B\gamma+C\beta+D\alpha;$$

u. s. w. in's Unendliche fort; und die erste gibt α, die zweyte β, die dritte γ, u. s. w., so daß jede folgende Gleichung auch einen der folgenden Koeffizienten bestimmt, in's Unendliche fort.

§. 566. Zusatz.

Diese Aufgabe (§. 565.) ist, wie man sieht, immer möglich, so lange nicht $A = 0$. Ist aber $A = 0$, so muß auch $a = 0$ seyn, wenn die Aufgabe möglich seyn soll. Ueberhaupt sind n der ersten Koeffizienten des Divisors $= 0$, so müssen wenigstens eben so viele erste Koeffizienten des Dividenden ebenfalls der Null gleich seyn, wenn es eine unendliche Reihe (nach ganzen Potenzen von x fortschreitend; und nur von solchen ist hier die Rede) geben soll, die mit dem Divisor multiplizirt, den Dividenden gibt. — Vergl. (§. 422. und Anmerkung).

Anmerkung. Man muß hier nicht übersehen, daß es, im Falle A nicht Null, allemal eine unendliche Reihe gibt, die mit dem Divisor multiplizirt, ein Produkt hervorbringt, dessen Koeffizienten ohne Aufhören mit denen des Dividenden zusammenfallen; daß aber, eben weil diese Reihe unendlich ist, nicht behauptet werden kann, daß eine endliche Reihe (etwa wenn man von der unendlichen Reihe eine Anzahl erster Glieder nehmen wollte) dieselbe Eigenschaft habe. — Statt der unendlichen Reihe, die dem Quotienten der beyden

gegebenen unendlichen Reihen gleich ist, darf daher nie eine endliche Reihe gesetzt werden, als dem Quotienten gleich; und wenn man eine solche endliche Reihe dennoch anwenden wollte, so müßte man sich ein unbekanntes Ergänzungsglied, welches im Allgemeinen selbst eine unendliche Reihe wieder seyn muß, noch hinzudenken, um einen, dem gegebenen Quotienten gleichen Ausdruck zu haben.

§. 567. Zusatz.

Weil jede endliche Reihe zugleich auch eine unendliche ist (aber nicht umgekehrt), so kann man mittelst derselben Auflösung (§. 565.) auch den Quotienten zweyer Reihen erhalten, von denen entweder die eine nur unendlich ist, oder die alle beyde endlich sind, und aus beliebig viel, ja auch nur aus einem einzigen Gliede bestehen können. — Wendet man aber das Verfahren des (§. 565.) auf die Quotienten

$$\frac{A}{1+ax},\ \frac{A}{1+ax+bx^2},\ \frac{A}{1+ax+bx^2+cx^3},\ \frac{A}{1+ax+bx^2+cx^3+dx^4}$$

u. s. w. an, so erhält man bemerkenswerthe Resultate.

Wird nämlich wieder zuerst

$$\frac{A}{1+ax} = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots$$

gesetzt, so findet man

$$\alpha = A;$$
$$\beta = -a\alpha = -a\cdot A;$$
$$\gamma = -a\beta = +a^2\cdot A;$$
$$\delta = -a\gamma = -a^3\cdot A;$$

u. s. w. f.; und man sieht, daß jeder Koeffizient der gesuchten unendlichen Reihe, aus seinem zunächst vorhergehenden, durch Multiplikation mit $-a$ entsteht: so daß, wenn P und Q zwey auf einander folgende dieser Koeffizienten sind, nothwendig

$$Q = -a\cdot P$$

seyn muß.

Setzt man für den zweyten Quotienten wieder

$$\frac{A}{1+ax+bx^2} = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4+\cdots,$$

so erhält man

$$\alpha = A;$$
$$\beta = -a\alpha = -aA;$$
$$\gamma = -a\beta-b\alpha;$$
$$\delta = -a\gamma-b\beta;$$
$$\epsilon = -a\delta-b\gamma;$$

u. s. w. f.; so daß, wenn N, P, Q, drey auf einander folgende der Koeffizienten sind, ein jeder durch die beyden vorhergehenden, mittelst der Gleichung

$$Q = -aP-bN$$

gefunden werden kann.

Wird ferner der dritte Quotient

$$\frac{A}{1+ax+bx^2+cx^3} = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\epsilon x^4+\cdots$$

gesetzt, so findet man

$$\alpha = A;$$
$$\beta = -a\alpha;$$
$$\gamma = -a\beta-b\alpha;$$
$$\delta = -a\gamma-b\beta-c\alpha;$$
$$\epsilon = -a\delta-b\gamma-c\beta;$$

u. s. w. f.; so daß jeder Koeffizient durch die drey vorhergehenden gefunden wird, mittelst der Gleichung

$$Q = -aP-bN-cM,$$

wo M, N, P, Q, vier auf einander folgende, übrigens beliebige Koeffizienten der gesuchten unendlichen Reihe sind.

Es ist hieraus leicht einzusehen, daß wenn man den Quotienten

$$\frac{A}{1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n}$$
$$= P_0+P_1\cdot x+P_2\cdot x^2+P_3\cdot x^3+\cdots \text{ in inf.}$$

setzt, dann allemal seyn müsse

$$P_m = -a_1 \cdot P_{m-1} - a_2 \cdot P_{m-2} - a_3 \cdot P_{m-3} - a_4 \cdot P_{m-4} - \cdots - a_{n-1} \cdot P_{m-n+1} - a_n \cdot P_{m-n},$$

so daß jeder Koeffizient der Reihe, durch die n zunächst vorhergehenden Koeffizienten ausgedrückt ist. — Ferner kann man sich leicht durch die Ausführung des Verfahrens (§. 565.) auch überzeugen, daß man dieses Gesetz noch für die erstern Koeffizienten P_1, P_2, P_3 ꝛc. gelten lassen könne, wenn man sich die Vorstellung macht, als ginge dem P_0 eine beliebige Anzahl Koeffizienten, die Null sind, vorher. — Der Koeffizient P_0 selbst aber, muß sich ergeben, wenn man in dem gegebenen Quotienten Null statt x setzt (§. 564.). Es muß daher hier jedesmal $P_0 = A$ seyn.

§. 568. Erklärung.

Jede unendliche Reihe, die einem solchen Quotienten

$$\frac{A}{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}$$

gleich ist, oder gleich gedacht wird, nenne man eine rekurrirende oder wiederkehrende Reihe. — Die Koeffizienten der ganzen Funktion von x im Divisor

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

mit Ausnahme des ersten 1, alle in ihrer Ordnung, aber mit dem entgegengesetzten (+)= oder (—)=Zeichen (die etwanigen Null=Koeffizienten nicht ausgenommen) neben einander geschrieben, und durch Kommata getrennt, also:

$$-a_1, -a_2, -a_3, \cdots -a_{n-1}, -a_n,$$

geben die Beziehungs=Skale der rekurrirenden Reihe *).

§. 569. Zusatz.

Weiß man von einer Reihe

$$P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \cdots,$$

*) Es wird hier absichtlich einstweilen nur dieser Begriff der rekurrirenden Reihe aufgestellt.

daß sie eine rekurrirende ist, kennt man dabey ihr erstes Glied P_0 und ihre Beziehungs-Skale

$$-a_1,\ -a_2,\ -a_3,\ \cdots\ -a_{n-1},\ -a_n,$$

so kann man folglich alle folgenden Glieder dieser Reihe ohne weiteres hinschreiben, indem man sich die gesuchten Koeffizienten so geschrieben denkt

$$\cdots 0,\ 0,\ 0,\ P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ \text{2c.}\cdots,$$

und nun von P_0 ab, jeden folgenden Koeffizienten dadurch findet, daß man die der Reihe nach vorhergehenden, mit den Giedern der Beziehungs-Skale, wie sie in ihrer Reihe folgen, multiplizirt, und zuletzt alle diese Produkte addirt.

Auch kann die Beziehungs-Skale unendlich viele Glieder haben.

Beyspiel. Man soll die dem Quotienten

$$\frac{3}{1-x+2x^3-x^4-2x^5}$$

gleiche unendliche Reihen hinschreiben.

Der gegebene Quotient wird $= 3$ für $x = 0$; also ist der erste Koeffizient P_0 der gesuchten Reihe, $= 3$.

Ferner ist die Beziehungs-Skale

$$1,\ 0,\ -2,\ 1,\ 2,$$

und daher:

$$P_0 = 3;$$
$$P_1 = 1\cdot 3 = 3;$$
$$P_2 = 1\cdot P_1 + 0\cdot P_0 = 3;$$
$$P_3 = 1\cdot P_2 + 0\cdot P_1 + (-2)\cdot P_0 = -3;$$
$$P_4 = 1\cdot P_3 + 0\cdot P_2 + (-2)\cdot P_1 + 1\cdot P_0 = -6;$$
$$P_5 = 1\cdot P_4 + 0\cdot P_3 + (-2)\cdot P_2 + 1\cdot P_1 + 2\cdot P_0 = -3;$$
$$P_6 = 1\cdot P_5 + 0\cdot P_4 + (-2)\cdot P_3 + 1\cdot P_2 + 2\cdot P_1 = 12;$$

u. s. w. f.;

und die gesuchte unendliche Reihe ist demnach

$$= 3 + 3x + 3x^2 - 3x^3 - 6x^4 - 3x^5 + 12x^6 + \cdots$$

Anmerkung. Man wäre noch leichter zum Ziele gelangt, wenn man den Quotienten

$$\frac{1}{1-x+2x^3-x^4-2x^5}$$

entwickelt, und selbigen dann mit 3 multiplizirt hätte, weil

$$\frac{A}{1+ax+bx^2+\cdots} = A\cdot\frac{1}{1+ax+bx^2+\cdots}$$ ist.

§. 570. Zusatz.

Hat ein gegebener Quotient, der in eine unendliche Reihe verwandelt werden soll, die Form

$$\frac{A}{1+ax^m+bx^{2m}+cx^{3m}+\cdots},$$

so ist es weit bequemer, z statt x^m zu setzen, den Quotienten

$$\frac{A}{1+az+bz^2+cz^3+\cdots}$$

in eine Reihe nach z zu entwickeln, und nachgehends x^m wiederum statt z zu substituiren.

Beyspiel. Es sey der Quotient

$$\frac{1}{1-2x^2-4x^4+x^8-3x^{10}}$$

in eine unendliche Reihe zu entwickeln.

Man setze $x^2 = z$, so wird der gegebene Quotient

$$= \frac{1}{1-2z-4z^2+z^4-3z^5},$$

und von der, diesem Quotienten gleichen unendlichen Reihe nach z, ist das erste Glied $= 1$, so wie die Beziehungs-Skale

$$2,\quad 4,\quad 0,\quad -1,\quad 3;$$

daher die Reihe selbst

$$1+2z+8z^2+24z^3+79z^4+255z^5+824z^6+\cdots;$$

folglich die gesuchte Reihe in x

$$1+2x^2+8x^4+24x^6+79x^8+255x^{10}+824x^{12}+\cdots \text{ in inf.},$$

welche dem gegebenen Quotienten

$$\frac{1}{1-2x^2-4x^4+x^8-3x^{10}}$$

gleich ist.

§. 571. Zusatz.

Man kann aber nun auch die allgemeine Aufgabe des (§. 565.) auf eine bequemere Art lösen. — Da nämlich

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots}{a+bx+cx^2+dx^3+\cdots} = \left(\frac{A}{a}+\frac{B}{a}x+\frac{C}{a}x^2+\frac{D}{a}x^3+\cdots\right) \times \frac{1}{1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x^3+\cdots}$$ ist,

so darf man nur den letzten Quotienten mittelst der Beziehungs-Skale

$$-\frac{b}{a},\quad -\frac{c}{a},\quad -\frac{d}{a},\quad \text{&c.}$$

in eine unendliche Reihe verwandeln und nachgehends diese unendliche Reihe

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots$$

wo $\alpha = 1$, mit der andern

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{a}x+\frac{C}{a}x^2+\frac{D}{a}x^3+\cdots$$

nach (§. 563.) multipliziren (so daß der Koeffizient von x^n im Produkte ebenfalls sogleich hingeschrieben werden kann) und dieses Produkt, welches eine nach x fortgehende unendliche Reihe ist, muß dann die, dem gegebenen Quotienten

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots}{a+bx+cx^2+dx^3+\cdots}$$

gleiche unendliche Reihe seyn.

Beyspiel. Man kann dieses allgemeine Beyspiel, wie folgt, ausführen. — Man bezeichnet die Reihe, welche

$$= \frac{1}{1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x^3+\cdots}$$ seyn soll.

durch $S[P_a \cdot x^a]$, so wird

$$P_0 = 1;$$

$$P_1 = -\frac{b}{a};$$

$$P_2 = -\frac{b}{a}\cdot P_1 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - ac}{a^2};$$

$$P_3 = -\frac{b}{a}\cdot P_2 - \frac{c}{a}P_1 - \frac{d}{a} = -\frac{b^3 - abc}{a^3} + \frac{bc}{a^2} - \frac{d}{a} = \frac{-b^3 + 2abc - a^2d}{a^3};$$

$$P_4 = -\frac{b}{a}\cdot P_3 - \frac{c}{a}P_2 - \frac{d}{a}P_1 - \frac{e}{a}P_0 = \frac{b^4 - 3ab^2c + 2a^2bd + a^2c^2 - a^3e}{a^4};$$

u. s. w. f.

Nun bildet man sich für die andere Reihe

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{a}x + \frac{C}{a}x^2 + \frac{D}{a}x^3 + \cdots$$

die Skale

$$Q\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \cdots \\ \frac{A}{a}, & \frac{B}{a}, & \frac{C}{a}, & \frac{D}{a}, & \frac{E}{a}, \cdots \end{matrix}\right\},$$

und hat dann für den Koeffizienten von x^n des gesuchten Produkts der beyden Reihen, das Aggregat

$$S\underset{a+b=n}{[Q_a \cdot P_b]},$$

d. h. die Summe

$$Q_n \cdot P_0 + Q_{n-1} \cdot P_1 + Q_{n-2} \cdot P_2 + Q_{n-3} \cdot P_3 + \cdots + Q_2 \cdot P_{n-2} + Q_1 \cdot P_{n-1} + Q_0 \cdot P_n,$$

in welcher man nur statt der Ausdrücke $P_n, \cdots P_0$ und $Q_n, \cdots Q_0$, die oben in den Skalen stehenden Ausdrücke setzen darf.

Wollte man z. B. den Koeffizienten von x^3 haben, in der gesuchten Reihe, so hätte man für ihn

$$S\underset{a+b=3}{[Q_a \cdot P_b]},$$

oder $$Q_3 \cdot P_0 + Q_2 \cdot P_1 + Q_1 \cdot P_2 + Q_0 \cdot P_3,$$

oder, wenn man die Skalen

$$\mathcal{P}\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3, \cdots \\ 1, & -\frac{b}{a}, & \frac{b^2 - ac}{a^2}, & \frac{-b^3 + 2abc - a^2d}{a^3} \cdots \end{matrix}\right\}$$

$$Q\left\{\begin{matrix} \frac{A}{a}, & \frac{B}{a}, & \frac{C}{a}, & \frac{D}{a} \cdots \end{matrix}\right\}$$

zu Hilfe nimmt:

$$\frac{D}{a} - \frac{b}{a}\cdot\frac{C}{a} + \frac{b^2-ac}{a^2}\cdot\frac{B}{a} - \frac{b^3-2abc+a^2d}{a^3}\cdot\frac{A}{a},$$

oder $$\frac{a^3D-a^2bC+ab^2B-a^2cB-b^3A+2abcA-a^2dA}{a^4}.$$

Eben so kann nun aber auch jeder andere Koeffizient der gesuchten unendlichen Reihe entwickelt werden.

§. 572. Aufgabe.

Eine gegebene unendliche Reihe

$$P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+\cdots,$$

oder $$S[P_a\cdot x^a],$$

mit einer absoluten ganzen Zahl m zu potenziren.

Auflösung I. und Beweis. Es ist nach dem polynomischen Lehrsatze (§. 406.)

$$(P_0+P_1\cdot x+P_2\cdot x^2+P_3\cdot x^3+\cdots)^m$$

$$= S\left[\frac{m!}{a!\ b!\ c!\ d!\cdots}\cdot(P_0)^a\cdot(P_1\cdot x)^b\cdot(P_2\cdot x^2)^c\cdot(P_3\cdot x^3)^d\cdots\right]_{a+b+c+d+\cdots=m}$$

$$= S\left[\frac{m!}{a!\ b!\ c!\ d!\cdots}\cdot P_0^a\cdot P_1^b\cdot P_2^c\cdot P_3^d\cdots x^p\right]_{\substack{a+b+c+d+\cdots=m\\ b+2c+3d+\cdots=p}}.$$

Also ist der Koeffizient von x^n in dieser mten Potenz:

$$= S\left[\frac{m!}{a!\ b!\ c!\ d!\cdots}\cdot P_0^a\cdot P_1^b\cdot P_2^c\cdot P_3^d\cdots\right]_{\substack{a+b+c+d+\cdots=m\\ b+2c+3d+\cdots=n}},$$

wo aber die beyden beschränkenden Gleichungen unendlich viele Unbekannte enthalten. — Bedenkt man indeß, daß wegen der zweyten Gleichung

$$b+2c+3d+\cdots=n,$$

oder $$b+2c+3d+\cdots+n\cdot n+(n+1)o+\cdots=n,$$

alle nach n folgenden Unbekannten nur den Werth Null haben können, und daß daher im allgemeinen Gliede, welches ein Produkt von unendlich vielen Faktoren zu seyn scheint, die nach den $n+1$ ersten folgenden dieser Faktoren $=1$ werden, und als

Faktoren außer Acht gelassen werden können, so folgt, daß die beyden beschränkenden Gleichungen

$$a+b+c+d+\cdots = m$$

und

$$b+2c+3d+\cdots = n,$$

mit scheinbar unendlich vielen Unbekannten sich reduziren auf die beyden andern

$$a+b+c+d+\cdots+p = m,$$
$$b+2c+3d+\cdots+np = n;$$

weshalb der Koeffizient von x^n gerade so wird, nämlich

$$= S\left[\frac{m!}{a!\,b!\,c!\cdots p!}\cdot P_0^a\cdot P_1^b\cdot P_2^c\cdot\cdots P_n^p\right]_{\substack{a+b+c+\cdots+p=m\\ b+2c+3d+\cdots np=n}}.$$

Auflösung II. Man findet den Koeffizienten von x^n auch noch auf folgende Art:

1) Man bilde sich den Zeiger

$$\begin{bmatrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7\cdots \\ P_0, & P_1, & P_2, & P_3, & P_4, & P_5, & P_6, & P_7\cdots \end{bmatrix}$$

2) Man entwickle die mte Kombinationsklasse mit Wiederholungen zur Summe n, aus den unendlich vielen Elementen

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

3) In jeder Verbindung setze man statt jedes Elementes, den im Zeiger gerade unter diesem Elemente stehenden Koeffizienten der gegebenen unendlichen Reihe, betrachte die so entstehenden Verbindungen als Produkte, setze einer jeden noch deren Versetzungszahl als Faktor vor, und addire alle diese Produkte: so hat man den verlangten Koeffizienten.

Beweis. Man kann nämlich die mte Potenz der Reihe als ein Produkt von m gleichen Faktoren ansehen; und solches ist, nach (§. 563.)

$$= S\left[P_a\cdot P_b\cdot P_c\cdot\cdots\cdot P_m\cdot x^p\right]_{a+b+c+d\cdots+m=p},$$

wo die Zahl der Durchlaufenden $= m$ ist; folglich ist der Koeffizient von x^n in dieser Potenz

$$= S\left[P_a \cdot P_b \cdot P_c \cdot \cdots \cdot P_m\right]_{a+b+c+\cdots+m=n}.$$

Wollte man nun dieses Aggregat wirklich entwickeln, so müßte man die beschränkende Gleichung

$$a+b+c+d+\cdots+m = n$$

auflösen, d. h. die mte Variationsklasse zur Summe n mit Wiederholungen, aus den Elementen 0, 1, 2, 3, ... entwickeln, und diese Werthe statt der durchlaufenden Buchstaben in das allgemeine Glied setzen. Weil sich aber das allgemeine Glied durch Versetzung der durchlaufenden Buchstaben gar nicht ändert, so kann man besser, statt der Variationsklasse, die Kombinationsklasse entwickeln, und jedem aus dem allgemeinen Gliede hervorgehenden Produkte noch dessen Versetzungszahl als Faktor vorsetzen.

Beyspiel. Es sey von der 5ten Potenz der unendlichen Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+gx^6+hx^7+\cdots$$

der Koeffizient x^7 zu finden.

Nach der ersten Auflösung

darf man nur das kombinatorische Aggregat

$$S\left[\frac{m!}{a!\ b!\ c!\ d!\ e!\ f!\ g!\ h!} \cdot a^a \cdot b^b \cdot c^c \cdot d^d \cdot e^e \cdot f^f \cdot g^g \cdot h^h\right]_{\substack{a+b+c+d+e+f+g+h=5 \\ b+2c+3d+4e+5f+6g+7h=7}}$$

entwickeln. Man löset aber die beyden beschränkenden Gleichungen

$$a+b+c+d+e+f+g+h = 5,$$
$$b+2c+3d+4e+5f+6g+7h = 7,$$

nach (§. 378.) auf, und erhält für die 5 ersten Kombinations-Klassen zur Summe 7, aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sogleich:

		0 1 2 3 4 5 6 7 a, b, c, d, e, f, g, h
7	hieraus	4 0 0 0 0 0 0 1
1 6		3 1 0 0 0 0 1 0
2 5		3 0 1 0 0 1 0 0
3 4	aber	3 0 0 1 1 0 0 0
1 1 5		2 2 0 0 0 1 0 0
1 2 4		2 1 1 0 1 0 0 0
1 3 3	die Auflösungen	2 1 0 2 0 0 0 0
2 2 3		2 0 2 1 0 0 0 0
1 1 1 4		1 3 0 0 1 0 0 0
1 1 2 3	rechts	1 2 1 1 0 0 0 0
1 2 2 2		1 1 3 0 0 0 0 0
1 1 1 1 3		0 4 0 1 0 0 0 0
1 1 1 2 2		0 3 2 0 0 0 0 0,

und daher der gesuchte Koeffizient von x^7 in der 5ten Potenz der gegebenen Reihe:

$$= 5a^4h + 20a^3bg + 20a^3cf + 20a^3de + 30a^2b^2f + 60a^2bce + 30a^2bd^2 + 30a^2c^2d + 20ab^3e + 60ab^2cd + 20abc^3 + 5b^4d + 10b^3c^2.$$

Nach der zweyten Auflösung

hätte man dagegen die 5te Kombinations-Klasse zur Summe 7, mit Wiederholungen aus den Elementen 0, 1, 2, 3, 4, ... zu entwickeln, nämlich

0 0 0 0 7
0 0 0 1 6
0 0 0 2 5
0 0 0 3 4
0 0 1 1 5
0 0 1 2 4
0 0 1 3 3
0 0 2 2 3
0 1 1 1 4
0 1 1 2 3
0 1 2 2 2
1 1 1 1 3
1 1 1 2 2

$$7\overset{5}{C}$$

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \cdots \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & \cdots \end{pmatrix}$$

also der gesuchte Koeffizient

$$= 5a^4h + 20a^3bg + 20a^3cf + 20a^3de + 30a^2b^2f + 60a^2bce + 30a^2bd^2 + 30a^2c^2d + 20ab^3e + 60ab^2cd + 20abc^3 + 5b^4d + 10b^3c^2;$$

derselbe, wie vorher.

Anmerkung 1. Man erhält namentlich auf demselben Wege

1) $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots)^2$

$$= a^2 + 2abx + \left\{\begin{matrix} 2ac \\ +b^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} 2ad \\ +2bc \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} 2ae \\ +2bd \\ +c^2 \end{matrix}\right\} x^4 + \cdots$$

2) $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots)^3$

$$= a^3 + 3a^2bx + \left\{\begin{matrix} 3a^2c \\ +3ab^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} 3a^2d \\ +6abc \\ +b^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} 3a^2e \\ +6abd \\ +3ac^2 \\ +3b^2c \end{matrix}\right\} x^4 + \cdots$$

Anmerkung 2. Den ersten Koeffizienten in der Entwickelung von $(a + bx + cx^2 + \cdots)^m$ erhält man (§. 561.), wenn man in dem zu entwickelnden Ausdruck $x = 0$ setzt. — Es ist daher solcher $= a^m$.

§. 573. Zusatz.

Wäre die mit m zu potenzirende Reihe eine endliche (eine ganze Funktion), wären also von einem bestimmten Koeffizienten ab, alle folgenden $= 0$, so kann man bey der Entwickelung des Koeffizienten von x^n in der mten Potenz der Reihe, sogleich diejenigen Verbindungen übergehen, in denen Elemente vorkommen, die jenen spätern Null-Koeffizienten entsprechen.

Beyspiel. Wäre in dem Beyspiel des (§. 572.) nur die endliche Reihe $a + bx + cx^2 + dx^3$ mit 5 zu potenziren, und der Koeffizient von x^7 zu finden, so würde man nach der Auflösung (I.) nur haben

0, 1, 2, 3	a, b, c, d
1 3 3	2, 1, 0, 2
2 2 3	2, 0, 2, 1
1 1 2 3	1, 2, 1, 1
1 2 2 2	1, 1, 3, 0
1 1 1 1 3	0, 4, 0, 1
1 1 1 2 2	0, 3, 2, 0

und der gesuchte Koeffizient wäre

$$= 30a^2bd^2 + 30a^2c^2d + 60ab^2cd + 20abc^3 + 5b^4d + 10b^3c^2.$$

Dagegen würde man nach der Auflösung (II.) blos haben den Zeiger:

0, 1, 2, 3

a, b, c, d;

daher auch nur:

0 0 1 3 3
0 0 2 2 3
0 1 1 2 3
0 1 2 2 2
1 1 1 1 3
1 1 1 2 2 ;

$$7\overset{5}{C}\begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & 3 \\ a, & b, & c, & d \end{pmatrix}$$

folglich der gesuchte Koeffizient von x^7 in der 5ten Potenz von

$$a + bx + cx^2 + dx^3,$$

$$= 30a^2bd^2 + 30a^2c^2d + 60ab^2cd + 20abc^3 + 5b^4d + 10b^3c^2.$$

§. 574. Zusatz.

Wäre gegeben die unendliche Reihe

$$a + bx^q + cx^{2q} + dx^{3q} + \text{ꝛc.} \cdots$$

und sollte solche mit m potenzirt werden, so würde es viel bequemer seyn, hier erst z statt x^q zu setzen, die Reihe

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \cdots$$

mit m zu potenziren, und in der neuen nach Potenzen von z fortlaufenden Reihe, wiederum x^q statt z zu setzen.

Beyspiel. Es kann dies aber angewandt werden auf die Potenzirung der Reihen

$$a + bx^2 + cx^4 + dx^6 + ex^8 + \cdots$$
$$a + bx^3 + cx^6 + dx^9 + ex^{12} + \cdots$$
$$a + bx^4 + cx^8 + dx^{12} + ex^{16} + \cdots$$

u. s. w. f.

§. 575. Zusatz.

Ist dagegen die mit der absoluten ganzen Zahl m zu potenzirende Reihe folgende

$$ax^p+bx^{p+q}+cx^{p+2q}+dx^{p+3q}+\cdots,$$

so wird man leichter das Potenziren verrichten, wenn man den Satz anwendet:

$$(ax^p+bx^{p+q}+cx^{p+2q}+dx^{p+3q}+\cdots)^m$$
$$= [x^p\cdot(a+bx^q+cx^{2q}+dx^{3q}+\cdots)]^m$$
$$= x^{pm}\cdot(a+bx^q+cx^{2q}+dx^{3q}+\cdots)^m,$$

und nun erst die Reihe

$$a+bx^q+cx^{2q}+dx^{3q}+\cdots$$

nach (§. 574.) mit m potenzirt, dann aber diese Potenz noch mit x^{pm} multiplizirt.

Beyspiele. Es kann dies aber angewandt werden bey der Potenzirung der Reihen

$$ax^2+bx^4+cx^6+dx^8+\cdots$$
$$ax^2+bx^5+cx^8+dx^{11}+\cdots$$
$$ax^5+bx^9+cx^{13}+dx^{17}+\cdots$$

u. s. w. f.

§. 576. Zusatz.

Man kann indeß die unendliche Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$$

auch noch auf folgende Art allgemein mit der absoluten ganzen Zahl m potenziren. Man setze

$$Rx = bx+cx^2+dx^3+\cdots,$$

oder
$$R = b+cx+dx^2+\cdots;$$

und hat dann nach (§. 401.)

$$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots)^m = (a+Rx)^m$$
$$= a^m+m\cdot a^{m-1}\cdot Rx+m_2\cdot a^{m-2}\cdot R^2\cdot x^2+m_3\cdot a^{m-3}\cdot R^3\cdot x^3+\cdots$$

Nun ist aber

$$K = b + cx + dx^2 + ex^3 + \cdots$$

$$R^2 = b^2 + 2bcx + \begin{bmatrix} 2bd \\ + c^2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 2be \\ + 2cd \end{bmatrix} x^3 + \cdots$$

$$R^3 = b^3 + 3b^2cx + \begin{bmatrix} 3b^2d \\ + 3bc^2 \end{bmatrix} x^2 + \cdots$$

u. ſ. w. f.;

folglich, wenn man dieſe Werthe ſubſtituirt:

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots)^m$$

$$= a^m + ma^{m-1}bx + \left\{ \begin{matrix} m \cdot a^{m-1}c \\ + m_2 \cdot a^{m-2}b^2 \end{matrix} \right\} x^2 + \left\{ \begin{matrix} m \cdot a^{m-1}d \\ + 2m_2 \cdot a^{m-2}bc \\ + m_3 \cdot a^{m-3}b^3 \end{matrix} \right\} x^3 +$$

$$\left\{ \begin{matrix} m \cdot a^{m-1}e \\ + 2m_2 \cdot a^{m-2}bd \\ + m_2 \cdot a^{m-2}c^2 \\ + 3m_3 \cdot a^{m-3}b^2c \end{matrix} \right\} x^4 + \cdots$$

Dieſe allgemeine Entwickelung für jede beliebige abſolute ganze Zahl m gibt aber die Auflöſung (I.) des (§. 572.) weit leichter, indem man den dort gefundenen Koeffizienten von x^n in der mten Potenz von

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots,$$

ſo ſchreibt:

$$S\left[\frac{m^{(b+c+d+\cdots+p)|-1}}{b!\ c!\ d! \cdots p!} \cdot P_0^{m-(b+c+d+\cdots+p)} \cdot P_1^b \cdot P_2^c \cdot P_3^d \cdots\cdots P_n^p \right]_{b+2c+3d+\cdots+np = n},$$

welches immer erlaubt iſt, weil, ſobald

$$b + c + d + \cdots + p > m$$

wird, dann wegen

$$m^{(b+c+d+\cdots+p)|-1} = 0$$

die Glieder, die negative Potenzen von P_0 enthalten könnten, der Null gleich werden.

§. 577. Zusatz.

Soll die Reihe

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots$$

mit der negativen ganzen Zahl $-m$ potenzirt werden, so wendet man den Satz an:

$$R^{-m}=\frac{1}{R^m},$$

potenzirt also die gegebene Reihe erst nach (§. 572.) mit der absoluten ganzen Zahl m, und dividirt dann die 1 durch diese Potenz

$$a^m+ma^{m-1}bx+\cdots,$$

welches eine rekurrirende Reihe gibt, die nach (§. 569.) leicht hingeschrieben werden kann.

Damit aber diese Aufgabe möglich ist, darf a^m nicht Null seyn, und also auch a nicht Null (§. 566.); d. h. sobald $a=0$, so gibt es nicht mehr eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe, die der Potenz $(a+bx+cx^2+\cdots)^{-m}$ gleich seyn könnte.

Der Zusatz (§. 575.) liefert aber für diesen Fall ein der Potenz R^{-m} gleiches Produkt, dessen einer Faktor $\frac{1}{x^{pm}}$, und dessen anderer Faktor eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe ist.

§. 578. Aufgabe.

Man soll die $m$te Wurzel aus einer unendlichen Reihe $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ ziehen, d. h. man soll abermals eine unendliche Reihe finden, welche mit m potenzirt, die unendliche Reihe

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

wieder gibt.

Auflösung. 1) Man nehme die gesuchte unendliche Reihe, mit unbestimmten Koeffizienten an, z. B.

$$P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+\cdots$$

2) Man potenzire solche mit m, und erhält:

$$P_0^m+m\cdot P_0^{m-1}P_1\cdot x+$$
$$\left\{\begin{matrix} m\cdot P_0^{m-1}P_2 \\ +m_2\cdot P_0^{m-2}P_1^2\end{matrix}\right\}x^2+\left\{\begin{matrix} m\cdot P_0^{m-1}P_3 \\ +2m_2\cdot P_0^{m-2}P_1P_2 \\ +m_3\cdot P_0^{m-3}P_1^3\end{matrix}\right\}x^3+\cdots$$

3) Da nun diese Potenz dem Radikanden

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$$

gleich seyn soll, so müssen in beyden Reihen auch die einzelnen Koeffizienten von x beziehlich einander gleich seyn (§. 559.), und man hat daher:

$$a_0=P_0^m;$$
$$a_1=m\cdot P_0^{m-1}P_1;$$
$$a_2=m\cdot P_0^{m-1}P_2+m_2\cdot P_0^{m-2}P_1^2;$$
$$a_3=m\cdot P_0^{m-1}P_3+2m_2\cdot P_0^{m-2}P_1P_2+m_3\cdot P_0^{m-3}P_1^3;$$
$$a_4=m\cdot P_0^{m-1}P_4+2m_2\cdot P_0^{m-2}P_1P_3+m_2\cdot P_0^{m-2}P_2^2+3m_3\cdot P_0^{m-3}P_1^2P_2;$$

u. s. w. f.

4) Die erste dieser Gleichungen gibt

$$P_0=\sqrt[m]{a_0},$$

also m verschiedene Werthe für P_0; die folgenden Gleichungen sind aber in Bezug auf jeden der übrigen Unbekannten P_1, P_2, P_3, P_4, ꝛc., einfache Gleichungen; und es gibt also eine jede folgende Gleichung auch für einen jeden folgenden Unbekannten P_1, P_2, P_3, P_4, ꝛc., nur einen Werth in P_0 ausgedrückt.

5) Je nachdem also statt P_0 einer der m Werthe von $\sqrt[m]{a_0}$ gesetzt wird, findet man sogleich m verschiedene unendliche Reihen, welche alle die Eigenschaft haben, daß sie mit m potenzirt, gerade die Reihe

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \text{ in inf.}$$

wiedergeben.

6) Man kann sich aber leicht überzeugen, daß wenn P_0 ein bestimmter Werth von $\sqrt[m]{a_0}$ ist, und $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ die für diesen Werth P_0 von P_0, zugehörigen Werthe von P_1, P_2, P_3, ꝛc., sind, alle diese m verschiedenen unendlichen Reihen, die als der Wurzel

$$\sqrt[m]{(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots)}$$

gleich gefunden worden sind, nothwendig enthalten seyn müssen in der Form

$$\sqrt[m]{1}\cdot(P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+P_4x^4+\cdots),$$

indem man statt $\sqrt[m]{1}$ nach und nach alle m Werthe dieser Wurzel setzt.

§. 579. Zusatz.

Man findet aber aus den Gleichungen (§. 578. Nr. 3.) leicht

$$P_1=\frac{a_1}{m\cdot P_0^{m-1}}=\frac{a_1\cdot P_0}{m\cdot P_0^m}=\frac{a_1}{ma_0}\cdot P_0;$$

$$P_2=\frac{a_2-m_2\cdot P_0^{m-2}\cdot P_1^2}{m\cdot P_0^{m-1}}=\frac{P_0a_2-m_2\cdot P_0^{m-1}P_1^2}{ma_0}$$

$$=\frac{a_2-m_2P_0^{m-2}P_1^2}{ma_0}\cdot P_0=\frac{a_2-m_2a_0\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^2}{ma_0}\cdot P_0$$

$$=\frac{a_2-m_2a_0\cdot\left(\frac{a_1}{ma_0}\right)^2}{ma_0}\cdot P_0=\frac{ma_0a_2-\frac{1}{2}(m-1)a_1^2}{m^2a_0^2}\cdot P_0;$$

$$P_3=\frac{a_3-m_3\cdot\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^3-2m_2a_0\cdot\frac{P_1}{P_0}\cdot\frac{P_2}{P_0}}{ma_0}\cdot P_0$$

$$=\frac{m_2a_0^2a_3-\frac{(m-1)(m-2)}{2\cdot3}a_1^3-(m-1)[ma_0a_2-\frac{1}{2}(m-1)a_1^2]a_1}{m_3a_0^3}\cdot P_0;$$

u. s. w. f.

Setzt man nun hier statt P_0 die Wurzel $\sqrt[m]{a_0}$, so erhält man alle Koeffizienten $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots$ durch $\sqrt[m]{a_0}$ ausgedrückt, und in allen diesen Ausdrücken repräsentirt dann die $\sqrt[m]{a_0}$ jedesmal einen und denselben, übrigens beliebigen ihrer m Werthe.

§. 580. Zusatz.

Es gehet aber ferner aus dem (§. 579.) hervor, daß die Aufgabe dieses (§. 578.) allemal möglich ist, so lange nicht $a_0 = 0$, daß sie aber jedesmal unmöglich seyn müsse, sobald $a_0 = 0$ ist, und a_1 nicht $= 0$.

Im Allgemeinen ist die Aufgabe noch möglich, wenn die ersten m Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \cdots$ zugleich Null sind, der folgende $m+1$te aber nicht Null ist; oder überhaupt wenn die ersten qm Koeffizienten der gegebenen Reihe zugleich Null sind, während der nächstfolgende $qm+1$te nicht der Null gleich ist.

Dagegen ist sie allemal unmöglich, wenn die Anzahl der ersten Koeffizienten der gegebenen Reihe, die Null werden, kein Vielfaches von m ist.

Es erhellet dies aber zunächst aus den Gleichungen (§. 578. Nr. 3.). Besser und allgemeiner indessen überzeugt man sich hiervon, wenn man, im Falle q erste Koeffizienten der gegebenen Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

der Null gleich seyn sollten, so daß die Reihe selbst mit dem Gliede $A_0 \cdot x^q$ anfängt, selbige so schreibt:

$$x^q \cdot (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots),$$

wo A_0 nicht Null ist. — Nun ist aber

$$\sqrt[m]{(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)} = \sqrt[m]{[x^q \cdot (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots)]}$$
$$= \sqrt[m]{(x^q)} \cdot \sqrt[m]{(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots)}$$
$$= \sqrt[m]{(x^q)} \cdot (P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \cdots);$$

in so ferne, weil A_0 nicht Null ist, der zweyte Faktor sich immer

in eine unendliche Reihe (nach ganzen Potenzen von x, denn von solchen ist hier nur die Rede) entwickeln läßt. Gibt es nun eine ganze Potenz x^r, welche einem der m Werthe der $\sqrt[m]{(x^q)}$ gleich ist, so gibt solche, mit $(P_0+P_1x^1+P_2x^2+\cdots)$ multiplizirt, die Reihe

$$P_0x^r+P_1x^{r+1}+P_2x^{r+2}+\cdots$$

zum Resultat, und die Aufgabe ist dann möglich. Soll aber $x^r=\sqrt[m]{(x^q)}$ seyn, so muß auch

$$(x^r)^m=x^q, \quad \text{oder} \quad x^{mr}=x^q, \quad \text{oder} \quad mr=q$$

seyn; d. h. q muß ein Vielfaches von m seyn, wenn die Aufgabe möglich seyn soll; und ist q kein Vielfaches von m, so gibt es keine ganze Potenz von x, welche einem der m Werthe von $\sqrt[m]{(x^q)}$ gleich seyn könnte, und die Aufgabe des (§. 578.) ist daher in diesem Falle unmöglich.

Anmerkung. Bey diesen und ähnlichen Untersuchungen kann man sich am leichtesten überzeugen, daß wenn $P_1=\frac{a_1}{mP_0^{m-1}}$ und $P_0=0$ ist, dann $P_1=\frac{a_1}{0}$ nicht etwas Unendliches ausdrücke, sondern daß das Resultat $P_1=\frac{a_1}{0}$, sobald a_1 nicht 0 ist, anzeige, daß die Gleichung $mP_0^{m-1}P_1=a_1$, in diesem Fall einen Widerspruch enthalte, und also lehre, daß die Annahme, welche zu dieser Gleichung führte, in diesem Fall nicht statt findet. — Hier ist immer angenommen, daß es eine unendliche Reihe $P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+\cdots$ wirklich gibt, welche die verlangte Eigenschaft hat. — Führt nun diese Annahme auf einen Widerspruch, so findet sie selbst nicht statt; und es gibt also dann keine unendliche Reihe von der Form

$$P_0+P_1x+P_2x^2+\cdots,$$

welche die verlangte Eigenschaft hätte.

§. 581. Aufgabe.

Es ist gegeben die Gleichung

1) $x=by+cy^2+dy^3+ey^4+\cdots$ in inf.

Man soll die Koeffizienten β, γ, δ, ε ꝛc. der Gleichung

$$2) \quad y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \cdots \text{ in inf.}$$

so bestimmen, daß diese unendliche Reihe rechts statt y in obige Gleichung

$$x = by + cy^2 + dy^3 + \cdots$$

gesetzt, selbige identisch mache.

Auflösung. Man hat:

$$y = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 + \cdots,$$

$$\text{daraus } y^2 = \beta^2 x^2 + 2\beta\gamma x^3 + \left[\begin{matrix} 2\beta\delta \\ +\gamma^2 \end{matrix}\right] x^4 + \left[\begin{matrix} 2\beta\varepsilon \\ +2\gamma\delta \end{matrix}\right] x^5 + \cdots$$

$$y^3 = \beta^3 x^3 + 3\beta^2\gamma x^4 + \left[\begin{matrix} 3\beta^2\delta \\ +3\beta\gamma^2 \end{matrix}\right] x^5 + \cdots$$

$$y^4 = \beta^4 x^4 + 4\beta^3\gamma x^5 + \cdots$$

$$y^5 = \beta^5 x^5 + \cdots;$$

und diese Werthe in obige gegebene Gleichung (2.) beziehlich statt y, y^2, y^3, y^4, ꝛc. gesetzt, geben:

$$x = b\beta x + \left\{\begin{matrix} b\gamma \\ +c\beta^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left\{\begin{matrix} b\delta \\ +2c\beta\gamma \\ +d\beta^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left\{\begin{matrix} b\varepsilon \\ +2c\beta\delta \\ +c\gamma^2 \\ +3d\beta^2\gamma \\ +e\beta^4 \end{matrix}\right\} x^4 + \cdots$$

Damit nun diese Gleichung identisch ist, müssen die Koeffizienten einzeln einander gleich, folglich die rechts nach dem ersten folgenden, der Null gleich seyn. Es wird daher

$$1 = b\beta,$$
$$0 = b\gamma + c\beta^2,$$
$$0 = b\delta + 2c\beta\gamma + d\beta^3,$$
$$0 = b\varepsilon + 2c\beta\delta + c\gamma^2 + 3d\beta^2\gamma + e\beta^4,$$

u. s. w. f.:

woraus die Koeffizienten β, γ, δ, ε ꝛc., einzeln gefunden werden können. Man erhält aber

$$\beta = \frac{1}{b},$$

$$\gamma = -\frac{c}{b^3},$$

$$\delta = \frac{-db+2c^2}{b^5} = \frac{2c^2-bd}{b^5},$$

$$\varepsilon = \frac{-eb^2+5dbc-5c^3}{b^7} = -\frac{5c^3-5bcd+b^2e}{b^7},$$

u. s. w. f.

Zugleich erhellet, daß für $b = 0$, die Aufgabe selbst unmöglich ist.

Anmerkung 1. Man könnte verlangen, die Koeffizienten α, β, γ, δ, ε, ... so zu bestimmen, daß

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots$$

statt y gesetzt, die Gleichung

$$x = by+cy^2+dy^3+ey^4+\cdots$$

zur identischen macht. Man erhielte dann auf demselben Wege zur Bestimmung von α, β, &c., die Gleichungen

$$b\alpha+ c\alpha^2+ d\alpha^3+ e\alpha^4+\cdots = 0,$$
$$\beta(b+2\alpha c +3\alpha^2 d+4\alpha^3 e+\cdots) = 1,$$

u. s. w.

Der ersten dieser Gleichungen wird genügt, indem man $\alpha = 0$ setzt; allein es kann ihr auch noch durch unendlich viele andere Werthe von α genügt werden; und weil die übrigen Gleichungen in Bezug auf β, γ, δ, &c., einfache sind, so kann zu jedem Werth von α jedesmal ein zugehöriger Werth von β, und einer von γ, und einer von δ u. s. w. gefunden werden, und es gibt daher unendlich viele Reihen nach y, die alle die verlangte Eigenschaft haben. Die eine, die sich für $\alpha = 0$ ergibt, ist dann wieder die in der Aufgabe des (§.) gesuchte und in der Auflösung desselben gefundene.

Anmerkung 2. Es hätte auch noch allgemeiner die Gleichung

$$y = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\cdots \text{ in inf.}$$

gesucht werden können, welche der Gleichung

$$x = a+by+cy^2+dy^3+\cdots$$

ein Genüge leistet. — Dasselbe Verfahren liefert zur Bestimmung

von α, β, γ, δ, ꝛc., die Gleichungen

$$a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 + \cdots = 0,$$
$$\beta(b + 2\alpha c + 3\alpha^2 d + 4\alpha^3 e + \cdots) = 1;$$

u. ſ. w. f.

Die erſte dieſer Gleichungen kann wiederum für α unendlich viele Werthe geben, während die übrigen Gleichungen zu jedem Werth von α, zugehörige Werthe von β, γ, ꝛc., geben, ſo daß es im Allgemeinen wiederum unendlich viele Reihen gibt, welche die verlangte Eigenſchaft haben.

§. 582. Zuſatz.

Iſt gegeben die Gleichung

$$by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots \text{ in inf.} = Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \cdots \text{ in inf.}$$

und ſoll man die Koeffizienten der Reihe

$$\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \cdots$$

finden, welche ſtatt y geſetzt, die gegebene Gleichung identiſch macht, ſo erhält man auf demſelben Wege

$$B = b\beta,$$
$$C = b\gamma + c\beta^2,$$
$$D = b\delta + 2c\beta\gamma + d\beta^3,$$
$$E = b\varepsilon + 2c\beta\delta + c\gamma^2 + 3d\beta^2\gamma + e\beta^4,$$
u. ſ. w. f.;

woraus β, γ, δ, $\varepsilon \cdots$ beſtimmt werden können.

Iſt $b = 0$ aber nicht $B = 0$, ſo iſt die Aufgabe nicht möglich. Iſt aber $b = 0$ und zugleich $B = 0$, ſo erhält man

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{C}{c}\right)},$$

und aus den übrigen Gleichungen zu jedem Werth von β, einen zugehörigen Werth von γ, von δ, ꝛc., ſo daß dann zwey Reihen gefunden werden, welche alle beyde die verlangte Eigenſchaft haben; wenn nur nicht $c = 0$ iſt. — Iſt außer $B = b = 0$, noch $c = 0$ und nicht $C = 0$, ſo iſt die Aufgabe nicht möglich. — Iſt aber außer $B = b = 0$ noch $c = 0$ und zugleich $C = 0$, ſo erhält man 3 Reihen, welche alle 3 die verlangte Eigenſchaft haben; u. ſ. w. f.

Anmerkung 1. Man könnte wieder die Reihe verlangen

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \cdots ,$$

welche der Gleichung

$$by + cy^2 + dy^3 + \cdots = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots ,$$

oder der allgemeinern Gleichung

$$a + by + cy^2 + dy^3 + \cdots = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$$

ein Genüge leistete, und man würde wieder zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \cdots$, Gleichungen erhalten, deren erste auf der einen Seite eine nach α fortgehende unendliche Reihe wäre, und deshalb im Allgemeinen für α unendlich viele Werthe geben könnte, während die übrigen Koeffizienten vermöge der übrigen Gleichungen, zu jedem dieser Werthe von α, einen einzigen Werth erhalten, so daß es unendlich viele Reihen gibt, welche alle dieselbe verlangte Eigenschaft haben. —

Anmerkung 2. Die Aufgaben (§. 581.) und (§. 582.) gehören zu denen, die unter dem Namen der „Aufgaben über die Umkehrung der Reihen“ bekannt sind, und die man auch Reversionsprobleme nennt.

§. 583. Zusatz.

Die Auflösung der Aufgabe (§. 581.) gilt auch noch, wenn die gegebene Gleichung

$$x = by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + \cdots$$

rechts eine endliche Reihe vom Grade m enthält; in welchem Falle diese Gleichung in Bezug auf y eine höhere Gleichung vom mten Grade wird, wo x oder vielmehr $-x$ der letzte Koeffizient ist.

Anmerkung. Man erhält sonach in diesem Fall unendliche Reihen für die m Wurzelwerthe der höhern Gleichung vom mten Grade in y, welche für eine numerische Gleichung die numerischen Wurzelwerthe geben, sobald sie konvergent sind, oder konvergent gemacht werden können.

§. 584. Aufgabe.

Es ist gegeben die unendliche Reihe

$$P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + \cdots ,$$

oder $S[P_a \cdot x^a]$,

die durch $F(x)$ bezeichnet seyn mag. Man soll $F(x+h)$, d. h. das was aus $F(x)$ wird, wenn man $x+h$ statt x setzt, in eine nach ganzen Potenzen von h fortgehende unendliche Reihe verwandeln.

Auflösung. Es ist nach (§. 401.):

$$F(x+h) = S[P_a \cdot (x+h)^a] = S\left[\frac{(b+c)!}{b!\ c!} \cdot P_a \cdot x^b \cdot h^c\right]_{b+c=a}$$

$$= S\left[\frac{(b+c)!}{b!\ c!} \cdot P_{b+c} \cdot x^b \cdot h^c\right] = S\left[(b+c)^{c|-1} \cdot P_{b+c} \cdot \frac{h^c}{c!}\right],$$

welches die verlangte unendliche Reihe ist.

Anmerkung. In dieser nach h fortgehenden Reihe sind die Koeffizienten $S[P_b \cdot x^b]$, $S[(b+1) \cdot P_{b+1} \cdot x^b]$, $S[(b+2)^{2|-1} \cdot P_{b+2} \cdot x^b]$, u. s. w. f. selber wieder nach x fortgehende unendliche Reihen.

§. 585. Zusatz.

1) Ist die gegebene unendliche Reihe $F(x)$ durch das kombinatorische Aggregat

$$S[P_a \cdot x^a]$$

dargestellt, so daß

$$F(x) = S[P_a \cdot x^a] \quad \text{ist,}$$

so ist allemal

$$\partial F(x) = S[(a+1) \cdot P_{a+1} \cdot x^a]. \quad —$$

Denn es ist eigentlich nach der Definition des (§. 436.)

$$\partial F(x) = S[a \cdot P_a \cdot x^{a-1}];$$

weil aber hier das erste Glied für $a = 0$ jedesmal selber zu Null wird, so kannn man sogleich, nach (§. 389.) $a+1$ statt a setzen, und erhält dann das Behauptete.

2) Ist also $F(x) = S[P_a \cdot x^a]$,

so ist $\partial F(x) = S[(a+1) \cdot P_{a+1} \cdot x^a]$;

dann aber auch aus demselben Grunde

$$\partial^2 F(x) = S[(a+2)^{2|-1} \cdot P_{a+2} \cdot x^a],$$
$$\partial^3 F(x) = S[(a+3)^{3|-1} \cdot P_{a+3} \cdot x^a],$$
$$\vdots$$
$$\partial^n F(x) = S[(a+n)^{n|-1} \cdot P_{a+n} \cdot x^a].$$

3) Daher ist auch, wenn F(x) eine unendliche Reihe nach x bezeichnet, jedesmal nach (§. 584.):

$$F(x+h) = S\left[\partial^a F(x) \cdot \frac{h^a}{a!}\right],$$

d. h.

$$F(x+h) = F(x) + \partial F(x) \cdot h + \partial^2 F(x) \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 F(x) \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots \text{ in inf.}$$

wodurch der (§. 440.) aufgestellte (Taylor'sche) Lehrsatz, für unendliche Reihen verallgemeinert ist.

§. 586. Zusatz.

Setzt man daher in einer unendlichen Reihe F(x), p+qi statt x, so erhält man

$$F(p+qi) = F(p) + \partial F(p) \cdot qi + \frac{\partial^2 F(p)}{2!} \cdot q^2 i^2 + \frac{\partial^3 F(p)}{3!} \cdot q^3 i^3$$
$$+ \frac{\partial^4 F(p)}{4!} \cdot q^4 i^4 + \frac{\partial^5 F(p)}{5!} \cdot q^5 i^5 + \frac{\partial^6 F(p)}{6!} \cdot q^6 i^6 + \cdots$$
$$+ \frac{\partial^{2n} F(p)}{(2n)!} \cdot q^{2n} \cdot i^{2n} + \frac{\partial^{2n+1} F(p)}{(2n+1)!} \cdot q^{2n+1} \cdot i^{2n+1} + \cdots\cdots,$$

oder

$$F(p+qi)$$
$$= F(p) - \frac{\partial^2 F(p)}{2!} \cdot q^2 + \frac{\partial^4 F(p)}{4!} \cdot q^4 - \cdots \pm \frac{\partial^{2n} F(p)}{(2n)!} q^{2n} \pm \cdots$$
$$+ i\left[\frac{\partial F(p)}{1} \cdot q - \frac{\partial^3 F(p)}{3!} \cdot q^3 + \frac{\partial^5 F(p)}{5!} \cdot q^5 \cdots \pm \frac{\partial^{2n+1} F(p)}{(2n+1)!} q^{2n+1} \pm \cdots\right]$$

wo die (+)-Zeichen gelten, wenn n eine gerade Zahl, die (—)-Zeichen dagegen, wenn n ungerade ist.

Anmerkung. Besser noch ist es, in der Formel (§. 586. Nr. 3.) nach (§. 387.) 2a und 2a+1 statt a zu setzen, so daß man erhält

$$F(x+h)=S\left[\partial^{2a}F(x)\cdot\frac{h^{2a}}{(2a)!}\right]+S\left[\partial^{2a+1}F(x)\cdot\frac{h^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

woraus dann sogleich hervorgeht

$$F(p+qi)=S\left[\partial^{2a}F(p)\cdot(-1)^a\cdot\frac{q^{2a}}{(2a)!}\right]$$
$$+i\cdot S\left[\partial^{2a+1}F(p)\cdot(-1)^a\cdot\frac{q^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

welches die Formel des (§. 586.) ist, viel bestimmter und eleganter noch ausgedrückt.

Zweyte Abtheilung.

Von den numerischen unendlichen Reihen und ihrer Konvergenz.

---

§. 587. Lehrsatz.

Die mit lauter gleichen reelen Koeffizienten versehene, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe

$$A+Az+Az^2+Az^3+Az^4+Az^5+\ldots \text{ in inf.}$$

konvergirt allemal, wenn $z<1$, divergirt aber allemal, wenn $z\geqq 1$.

Beweis. Weil die gegebene unendliche Reihe nichts weiter ist, als das Produkt aus A und dieser andern Reihe

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\ldots \text{ in inf.};$$

so darf man blos von dieser letztern die erstern Glieder addiren, nach (§. 451.), und man erhält für ihre Summe

$$\frac{1-z^n}{1-z}, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1-z}-\frac{z^n}{1-z}.$$

Da nun z^n für $z<1$ der Null bis auf den Moment des Verschwindens nahe rückt *), während dasselbe $z^n, =\infty$ wird, so oft $z>1$, so folgt

---

*) Daß $z^n=0$ oder $=\infty$ wird, je nachdem $z<1$ oder >1 ist, kann, wie folgt, noch besonders bewiesen werden. Ist nämlich $z<1$,

nach (§. 556.), daß diese Reihe konvergirt für $z<1$; divergirt dagegen für $z>1$. — Für $z = 1$ wird sie

$$= 1+1+1+1+1+1\cdots \text{ in inf.},$$

folglich divergent.

Anmerkung. Wir sagen, daß die Summe der gegebenen unendlichen Reihe $= \frac{A}{1-z}$ ist, so oft $z<1$, d. h. so oft die Reihe konvergirt. Dies ist dahin zu deuten, daß die Summe der ersten Glieder der Reihe, dem $\frac{A}{1-z}$ desto näher rückt, je mehr Glieder man nimmt, und daß bey einer immer größern Anzahl von Gliedern, der Unterschied zwischen ihrer Summe und $\frac{A}{1-z}$ endlich in den Moment des Verschwindens rückt.

§. 588. Lehrsatz.

Eine numerische unendliche Reihe ist konvergent, wenn sie von irgend einem mten Gliede ab, konvergent wird.

Beweis. Denn die Summe der ersten m Glieder, so groß auch m seyn mag, ist doch immer endlich, wenn vielleicht auch sehr groß.

§. 589. Lehrsatz.

Stellt P eine numerische unendliche Reihe mit reelen und positiven Gliedern vor, deren Konvergenz außer Zweifel gesetzt

---

so ist $z = \frac{1}{1+q}$, wo q zwischen 0 und ∞ liegt und positiv ist. Dann ist $z^n = \frac{1}{(1+q)^n}$; aber $(1+q)^n = 1+nq+n_2 \cdot q^2+n_3 \cdot q^3+\cdots$ (nach §. 401.); folglich $(1+q)^n > 1+nq$ und $\frac{1}{(1+q)^n} < \frac{1}{1+nq}$. Für $n=\infty$ wird aber $1+nq$ ebenfalls ∞; also ist dann $\frac{1}{1+nq}$ im Moment des Verschwindens, mithin ist z^n für $n = \infty$ im Moment des Verschwindens, wenn nämlich $z<1$. —

Ist aber $z>1$, so ist $z = 1+q$, wo q positiv und zwischen 0 und ∞ liegt; und $z^n = 1+nq+n_2 \cdot q^2+n^3 \cdot q^3+\cdots$, d. h. $z^n > 1+nq$, mithin $z^n = \infty$ für $n = \infty$.

ist; und ist Q eine zweyte Reihe, welche von einem gewissen Gliede ab, nach der Ordnung, beziehlich dieselben oder kleinere Glieder hat als die erstere P, mögen sonst ihre Glieder alle positiv oder zum Theil negativ seyn, so ist Q nothwendig ebenfalls konvergent.

Beyspiel. So ist z. B. die unendliche Reihe

$$1+\frac{3}{1}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\frac{3^5}{5!}+\frac{3^6}{6!}+\frac{3^7}{7!}+\frac{3^8}{8!}+\frac{3^9}{9!}+\cdots$$

nothwendig konvergent, weil von dem Gliede $\frac{3^8}{8!}$ an, welches $=\frac{6561}{6720}$, also kleiner als 1 ist, ihre Glieder gegen die Glieder dieser andern Reihe

$$1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots,$$

deren Konvergenz nach (§. 587.) feststeht, beziehlich kleiner sind, in so ferne jedes folgende Glied im Zähler den Faktor 3, im Nenner dagegen die Faktoren 10, 11, 12, 13 ꝛc. ꝛc. mehr bekommt, also jedes folgende Glied, das $\frac{3}{10}$-, $\frac{3}{11}$-, $\frac{3}{12}$-, $\frac{3}{13}$-, $\frac{3}{14}$- ꝛc. ꝛc.-fache des vorhergehenden, also kleiner ist, als wenn es jedesmal das $\frac{1}{3}$fache des vorhergehenden wäre.

Um so mehr ist aber konvergent die unendliche Reihe

$$1-\frac{3}{1}+\frac{3^2}{2!}-\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}-\frac{3^5}{5!}+\frac{3^6}{6!}-\cdots$$

Beweis fällt in die Augen.

§. 590. Zusätze.

1) Ist irgend eine nach ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe

$$A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots \text{ in inf.}$$

mit reelen Koeffizienten für irgend einen absoluten Werth $x=\alpha$ konvergent, so ist sie allemal für jeden noch kleinern Werth von α um so sicherer konvergent.

2) Ist in der unendlichen Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \cdots \text{ in inf.}$$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ der größte unter den Quotienten je zweyer auf einander folgender Koeffizienten; so ist diese unendliche Reihe für jeden Werth α von x konvergent, der $< \frac{a_{n-1}}{a_n}$ ist.

Denn es ist dann

$$\alpha < \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{und} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \alpha < 1.$$

Nun ist aber das $(n+1)$te Glied der Reihe, das $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \alpha$ fache des nächstvorhergehenden, und jedes der übrigen Glieder kleiner, als das $\frac{a_n}{a_{n-1}} \alpha$ fache des vorhergehenden (weil z. B. $\frac{a_3}{a_2} < \frac{a_n}{a_{n-1}}$, also auch $\frac{a_3}{a_2} \alpha < \frac{a_n}{a_{n-1}} \alpha$), während $\frac{a_n}{a_{n-1}} \alpha < 1$ ist: folglich ist die Reihe selbst für diesen Werth α von x, konvergent.

3) Wird der Quotient des $(n+1)$ten Koeffizienten durch den nten, immer größer, je größer n wird; geschieht aber dieses Größerwerden nach einem solchen Gesetz, daß keiner dieser Quotienten eine bestimmte Zahl $\frac{Q}{P}$ übersteigen kann, so darf man nur $x < \frac{P}{Q}$ nehmen, und die Reihe muß für jeden solchen Werth von x allemal konvergent seyn, wie unmittelbar aus (Nr. 2.) hervorgeht.

4) Es gibt daher auch Reihen, welche für jeden Werth von x konvergent sind. Dahin gehört z. B.

$$S\left[\frac{x^a}{a!}\right], \text{ d. h. } 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \text{ in inf.}$$

Denn dividirt man das $n+1$te Glied $\frac{x_n}{n!}$, durch das nte Glied

$\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, so erhält man $\frac{x}{n}$, und dieses $\frac{x}{n}$ ist, wie groß auch x genommen werden mag (in so ferne n immer noch größer werden kann) von einem gewissen nten Gliede ab, allemal kleiner als 1, und dann immer kleiner, je weiter die Glieder genommen werden. Also konvergirt die gegebene Reihe von diesem nten Gliede ab, schneller als die geometrische

$$\frac{x}{n}+\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{x}{n}\right)^3+\left(\frac{x}{n}\right)^4+\cdots,$$

deren Konvergenz nach (§. 587.) bereits feststeht.

Dahin gehören aber deswegen auch z. B. diese vier andern unendlichen Reihen

$$S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right], \quad \text{oder} \quad x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots \text{ in inf.},$$

$$S\left[(-1)^a\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right], \quad \text{oder} \quad x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \text{ in inf.},$$

$$S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right], \quad \text{oder} \quad 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots \text{ in inf.},$$

$$S\left[(-1)^a\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right], \quad \text{oder} \quad 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \text{ in inf.},$$

welche für jeden Werth von x konvergent sind.

§. 591. Lehrsatz.

Setzt man in der unendlichen Reihe

$$p+pz+pz^2+pz^3+\cdots \text{ in inf.},$$

wo p reel ist und absolut, $z<\frac{1}{2}$, so wird das erste Glied p größer als die Summe aller übrigen unendlich vielen Glieder der gegebenen Reihe.

Denn es ist die gegebene Reihe für $z<1$, $=\frac{p}{1-z}$. Ist daher $z<\frac{1}{2}$, so ist $1-z>\frac{1}{2}$ und $\frac{p}{1-z}<2p$; daher der Lehrsatz erwiesen.

§. 592. Zusatz.

Hieraus folgt:

1) Ist in einer numerischen Reihe jedes folgende Glied kleiner

als die Hälfte des vorhergehenden, und sind dabey alle Glieder reel, so ist das erste Glied dieser Reihe jedesmal größer, als die arithmetische Summe aller übrigen (unendlich vielen) Glieder derselben Reihe.

2) Eine solche Reihe ist daher einer positiven oder negativen Zahl gleich, je nachdem das erste Glied derselben positiv oder negativ ist.

§. 593. Zusatz.

Ist $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ der größte Quotient je zweyer auf einander folgender Koeffizienten der Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \text{ in inf.},$$

so ist das erste Glied diesee Reihe, d. h. a_0, größer, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder, für jeden Werth α von z, der gleich oder kleiner ist, als $\frac{a_{n-1}}{2a_n}$. —

Denn es ist jedes folgende Glied gleich oder kleiner, als das $\frac{a_n}{a_{n-1}}\alpha$fache des vorhergehenden. Da nun $\alpha \leqq \frac{a_{n-1}}{2a_n}$ ist, so ist $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \alpha \leqq \frac{1}{2}$, also jedes folgende Glied kleiner, als die Hälfte des vorhergehenden.

§. 594. Zusatz.

Wird der Quotient $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ größer, je größer n ist, doch so, daß er nie eine gewisse Grenze $\frac{Q}{P}$ überschreiten kann, so ist das erste Glied a_0 dieser Reihe größer, als die arithmetische Summe aller übrigen Glieder für jeden Werth α von x, der $\leqq \frac{P}{2Q}$ ist.

Denn es ist dann auch jedes folgende Glied gleich oder kleiner, als die Hälfte des vorhergehenden.

§. 595. Lehrsatz.

Bezeichnet $F(x)$ eine unendliche Reihe

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \text{ in inf.},$$

und sind $F(x)$, $\partial F(x)$, $\partial^2 F(x)$, $\partial^3 F(x)$, $\partial^4 F(x)$, ꝛc. ꝛc., bis in's Unendliche fort, für jeden Werth von x zwischen α und β (wo α und β beliebig positiv, negativ oder auch Null sind) konvergent, so geht die unendliche Reihe zwischen α und β für x, stetig fort, d. h. für je zwey sehr nahe liegende Werthe von x, zwischen α und β, ist der Unterschied H der zugehörigen Werthe der Reihe $F(x)$, von dem Unterschiede h der beyden Werthe von x, dergestalt abhängig, daß H desto kleiner wird, je kleiner man h nimmt, und daß H kleiner werden kann, als jede noch so kleine aber gegebene Zahl D.

Beweis. Es ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze (§. 585. Nr. 3.):

$$H = F(x+h)-F(x) = \left[\partial F(x)+\partial^2 F(x)\cdot\frac{h}{2!}+\partial^3 F(x)\cdot\frac{h^2}{3!}+\cdots\right]h.$$

Man kann nun, wegen der Voraussetzungen, h klein genug nehmen, daß nach (§§. 591.—594.):

$$\partial F(x) > \partial^2 F(x)\cdot\frac{h}{2!}+\partial^3 F(x)\cdot\frac{h^2}{3!}+\cdots,$$

daß daher auch wird

$$H = F(x+h)-F(x) < 2\partial F(x)\cdot h.$$

Nimmt man nun $h \leqq \frac{D}{2\partial F(x)}$, so wird auch $H < D$, für jeden Werth von x zwischen α und β.

§. 596. Zusatz.

Sind $F(x)$, $\partial F(x)$, $\partial^2 F(x)$, $\partial^3 F(x)$, ꝛc. ꝛc. in inf. für jeden möglichen reelen Werth von x konvergent, so geht $F(x)$ mit den sich stetig ändernden Werthen von x, beständig stetig fort.

Anmerkung 1. Es kann aber $F(x)$ bald größer, bald kleiner werden, während x immerfort größer wird, und es hängt solches für

ein sehr kleines h, vom Zeichen der Ableitung $\partial F(x)$ ab, für einen gegebenen Werth von x.

Anmerkung 2. Daher sind die Reihen des (§. 590. Nrn. 4. und 5.) nicht blos für jeden Werth von x konvergent, sondern sie ändern sich auch stetig mit den stetig sich ändernden Werthen von x zugleich. — Denn es ist

$$\partial \cdot \left(S\left[\frac{x^a}{a!}\right]\right) = S\left[\frac{(a+1)x^a}{(a+1)!}\right] = S\left[\frac{x^a}{a!}\right],$$

$$\partial \cdot \left(S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]\right) = S\left[\frac{(2a+1)x^{2a}}{(2a+1)!}\right] = S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right] \text{ und}$$

$$\partial^2 \cdot \left(S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]\right) = \partial \cdot \left(S\left[\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]\right) = S\left[\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right];$$

woraus hervorgeht, daß, wenn F(x) eine dieser fünf Reihen des (§. 590. Nrn. 4. und 5.) vorstellt, dann wirklich, sowohl F(x) als auch die Ableitungen $\partial F(x)$, $\partial^2 F(x)$, $\partial^3 F(x)$, $\partial^4 F(x)$, ꝛc., in's Unendliche fort, weil sie immer eine dieser Reihen selbst wieder vorstellen, für jeden Werth von x konvergiren.

§. 597. Lehrsatz.

Geht eine unendliche Reihe F(x) oder

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ ꝛc. ꝛc. in inf.},$$

mit den zwischen α und β stetig sich ändernden Werthen von x stetig fort, und wird dabey F(x) für $x = \alpha$ positiv und $= +A$, dagegen für $x = \beta$ negativ und $= -B$, so liegt zwischen α und β wenigstens ein reeler, rationaler oder irrationaler Werth, der statt x gesetzt, die unendliche Reihe zu Null macht.

Beweis. Denn da F(x) für die Werthe von x zwischen α und β stetig sich ändert, so gehen ihre Werth von $+A$ zu $-B$ stetig fort, also nothwendig durch Null hindurch, während dem x alle reelen Werthe zwischen α und β beygelegt werden.

Schluß-Anmerkung.

Wir glauben aber am Schlusse dieses Kapitels nochmals besonders bemerken zu müssen, daß das Arbeiten mit unendlichen Reihen nach den vorstehenden Prinzipien Nothwendigkeit der Resultate gewähren muß, wenn man nur nicht vergißt, sich jedesmal zu versichern, daß die Koeffizienten der allgemeinen Reihen nicht divergente numerische Reihen, sondern bestimmte Zifferwerthe sind, und daß überhaupt wenn von den Werthen numerischer Reihen die Rede ist, letztere immer konvergent seyn müssen.

Zahlenlehre.

Vier und zwanzigstes Kapitel.

Fortsetzung der Lehre der unendlichen Reihen.

Erste Abtheilung.

Der binomische Lehrsatz für Differenz-Potenzen und für reele Potenzen.

§. 598. Aufgabe.

Man soll $(1+c)^{-n}$ in eine unendliche Reihe verwandeln, die nach ganzen Potenzen von c fortläuft, unter der Voraussetzung, daß n eine positive, also $-n$ eine negative ganze Zahl ist.

Auflösung. Es ist nach (§. 157.) und nach (§. 401.):

$$(1+c)^{-n} = \frac{1}{(1+c)^n} = \frac{1}{1+n_1 \cdot c+n_2 \cdot c^2+n_3 \cdot c^3+\cdots \text{ in inf.}}$$

weil die Reihe, welche der binomische Lehrsatz für $(1+c)^n$ nach (§. 401.) liefert, als eine unendliche angesehen werden kann, in so ferne jeder Binomial-Koeffizient n_a der Null gleich wird, so oft man $a > n$ selbst nimmt.

Um nun die Einheit durch diese unendliche Reihe zu dividiren, kann man sich der praktischen Regeln aus der Lehre der rekurrirenden Reihen bedienen, und man erhält, wenn man die gesuchte Reihe durch

$$1+A_1\cdot c+A_2\cdot c^2+A_3\cdot c^3+A_4\cdot c^4+\cdots$$

vorstellt, unter $(-n)_a$ aber den Quotienten

$$\frac{(-n)^{a|-1}}{a!}, \text{ d. h. } \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-a+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots a}$$

versteht, nach (§. 569.)

$$A_1 = -n_1 = -n = (-n)_1,$$

$$A_2 = -n_1\cdot A_1 - n_2 = -n_1\cdot(-n)_1 - n_2 = (-n)_2 \text{ nach (§. 410.)},$$

$$A_3 = -n_1\cdot A_2 - n_2\cdot A_1 - n_3 = -n_1\cdot(-n)_2 - n_2\cdot(-n)_1 - n_3 = (-n)_3,$$

$$A_4 = -n_1\cdot A_3 - n_2\cdot A_2 - n_3\cdot A_1 - n_4 = -n_1\cdot(-n)_2 - n_2\cdot(-n)_2 - n_3\cdot(-n)_1 - n_4 = (-n)_4,$$

u. s. w. f; also

$$(1+c)^{-n} = 1+(-n)_1\cdot c+(-n)_2\cdot c^2+(-n)_3\cdot c^3+(-n)_4\cdot c^4+\cdots \text{ in inf.}$$

oder

$$(1+c)^{-n} = S[(-n)_a\cdot c^a],$$

wo $(-n)_a$ den Quotienten $\frac{(-n)^{a|-1}}{a!}$ bedeutet.

Nachdem in der eben statt gefundenen Auflösung das verlangte Resultat gefunden worden ist, thut man wohl, sowohl der Eleganz, als auch der größern Gründlichkeit wegen, solches synthetisch zu erweisen.

Multiplizirt man aber die beyden Reihen

$$S[n_a\cdot c^a] \quad \text{und} \quad S[(-n)_a\cdot c^a]$$

mit einander, so erhält man nach (§. 563.) zum Produkt die Reihe

$$S[n_a\cdot(-n)_b\cdot c^{a+b}] \quad \text{oder} \quad S\left[\underset{a+b=c}{n_a(-n)_b}\cdot c^c\right],$$

in welcher der Koeffizient von x^c das Aggregat

$$S\left[\underset{a+b=c}{n_a(-n)_b}\right]$$ ist.

Dieses letztere ist aber, unter der Voraussetzung, daß

$$n_a = \frac{n^{a|-1}}{a!} \quad \text{und} \quad (-n)_b = \frac{(-n)^{b|-1}}{b!}$$

ist, nach (§§. 410.—412.) allemal $= 0$, so oft c nicht 0 ist, und $= 1$, so oft $c = 0$, so daß sich also findet

$$S[n_a \cdot c^a] \cdot S[(-n)_a \cdot c^a] = 1.$$

In diesem Produkt ist nun der erste Faktor, so oft n eine positive Zahl ist, $= (1+c)^n$; also wenn man vorstehende Gleichung durch ihn wegdividirt,

$$S[(-n)_a \cdot c^a] = \frac{1}{(1+c)^n} = (1+c)^{-n}.$$

§. 599. Zusatz.

Es mag also x die ganze positive Zahl n oder die ganze negative Zahl $-n$ vorstellen, oder auch 0, also eine beliebige Differenz ganzer Zahlen, so ist doch immer

$$(1+c)^x = S[x_a \cdot c^a], \quad \text{wo} \quad x_a = \frac{x^{a|-1}}{a!} \quad \text{ist.}$$

Und multiplizirt man hier mit a^x links und rechts, nachdem vorher $\frac{b}{a}$ statt c gesetzt worden ist, so erhält man, weil noch

$$a^x \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^x = (a+b)^x \qquad \text{gefunden wird,}$$

$$(a+b)^x = S[x_a \cdot a^{x-a} \cdot b^a] = S\left[\frac{x^{a|-1}}{a!} \cdot a^{x-a} \cdot b^a\right];$$

woraus hervorgeht, daß der binomische Lehrsatz des (§. 402.) auch noch gilt, wenn x eine beliebige Differenz ganzer Zahlen ist, wenn man nur die Reihe rechts als eine unendliche nimmt (deshalb auch unter das Aggregat keine, die durchlaufenden Werthe von a beschränkende Gleichung setzt).

Anmerkung 1. Man kann aber, wenn $x = -n$ seyn sollte, auch noch folgende Umwandlungen vornehmen. Da nämlich

$$(-n)_a = \frac{(-n)^{a|-1}}{a!} \qquad \text{und} \qquad (-n)^{a|-1} = (-1)^a \cdot n^{a|1}$$

ist, so erhält man auch

$$(a+b)^{-n} = S\left[(-1)^a \cdot \frac{n^{a|1}}{a!} \cdot a^{-n-a} b^a\right]$$

$$= S\left[(-1)^a \cdot \frac{(n+a-1)^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{b^a}{a^{n+a}}\right]$$

$$= S\left[(-1)^a \cdot (n+a-1)_a \cdot \frac{b^a}{a^{n+a}}\right] = \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Und setzt man hier, um die ersten Glieder dieser unendlichen Reihe zu erhalten, 0, 1, 2, 3, ꝛc. statt a, so findet sich

$$(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n} - n\cdot\frac{b}{a^{n+1}} + (n+1)_2\cdot\frac{b^2}{a^{n+2}} - (n+2)_3\cdot\frac{b^3}{a^{n+3}} + \cdots \text{ in inf.,}$$

oder

$$(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n} - n\cdot\frac{b}{a^{n+1}} + \frac{(n+1)\cdot n}{1\cdot 2}\cdot\frac{b^2}{a^{n+2}} - \frac{(n+2)(n+1)n}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{b^3}{a^{n+3}}$$

$$+ \cdots \text{ in inf.}$$

Anmerkung 2. In dem bisherigen konnte c ganz allgemein seyn. Wäre aber x eine gebrochene positive oder negative Zahl, so würde $(1+c)^x$ nur dann eine Bedeutung haben, wenn $1+c$ eine positive Zahl ist, nach (§§. 155. 168.). Will man also noch untersuchen, ob der binomische Lehrsatz des (§. 599.) auch gilt, wenn der Exponent x eine gebrochene Zahl ist, so muß man $1+c$, folglich $a+b$, so wie a allein, positiv voraussetzen. Unter dieser Voraussetzung finden dann noch folgende Untersuchungen statt.

§. 600. Lehrsatz.

Ist a und $a+b$ zugleich positiv (wo dann auch $\frac{a+b}{a}$ oder $1+\frac{b}{a}$ oder $1+c$ positiv seyn wird, wenn man $\frac{b}{a}$ durch c vorstellen läßt), so gilt der binomische Lehrsatz, nämlich

$$(a+b)^x = S[x_a\cdot a^{x-a}b^a],$$

noch, auch wenn x eine beliebige positive oder negative gebrochene Zahl $\frac{\mu}{\nu}$ ist, wo μ eine positive oder negative ganze Zahl, ν aber eine positive ganze Zahl seyn mag.

Beweis. Man hat, weil $x = \frac{\mu}{\nu}$ ist:

$$(a+b)^x = (a+b)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(a+b)^\mu},$$

unter der Wurzel die einzige absolute (positive) verstanden.

Bezeichnet man nun $S[x_a\cdot a^{x-a}b^a]$ durch $F(x)$, so ist $[F(x)]^\nu$ ein Produkt von ν solchen Reihen, daher nach (§. 563.)

$$[F(x)] = S\left[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdot \cdots x_n \cdot a^{\nu x-(a+b+c\cdots+n)} b^{a+b+c+\cdots n}\right],$$

wo ν deutsche Buchstaben a, b, c, ...n vorkommen, und zu welchem Aggregat noch die beschränkende Gleichung $a+b+c+\cdots+n = p$ hinzugefügt werden kann, so daß man hat

$$[F(x)]^{\nu} = S\left[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdots x_n \cdot a^{\nu x-p} b^{p}\right].$$
$$a+b+c+\cdots+n=p$$

Weil aber $\nu x = \mu$, und nach (§§. 410. 411.)

$$S\left[x_a \cdot x_b \cdot x_c \cdots x_n\right] = (x+x+x+\cdots+x)_p = (\nu x)_p = \mu_p$$
$$a+b+c+\cdots+n=p$$

ist, in so ferne links im allgemeinen Gliede des Aggregats ν Faktoren vorkommen, so findet sich

$[F(x)]^{\nu} = S\left[\mu_p \cdot a^{\mu-p} \cdot b^{p}\right]$ oder, weil $S\left[\mu_p \cdot a^{\mu-p} \cdot b^{p}\right] = (a+b)^{\mu}$ ist,

$[F(x)]^{\nu} = (a+b)^{\mu}$, also $F(x) = \sqrt[\nu]{(a+b)^{\mu}} = (a+b)^{\frac{\mu}{\nu}} = (a+b)^{x}$,

d. h., wenn man statt F(x) die dadurch vorgestellte Reihe selbst setzt,

$$(a+b)^{x} = S\left[x_a \cdot a^{x-a} \cdot b^{a}\right],$$

wo x jede beliebige gebrochene positive oder negative Zahl ist, wenn nur die Reihen selbst konvergent sind, weil hier nur von numerischen Werthen, nicht aber von allgemeinen Formen die Rede seyn kann, in so ferne $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ und $(a+b)^{\frac{\mu}{\nu}}$ eine ganz andere und viel allgemeinere Bedeutung gewinnen werden und müssen, sobald a und b ganz allgemein sind; für den Augenblick aber in diesem letztern Falle noch gar keine Bedeutung haben.

Anmerkung 1. Da wir jede irrationale Zahl als eine gebrochene ansehen müssen, von unendlichem Zähler und Nenner, so müßte nach diesem Lehrsatze der binomische Satz auch gelten, wenn der Exponent x eine irrationale Zahl ist, wenn nur a und a+b zugleich positiv, und die Reihen konvergent sind.

Anmerkung 2. Man kann sich des hier erwiesenen Satzes bedienen, um aus einer numerischen positiven Zahl irgend eine νte reele Wurzel numerisch zu ziehen. — Man hat nämlich

$$(a+b)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a+b} = a^{\frac{1}{\nu}} \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a} \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

also, weil

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)_a = \frac{\left(\frac{1}{\nu}\right)^{a|-1}}{a!} = \frac{1^{a|-\nu}}{a!\,\nu^a} = \frac{1\cdot(1-\nu)^{a-1|-\nu}}{a!\;\nu^a} = \frac{(-1)^{a-1}(\nu-1)^{a-1|\nu}}{a!\;\nu^a}$$

wo statt $(-1)^{a-1}$ auch $(-1)^{a+1}$ geschrieben werden kann, nach dem binomischen Lehrsatze

$$\sqrt[\nu]{a+b} = \sqrt[\nu]{a} \cdot S\left[(-1)^{a+1} \cdot \frac{(\nu-1)^{a-1}|^{\nu}}{a!\ \nu^a}\left(\frac{b}{a}\right)^a\right],$$

oder

$$\sqrt[\nu]{a+b} = \sqrt[\nu]{a} \cdot \left[1 + \frac{1}{\nu}\cdot\frac{b}{a} - \frac{\nu-1}{2!\,\nu^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{3!\ \nu^3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{(\nu-1)(2\nu-1)(3\nu-1)}{4!\ \nu^4}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \cdots \text{ in inf.}\right]$$

Sollte also z. B. $\sqrt[3]{70}$ numerisch gefunden werden, so würde man statt a setzen unter den Potenzen 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, ꝛc. diejenige, nämlich 4^3 oder 64, welche der Zahl 70 zunächst kommt, und statt b das noch fehlende, nämlich 6, damit $a+b = 64+6 = 70$ werde, wo dann $\frac{b}{a} = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$ ist, und man hat dann, weil $\sqrt[\nu]{a} = \sqrt[3]{64} = 4$ ist,

$$\sqrt[3]{70} = 4\cdot\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{35} - \frac{2}{2\cdot 3^2}\cdot\frac{3^2}{(35)^2} + \frac{2\cdot 5}{3!\ 3^3}\cdot\frac{3^3}{(35)^3} - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{4!\ 3^4}\cdot\frac{3^4}{(35)^4} + \cdots \text{ in inf.}\right]$$

$$= 4\cdot\left[1 + \frac{1}{35} - \frac{1}{(35)^2} + \frac{5}{3\cdot(35)^3} - \frac{2\cdot 5}{3\cdot(35)^4} + \frac{2\cdot 11}{3\cdot(35)^5} - \cdots \text{ in inf.}\right],$$

von welcher Reihe dann einige erste Glieder berechnet, die übrigen aber außer Acht gelassen zu werden pflegen. —

Anmerkung 3. In der Anwendung solcher Mittel, wie das eben beschriebene, muß man jedoch ungemein vorsichtig seyn, um nicht ein so berechnetes Resultat für den praktischen Zweck als genau genug anzusehen, während man den gemachten Fehler vielleicht noch nicht einmal zu beurtheilen im Stande ist. — Es muß daher eine feine praktische Analysis, bey solchen Näherungsrechnungen, wie sie die Praxis jedesmal allein nur fordert, ihr Augenmerk vorzüglich auf die Berechnung der Fehler richten, welche in jedem Falle gemacht werden, oder vielmehr auf die Berechnung der Grenzen, welche diese Fehler nicht übersteigen können. — Davon in spätern Theilen dieses Werkes.

Anmerkung 4. Ist b gegen a sehr klein, so daß $\frac{b}{a}$ ein sehr kleiner Bruch wird, so kann man in der Formel der (Anmerkung 2.) blos die beyden ersten Glieder nehmen, also

$$\sqrt[\nu]{a+b} = \sqrt[\nu]{a}\cdot\left(1 + \frac{1}{\nu}\cdot\frac{b}{a}\right) = \alpha + \frac{b}{\nu\cdot\alpha^{\nu-1}},$$

wo α die $\sqrt[\nu]{a}$, d. h. etwas vorstellt, was sich bereits der gesuchten

$\sqrt[\nu]{a+b}$ ziemlich nähert, wo also $\alpha^\nu = a$ und $\frac{\sqrt[\nu]{a}}{a} = \frac{\alpha}{\alpha^\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu-1}}$ wird; und man hat eine Genauigkeit, die bis ohngefähr auf einen, durch $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ vorgestellten Theil reicht, wie jedoch hier nur faktisch erwähnt seyn mag. —

Zweyte Abtheilung.

Umformung der Binomialreihe in eine nach ganzen Potenzen des Exponenten fortlaufende. Betrachtung solcher Reihen im Allgemeinen. Reihen für reele Logarithmen.

Vorerinnerung.

Da $(1+c)^x = 1+x_1 \cdot c+x_2 \cdot c^2+x_3 \cdot c^3+x_4 \cdot c^4+\cdots$ in Inf. ist, während $x_1 = x$; $x_2 = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$; $x^3 = \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ $= \frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x$; u. s. w.; während überhaupt x_a in eine ganze Funktion von x umgewandelt werden kann, so darf man nur diese ganzen Funktionen von x in obige Binomialreihe statt der Binomial-Koeffizienten $x_1, x_2, x_3, x_4 \cdots$ gesetzt denken, und $(1+c)^x$ geht in eine Doppelreihe über, die einerseits nach Potenzen von c, andererseits aber nach Potenzen von x fortschreitet, welche man also auch wieder als eine Reihe der ersten Ordnung ansehen kann, nach Potenzen von x fortschreitend, während ihre einzelnen Koeffizienten Reihen sind, die nach Potenzen von c fortlaufen. Und da statt c auch a—1 gesetzt werden kann, so daß $1+c = a$ wird, so kann man die eben gefundene Binomialreihe offenbar sogleich dahin umformen, daß man eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe bekommt von der Form

$$A_0+A_1 \cdot x+A_2 \cdot x^2+A_3 \cdot x^3+A_4 \cdot x^4+\cdots,$$

welche der Potenz a^x gleich ist (in allen den Fällen, wo a^x bis jetzt

eine Bedeutung erhalten hat), und in welcher die Koeffizienten A_0, A_1, A_2, ꝛc. ꝛc. selber Reihen sind, die nach Potenzen von (a—1) fortlaufen, d. h. bestimmte endliche numerische Werthe haben können.

Bezeichnet man nun diese unendliche, der Potenz a^x gleiche Reihe $A_0+A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+A_3\cdot x^3+\cdots$ durch $F(x)$, und bedeutet $F(y)$ die andere Reihe, welche aus dieser $F(x)$ hervorgeht, wenn y statt x gesetzt wird; versteht man endlich unter $F(x+y)$ die Reihe, welche aus $F(x)$ hervorgeht, wenn man $x+y$ statt x setzt, so ist in allen den Fällen, wo a^x, a^y, a^{x+y} eine Bedeutnng bis jetzt erhalten haben, also wenn x und y und $x+y$ reele Zahlen sind, a aber eine positive (oder wenn x, y und $x+y$ Differenzen ganzer Zahlen sind, a aber allgemein ist),

$$a^x = F(x), \qquad a^y = F(y),$$
$$a^{x+y} = F(x+y);$$

also, weil $a^x\cdot a^y = a^{x+y}$ ist,

auch $F(x)\cdot F(y) = F(x+y)$;

d. h. die unter $F(x)$ und $F(y)$ vorgestellten unendlichen Reihen mit einander multiplizirt, geben die unter $F(x+y)$ sich zu denkende, so oft x, y, $x+y$, reele Zahlen, a positiv und die unendlichen Reihen selbst alle konvergent sind, so daß sie wirklich endliche numerische Werthe haben, oder so oft a allgemein und x, y, $x+y$ Differenzen ganzer Zahlen sind.

Es entsteht daher nun die Frage, ob diese unter $F(x)$, $F(y)$, $F(x+y)$ vorgestellten unendlichen Reihen nicht im Allgemeinen schon die Eigenschaft haben, daß $F(x)\cdot F(y) = F(x+y)$ ist, für jedes x und für jedes y? — Und zuletzt kann dann auch noch die andere Frage entstehen, ob es mehrere allgemeine, nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihen gibt, denen dieselbe Eigenschaft zukommt? — Fangen wir daher bey letzterer Untersuchung an.

---

§. 601. Aufgabe.

Eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende unendliche Reihe $S[P_a\cdot x^a]$, d. h. $P_0+P_1x+P_2x^2+P_3x^3+P_4x^4+\cdots$ in inf. zu finden, welche, wenn man sie durch $F(x)$ bezeichnet, und wenn man unter $F(y)$, $F(x+y)$ dieselbe Reihe sich denkt, nur

y oder x+y statt x gesetzt, die Eigenschaft hat, daß für jedes x und für jedes y,

$$F(x)\cdot F(y) = F(x+y)$$ ist.

Auflösung. Man hat vorausgesetzt

$$1)\quad F(x) = S[P_a\cdot x^a],$$

so daß nur, den Koeffizienten P_a, d. h. die Koeffizienten P_0, P_1, P_2, P_3, ꝛc. ꝛc. ꝛc. zu finden, übrig bleibt; während, nach den Bedingungen der Aufgabe, diese Koeffizienten, von x unabhängig seyn, also sich nicht ändern, sondern genau dieselben bleiben sollen, wenn y oder x+y statt x gesetzt wird. Dann ist aber auch

$$2)\quad F(y) = S[P_a\cdot y^a],$$

und $$3)\quad F(x+y) = S[P_a\cdot (x+y)^a].$$

Folglich hat man nach (§. 397.):

$$4)\quad F(x)\cdot F(y) = S[P_a\cdot P_b\cdot x^a\cdot y^b],$$

also auch, weil $F(x+y) = F(x)\cdot F(y)$ werden soll,

$$5)\quad S[P_a\cdot (x+y)^a] = S[P_a\cdot P_b\cdot x^a\cdot y^b].$$

Weil aber nach (§. 401.):

$$(x+y)^a = S\left[\frac{(b+c)!}{b!\ c!}\cdot x^b\cdot y^c\right]_{b+c=a}$$

ist, so ist aus (5.):

$$6)\quad S\left[\frac{(b+c)!}{b!\ c!}\cdot P_{b+c}\cdot x^b\cdot y^c\right] = S[P_a\cdot P_b\cdot x^a\cdot y^b],$$

woraus nach (§. 359.):

$$7)\quad \frac{(m+n)!}{m!\ n!}\cdot P_{m+n} = P_m\cdot P_n,$$

also für $n = 1$:

$$8)\quad (m+1)\cdot P_{m+1} = P_m\cdot P_1$$ hervorgeht.

Setzt man aber hier statt m nach und nach 0, 1, 2, 3··· bis m—1, so ergeben sich hieraus:

$$P_1 = P_0 \cdot P_1, \quad \text{also} \quad P_0 = 1,$$

und

$$2 \cdot P_2 = P_1 \cdot P_1,$$
$$3 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_1,$$
$$4 \cdot P_4 = P_3 \cdot P_1,$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$m \cdot P_m = P_{m-1} \cdot P_1;$$

also, wenn man diese Gleichungen alle mit einander multiplizirt, und die gemeinschaftlichen Faktoren auf beyden Seiten wegdividirt, und 1 statt P_0 schreibt:

$$9) \quad m!\, P_m = P_1^m, \quad \text{d. h.} \quad P_m = \frac{P_1^m}{m!},$$

so daß zuletzt die verlangte Reihe

$$10) \quad F(x) = S\left[\frac{(P_1)^a}{a!} \cdot x^a\right],$$

oder

$$F(x) = 1 + P_1 \cdot x + \frac{P_1^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{P_1^3 \cdot x^3}{3!} + \frac{P_1^4 \cdot x^4}{4!} + \ldots \text{ in inf.},$$

sich ergeben hat, wo P_1 ganz unbestimmt bleibt, daher ganz willkührlich genommen werden kann.

§. 602. Zusatz.

Da man dem gemäß statt P_1 jeden möglichen von x unabhängigen Ausdruck setzen kann, so gibt es unbegrenzt viele allgemeine Reihen, wie solche im vorhergehenden (§. 601.) verlangt worden waren. Sie sind alle in dem Ausdruck

$$S\left[\frac{P_1^a \cdot x^a}{a!}\right]$$

repräsentirt; wird daher selbiger, statt eben durch $F(x)$, bezeichnender noch durch $F(P_1, x)$ vorgestellt, so drückt sich die Eigenschaft desselben auch so aus, nämlich

$$F(P_1, x) \cdot F(P_1, y) = F(P_1, (x+y)),$$

d. h.

$$S\left[\frac{P_1^a}{a!} \cdot x^a\right] \cdot S\left[\frac{P_1^a}{a!} \cdot y^a\right] = S\left[\frac{P_1^a}{a!} \cdot (x+y)^a\right].$$

Anmerkung. Obgleich wir nun nach der Vorerinnerung zu (§. 601.) wissen, daß a^x, im Falle a positiv und x reel, oder a allgemein und x eine Differenz ganzer Zahlen ist, allemal mittelst der Binomialreihe in eine Reihe nach ganzen Potenzen von x umgewandelt werden kann; so wäre die Behauptung doch zu gewagt, daß nämlich unter allen den durch $S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]$ vorgestellten Reihen, welche mit der Potenz a^x die Eigenschaft, daß

$$F(x)\cdot F(y) = F(x+y)$$

ist, gemein haben, diejenige mit begriffen seyn müsse, welche der Potenz a^x in allen den Fällen gleich ist, in welchen a^x bis jetzt eine Bedeutung erhalten hat.

Ohne daher diese Behauptung jetzt hinzustellen, wollen wir lieber vorher die Eigenschaften dieser allgemeinen Reihen noch näher untersuchen. Da nämlich aus der Eigenschaft der reelen oder der Differenz-Potenzen, daß nämlich

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$ ist,

auch noch die andern Eigenschaften dieser Potenz hervorgehen, nämlich:

$$a^x : a^y = a^{x-y},$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$(a^x)^m = a^{mx},$$

wenn nur m eine Differenz ganzer Zahlen ist, so werden für diese unendlichen Reihen auf demselben Wege aus der Eigenschaft

$$F(P_{1/}x)\cdot F(P_{1/}y) = F(P_{1/}x+y)$$

für jedes x und für jedes y, auch noch diese andern

$$F(P_{1/}x) : F(P_{1/}y) = F(P_{1/}x-y),$$

$$F(P_{1/}-x) = \frac{1}{F(P_{1/}x)},$$

und wenn m eine Differenz ganzer Zahlen ist, auch noch

$$[F(P_{1/}x)]^m = F(P_{1/}mx)$$

hervorgehen. Dies zeigt nun folgender

§. 603. Lehrsatz.

Für jedes x und für jedes y, und auch für jedes P_1, ist allemal nicht blos, wie (§. 602.) bereits bewiesen worden:

$$\text{I.}\quad S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]\cdot S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot y^a\right] = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot(x+y)^a\right],$$

sondern auch noch

$$\text{II.}\quad S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right] : S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot y^a\right] = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot(x-y)^a\right],$$

$$\text{III.}\quad S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot(-x)^a\right] = \frac{1}{S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]},$$

und

$$\text{IV.}\quad \left(S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]\right)^m = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot(mx)^a\right],$$

wenn nur m eine Differenz ganzer Zahlen ist.

Beweis von II. Denn multiplizirt man den Ausdruck rechts mit dem Divisor $S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot y^a\right]$, so kommt der Dividend, nach (I.).

Beweis von III. Denn setzt man in (I.) $-x$ statt y, so erhält man:

$$S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]\cdot S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot(-x)^a\right] = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot(x-x)^a\right],$$

während in dieser Reihe zur Rechten alle Glieder 0 sind, bis auf das erste, welches 0^0 oder 1 ist.

Beweis von IV. Es sey erstlich m die positive ganze Zahl n; so folgt aus (I.), wenn man nach und nach $x, 2x, 3x, 4x, \cdots(n-1)x$ statt y setzt, und wenn man der Kürze wegen die Reihen $S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot z^a\right]$ durch $F(P_1,z)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}
F(P_1,x)\cdot F(P_1,x) &= F(P_1,2x),\\
F(P_1,x)\cdot F(P_1,2x) &= F(P_1,3x),\\
F(P_1,x)\cdot F(P_1,3x) &= F(P_1,4x),\\
&\vdots\\
F(P_1x)\cdot F\big(P_1,(n-1)x\big) &= F(P_1,nx);
\end{aligned}$$

also, wenn man diese Gleichungen mit einander multiplizirt, und auf beyden Seiten durch die gemeinschaftlichen Faktoren wedgividirt:

$$[F(P_1,x)]^n = F(P_1,nx),$$

d. h.
$$\left(S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]\right)^n = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot(nx)^a\right].$$

Und ist $m = -n$, eine negative ganze Zahl, so ist nach (III.):

$$S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot(-nx)^a\right] = \frac{1}{S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot(nx)^a\right]},$$

also, weil letzterer Nenner $= \left(S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]\right)^n$ und $\frac{1}{\nu^n} = \nu^{-n}$ ist, auch der Lehrsatz (IV.) für den Fall erwiesen, daß $m = -n$ ist.

§. 604. Lehrsatz.

Die Reihe $F(x)$ oder $S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]$ konvergirt für alle allgemein-numerischen Werthe, welche statt P_1 und statt x gesetzt werden mögen.

Beweis. Es ist

$$F(x) = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right] = S\left[\frac{(P_1\cdot x)^a}{a!}\right] = S\left[\frac{z^a}{a!}\right],$$

wenn $P_1\cdot x$ durch z bezeichnet wird. Ist nun z reel, so konvergirt diese Reihe offenbar, nach (§. 590. Nr. 4.), weil von einem Gliede ab, der Quotient $\frac{z}{n}$ aus dem $(n+1)$ten Gliede $\frac{z^n}{n!}$, und dem nten $\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$ kleiner als 1 wird, und dann immer kleiner, je größer die Gliederzahl n wird.

Ist aber z imaginär und von der Form $p+qi$, wo p und q reel sind, so ist für jeden Werth von P_1, also auch für $P_1 = 1$, nach (§. 603.)

$$S\left[\frac{z^a}{a!}\right] = S\left[\frac{(p+qi)^a}{a!}\right] = S\left[\frac{p^a}{a!}\right]\cdot S\left[\frac{(qi)^a}{a!}\right].$$

In diesem Ausdruck zur Rechten ist der erste Faktor $S\left[\frac{p^a}{a!}\right]$, wie

eben bewiesen worden ist, konvergent; der zweyte Faktor $S\left[\frac{(qi)^a}{a!}\right]$ geht aber nach (§. 387.), wenn zuerst $2a$, dann $2a+1$ statt a gesetzt wird, in

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{q^{2a}}{(2a)!}\right] + i \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{q^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$$

über, in welchem Ausdruck die beyden vorkommenden Reihen nach (§. 590. Nr. 4.) für jeden reelen Werth von q konvergent sind.

Da nun für jeden allgemein-numerischen Werth von P_1 und von x, das Produkt $P_1 \cdot x$ allemal die Form $p+qi$ annimmt, und natürlich entweder reel oder imaginär ist, so ist also unser Lehrsatz allgemein erwiesen.

§. 605. Lehrsatz.

Der Werth der Reihe $F(x)$ oder $S\left[\frac{P_1^a}{a!} \cdot x^a\right]$ ist positiv für alle beliebigen reelen (positiven oder negativen) Werthe von P_1 und von x.

Beweis. Denn es ist, wenn $P_1 \cdot x = z$ gesetzt wird,

$$F(x) = S\left[\frac{z^a}{a!}\right]$$

offenbar positiv, so oft z positiv ist, weil dann alle Glieder der Reihe positiv sind. Und da für jeden Werth von P_1, also auch für $P_1 = 1$,

$$S\left[\frac{(-z)^a}{a!}\right] = \frac{1}{S\left[\frac{z^a}{a!}\right]}$$ ist,

so ist der Werth derselben Reihe, wenn die negative Zahl $-z$ gesetzt wird, statt z, $= \frac{1}{S\left[\frac{z^a}{a!}\right]}$, also ebenfalls positiv. — Daher beyde Behauptungen erwiesen.

§. 606. Zusatz.

Nun läßt sich auch noch beweisen, daß, so oft P_1 und x reel sind, und $\frac{\mu}{\nu}$ jede positiv oder negativ gebrochene Zahl bedeutet, (nämlich ν eine positiv ganze, μ dagegen eine positive

oder negative ganze Zahl) dann allemal noch

$$\left(S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]\right)^m = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot (mx)^a\right]$$

seyn werde, wie (§. 603. IV.), auch wenn $m = \frac{\mu}{\nu}$ ist.

Denn es ist nach (§. 603. IV.), weil $\nu \cdot \frac{\mu}{\nu} x = \mu x$ ist,

$$\left(S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot \left(\frac{\mu}{\nu}x\right)^a\right]\right)^\nu = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot (\mu x)^a\right],$$

aber auch

$$\left(S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]\right)^\mu = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot (\mu x)^a\right];$$

folglich noch

$$\left(S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]\right)^\mu = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot \left(\frac{\mu}{\nu}x\right)^a\right]^\nu;$$

mithin, wenn man links und rechts die νte Wurzel nimmt, und den Satz anwendet, nach welchem $\sqrt[\nu]{(u^\mu)} = n^{\frac{\mu}{\nu}}$ ist, für reele Potenzen, wie solche hier vorausgesetzt sind:

$$\left(S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right]\right)^\nu = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot \left(\frac{\mu}{\nu}x\right)^a\right];$$

welches zu erweisen war.

§. 607. Zusatz.

Daraus folgt aber wieder, daß wenn man

I. $S\left[\frac{P_1^a}{a!}\right] = a$ setzt,

dann II. $S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right] = a^x$ seyn müsse,

so oft x eine Differenz ganzer Zahlen, und P_1, also auch a ganz allgemein; oder auch, so oft x beliebig reel und a positiv ist.

Denn es ist diese Behauptung nichts weiter, als die Formel (§. 603. IV. und §. 606.), für den Fall, daß $P_1 = 1$, in einer andern Form. Setzt man nämlich dort $P_1 = 1$, dann statt des dortigen beliebigen x jetzt das beliebige P_1, endlich statt des dortigen m, das jetzige x, so erhält man:

$$\left(S\left[\frac{1}{a!}\cdot P_1^a\right]\right)^x = S\left[\frac{1}{a!}\cdot(P_1\cdot x)^a\right] = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right],$$

d. h.
$$a^x = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\cdot x^a\right],$$

wenn unter a der Werth von $S\left[\frac{1}{a!}\cdot P_1^a\right]$ gedacht wird.

Anmerkung. Schreibt man statt der vollständigen Reihen in (I. und II.) lieber blos einige wenige ihrer ersten Glieder, die übrigen sich noch hinzudenkend, so sieht der Satz so aus:

Jeder Werth von P_1, für welchen

$$\text{I.} \quad 1+P_1+\frac{P_1^2}{2!}+\frac{P_1^3}{3!}+\frac{P_1^4}{4!}+\cdots = a$$

wird, macht, daß

$$\text{II.} \quad 1+\frac{P_1\cdot x}{1}+\frac{P_1^2\cdot x^2}{2!}+\frac{P_1^3\cdot x^3}{3!}+\cdots = a^x$$

wird, so oft nur die Potenz a^x früher eine Bedeutung erhalten hat.

Dabey ist nicht zu übersehen, daß, weil für ein gegebenes a, die Gleichung (I.) zur Bestimmung von P_1 die Form einer höhern Gleichung vom unendlichen Grade hat, solche vielleicht unendlich viele Werthe von P_1 liefert, was um so wahrscheinlicher ist, da die Reihe $S\left[\frac{P_1^a}{a!}\right]$ für jeden Werth von P_1 von der Form $p+qi$, konvergent wird.

§. 608. Zusatz.

Bezeichnet man den Ziffernwerth von a, für welchen einer der Werthe von P_1, $= 1$ ist, der also aus der Gleichung (I. §. 607.) gefunden wird, wenn dort rechts 1 statt P_1 gesetzt wird, durch den Buchstaben e, so daß

$$\text{III.} \quad e = S\left[\frac{1}{a!}\right],$$

d. h. $$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \text{ in inf.}$$ *)

wird, so hat man aus (§. 607. II.)

$$\text{IV.}\quad e^x = S\left[\frac{x^a}{a!}\right],$$

d. h. $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \text{ in inf.},$$

---

*) In Dezimalstellen berechnet, wird diese numerische Zahl

$$e = 2{,}718281828459\cdots;$$

und die Berechnung wird durch den Umstand sehr begünstigt, daß $\frac{1}{(n-1)!} : n = \frac{1}{n!}$ wird, so daß jedes Glied der Reihe aus dem vorhergehenden durch bloße Division abgeleitet wird. Die Rechnung sieht dann so aus:

	e	$= 1$
das vorhergehende Glied dividirt durch	2	$+0{,}5$
—	3	$+0{,}166666666666666$
—	4	$+0{,}041666666666666$
—	5	$+0{,}008333333333333$
—	6	$+0{,}001388888888888$
—	7	$+0{,}000198412698 41$
—	8	$+0{,}000024801587 30$
—	9	$+0{,}000002755731 92$
—	10	$+0{,}000000275573 19$
—	11	$+0{,}000000025052 10$
—	12	$+0{,}000000002087 67$
—	13	$+0{,}000000000160 59$
—	14	$+0{,}000000000011 47$
—	15	$+0{,}000000000000 76$
—	16	$+0{,}000000000000 04,$

oder wenn man addirt, und die folgenden Glieder, da sie in den ersten 14 Dezimalen 0 geben, wegläßt:

$$e = 2{,}718281828458 98,$$

wo die ersten 11 Dezimalstellen genau sind.

wenn nur x eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl oder 0, also eine beliebige reele Zahl, e^x also eine (§. 168.) definirte reele Potenz ist.

§. 609. Zusatz.

Ist dagegen P_1 ein reeler der Werthe, welche der Gleichung (I. §. 607.), nämlich der Gleichung

$$a = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\right]$$

genügen, so hat man, weil dann nach dem vorhergehenden (§. 608.)

$$e^{P_1} = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\right]$$ seyn muß,

sogleich $$a = e^{P_1}$$

und $$P_1 = \overset{e}{log}\, a,$$ nach (§. 172.),

so oft a positiv ist; unter $\overset{e}{log}\, a$, den (§. 172.) definirten reelen Logarithmen von a, für diese numerische Basis e verstanden.

Und weil aus (§§. 173.—176.) bereits bekannt ist, daß $\overset{e}{log}\, a$, wenn a positiv ist, nur einen einzigen reelen Werth hat (welcher positiv, negativ oder Null ist, je nachdem $a > 1$, oder $a < 1$, oder $a = 1$ ist), so folgt, daß die Gleichung (I. §. 607.), nämlich

$$a = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\right],$$

so lange a positiv ist, allemal wirklich einen reelen Werth, aber auch jedesmal nur einen einzigen, nämlich $\overset{e}{log}\, a$, für P_1 liefert; und daß also, wenn es noch mehr Werthe von P_1 gibt, welche dieser Gleichung $a = S\left[\frac{P_1^a}{a!}\right]$ (§. 607. I.) genügen, solche nothwendig imaginär seyn müssen.

§. 610. Zusatz.

Ist daher a positiv, so ist nach (§§. 607. II. und 609.) für den Fall, daß x reel, also a^x eine (§. 168.) definirte reele Potenz

ist, und wenn man, der größern Bequemlichkeit wegen, jetzt mit $\overset{e}{L}a$ bezeichnet, was früher durch *log* a bezeichnet worden ist, nämlich den einzigen reelen Logarithmen der positiven Zahl a, für die (§. 608.) berechnete Zahl e als Basis, allemal

$$a^x = S\left[\frac{(x \cdot La)^\alpha}{\alpha!}\right],$$

d. h. $a^x = 1 + x \cdot La + \frac{x^2 \cdot (La)^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot (La)^3}{3!} + \cdots$ in inf.,

welche Gleichung diese andere

$$e^x = S\left[\frac{x^\alpha}{\alpha!}\right],$$

d. h. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ in inf.,

als einen besondern Fall in sich schließt, weil nach (§. 172.) $Le = 1$ ist.

§. 611. Zusatz.

Bringt man in der Gleichung des (§. 610.) 1 auf die linke Seite, und dividirt man durch x, so erhält man:

$$\frac{a^x - 1}{x} = La + \frac{(La)^2}{2!} \cdot x + \frac{(La)^3}{3!} \cdot x^2 + \cdots \text{ in inf.},$$

folglich, wenn $x = 0$ gesetzt wird:

$$La = \frac{a^x - 1}{x}, \text{ für } x = 0,$$

nachdem man nämlich vorher, ehe noch $x = 0$ gesetzt wird, durch x wirklich wegdividirt hat, so daß nicht Null im Nenner erscheint.

§. 612. Zusatz.

Es ist aber nach dem binomischen Lehrsatz (§. 401.):

$$a^x = [1 + (a-1)]^x = S\left[\frac{x^{\underline{\alpha}|}}{\alpha!} \cdot (a-1)^\alpha\right],$$

oder wenn man nach (§. 389.) $\alpha = 0$ und dann $\alpha + 1$ statt α setzt,

$$a^x = 1 + S\left[\frac{x^{a+1|-1}}{(a+1)!}\cdot(a-1)^{a+1}\right];$$

folglich, wenn man 1 subtrahirt, und durch x dividirt, auf beyden Seiten, in so ferne $x^{a+1|-1} = x\cdot(x-1)^{a|-1}$ ist:

$$\frac{a^x-1}{x} = S\left[\frac{(x-1)^{a|-1}}{(a+1)!}\cdot(a-1)^{a+1}\right],$$

also für $x = 0$, in so ferne

$$(-1)^{a|-1} = (-1)^a\cdot 1^{a|+1} = (-1)^a\cdot a!,$$

und $(a+1)! = a!(a+1)$ ist, nach (§. 611.):

$$1)\quad La = S\left[(-1)^a\cdot\frac{1}{a+1}\cdot(a-1)^{a+1}\right],$$

d. h., wenn man blos einige erste Glieder schreibt:

$$La = (a-1) - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \tfrac{1}{4}(a-1)^4 + \cdots$$

Weil jedoch diese Reihe nur konvergirt, wenn $a-1<1$, also $a<2$ ist, und dann noch sehr langsam konvergirt, so lange $a-1$ nicht sehr klein ist, so bleibt es wünschenswerth, schneller konvergirende Reihen zu erhalten, zur Bestimmung von La. — Zu dem Ende bedenke man, daß $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, also nach dem binomischen Lehrsatze:

$$a^x = \left(1+\frac{1-a}{a}\right)^{-x} = S\left[\frac{(-x)^{a|-1}}{a!}\cdot\left(\frac{1-a}{a}\right)^a\right];$$

und man findet, genau so wie eben geschehen ist, verfahrend, $\frac{a^x-1}{x}$ für $x = 0$, d. h. nach (§. 611.):

$$2)\quad La = S\left[\frac{1}{a+1}\cdot\left(\frac{a-1}{a}\right)^{a+1}\right],$$

oder, wenn man wiederum nur einige erste Glieder dieser Reihe schreiben will:

$$La = \frac{a-1}{a} + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{a-1}{a}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{a-1}{a}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\cdot\left(\frac{a-1}{a}\right)^4 + \cdots$$

Obgleich aber diese Reihe allemal konvergirt, so oft a positiv ist, so erhält man doch noch schneller konvergirende Reihen für La durch nachstehende Betrachtungen. Es ist nämlich auch

$$a^x = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{mx},$$

und noch $$a^x = \left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-mx};$$

also, wenn man jetzt $\frac{a^x - 1}{x}$ genau wieder so bestimmt, wie vorher, nämlich zuerst:

a^x oder $\left(\sqrt[m]{a}\right)^x$ so schreibt: $\left[1+\left(\sqrt[m]{a}-1\right)\right]^{mx}$,

und a^x oder $\left(\frac{1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-mx}$ so schreibt: $\left(1+\frac{1-\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{a}}\right)^{-mx}$,

dann diese Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze in Reihen entwickelt (von welchen die erste nach den Potenzen von $\sqrt[m]{a}-1$, die andere aber nach den Potenzen von $\frac{1-\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{a}}$, oder auch von $\frac{\sqrt[m]{a}-1}{\sqrt[m]{a}}$ fortschreitet), hernach, dem (§. 389.) zu Folge, das erste Glied, welches allemal $= 1$ ist, absondert, solches auf beyden Seiten subtrahirt, dann durch x dividirt, zuletzt aber $x = 0$ setzt, ergibt sich noch aus der ersten Entwicklung:

$$3)\quad La = m \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1} \cdot \left(\sqrt[m]{a}-1\right)^{a+1}\right],$$

d. h. $$La = m \cdot \left[\left(\sqrt[m]{a}-1\right) - \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\sqrt[m]{a}-1\right)^3 - \cdots\right],$$

so wie aus der andern Entwicklung:

$$4)\quad La = m \cdot S\left[\frac{1}{s+1}\cdot\left(\frac{\sqrt[m]{a}-1}{\sqrt[m]{a}}\right)^{s+1}\right],$$

d. h. $$La = m\cdot\left[\frac{\sqrt[m]{a}-1}{\sqrt[m]{a}}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt[m]{a}-1}{\sqrt[m]{a}}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[m]{a}-1}{\sqrt[m]{a}}\right)^3+\cdots\right],$$

welche beyde Reihen, eine je größere Zahl statt m gesetzt wird, desto schneller konvergiren, weil $\sqrt[m]{a}$ der 1 immer näher rückt, je größer m ist, so daß dann $\sqrt[m]{a}-1$ so klein werden kann, daß jede höhere Potenz davon außer Acht gelassen werden kann. — Für ein so großes m kann man sich daher blos mit dem ersten Gliede begnügen, d. h. blos

$$La = m\cdot\left(\sqrt[m]{a}-1\right),$$

oder
$$La = m\cdot\frac{\sqrt[m]{a}-1}{\sqrt[m]{a}}$$

nehmen, wenn man hier La näherungsweise in Ziffern berechnet wissen will, wie solches (§. 199.) für den $\overset{b}{log}$ a verlangt worden ist.

Anmerkung. Es muß aber wiederholt darauf aufmerksam gemacht werden, daß bey jeder solchen Näherungsrechnung, wie sie die Praxis nöthig hat, allemal auch die Grenzen der Fehler bestimmt werden müssen, damit man nicht ein Ziffern-Resultat für genau genug halte, welches eine weit größere Genauigkeit erfordert.

Von den jedesmaligen Mitteln zur Bestimmung dieser Grenzen der Fehler ist aber hier in den erstern Theilen dieses Werkes so wenig, wie von irgend einer praktischen Anwendung die Rede, und bemerken wir hier nur noch ein für allemal, daß, wie weit die Genauigkeit einer solchen Annäherungs-Rechnung jedesmal getrieben werden müsse, einzig und allein von dem jedesmaligen besondern Falle der Anwendung abhängt, daher in jedem solchen Falle erst nach den Umständen beurtheilt werden muß.

Zahlenlehre.

Fünf und zwanzigstes Kapitel.

Von den künstlichen und natürlichen Potenzen. Von den künstlichen und natürlichen Logarithmen. Von den künstlichen und natürlichen trigonometrischen Funktionen.

Vorerinnerung.

Weil nach (§. 610.) die unendliche Reihe $S\left[\frac{x^a \cdot (La)^a}{a!}\right]$ der Potenz a^x allemal gleich seyn muß, so oft nämlich a^x eine (§. 168.) definirte reele Potenz, also so oft a positiv und x beliebig reel ist, so ist die Reihe $S\left[\frac{x^a \cdot (La)^a}{a!}\right]$ [in so ferne sie für ein positives a und für jede allgemein-numerische Zahl $p+qi$ statt x, allemal einen Werth hat (nach §. 604.), während der Potenz a^x noch kein Werth zukommt, wenn nicht x reel ist] offenbar ein allgemeinerer Ausdruck als a^x, welcher a^x als einen besondern Fall in sich schließt. Man kann daher den Begriff der Potenz a^x noch verallgemeinern, wenn man diese unendliche Reihe selbst dafür nimmt. Und da für diese Reihen $S\left[\frac{x^a \cdot P_1^a}{a!}\right]$ in dem (§. 603.) bereits Gesetze entwickelt worden sind, welche mit den Formeln der Potenzen vieles gemein haben, so können solche Gesetze vielleicht in Formeln übergehen, welche für diese allgemeinern Potenzen gelten.

In so ferne der Logarithme allemal der Potenz gegenübersteht, so ist mit dem allgemeinern Begriff der Potenz a^x, sogleich auch ein allgemeinerer Logarithme gegeben, der einer nähern Betrachtung unterworfen werden kann. Diese nähere Untersuchung dieser allgemeinern

Logarithmen zwingt uns aber zur Betrachtung anderer Reihen, nämlich der Reihen

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right] \quad \text{und} \quad S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

welche mit den Potenzreihen innig zusammenhängen, aus letztern abgeleitet werden, in welchen ebenfalls x ganz allgemein ist, und welche man, weil sie unter andern für spezielle Werthe von x, auch in der Geometrie, und hier wieder unter andern auch bey Dreiecken angewandt werden, in diesen speziellen Fällen, trigonometrische Hilfszahlen, oder trigonometrische Linien, genannt hat, im Allgemeinen aber besser trigonometrische Funktionen nennt.

Erste Abtheilung.

Von den künstlichen und natürlichen Potenzen, und den zugehörigen künstlichen und natürlichen Logarithmen im Allgemeinen.

---

§. 613. Erklärung.

Die nach (§. 604.) für jeden allgemein-numerischen Werth von x konvergirende unendliche Reihe

$$S\left[\frac{(x \cdot La)^a}{a!}\right], \text{ oder } 1 + \frac{x \cdot La}{1} + \frac{x^2 \cdot (La)^2}{2!} + \frac{x^3 \cdot (La)^3}{3!} + \cdots\cdots,$$

in welcher a positiv ist, La den einzigen reelen Logarithmen von a, für die (§. 608. III.) bestimmte Zahl $e = S\left[\frac{1}{a!}\right] = 2{,}718\cdots\cdots$ als Basis (§. 172.), bedeutet, und wo x ganz allgemein, reel oder imaginär, gedacht ist, bezeichne man von nun an durch

$$a^x,$$

und nenne solche die künstliche Potenz. Und diese künstliche Potenz heiße insbesondere eine natürliche, wenn $a = 1$ selber, also $La = Le = 1$ ist, so daß die obige unendliche Reihe in

$S\left[\frac{x^a}{a!}\right]$, oder $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$ in inf.

übergeht, und dann durch e^x bezeichnet wird.

Anmerkung. Die künstliche Potenz (und darunter auch die natürliche) ist daher eine reele, wenn x reel ist, weil sie dann der reelen Potenz a^x gleich ist (nach §. 610.). Jede reele Potenz ist allemal auch eine künstliche, aber nicht umgekehrt; denn die künstliche ist allgemeiner als die reele, weil sie auch für ein imaginäres x eine bestimmte Bedeutnng hat.

§. 614. Zusatz.

Man hat also (nicht als Lehrsatz, sondern als Definition) für jedes x,

1) $a^x = S\left[\frac{x^a \cdot (La)^a}{a!}\right]$,

und 2) $e^x = S\left[\frac{x^a}{a!}\right]$.

Und setzt man in (2.) durchaus $x \cdot La$ statt x, so findet sich

$$e^{x \cdot La} = S\left[\frac{(x \cdot La)^a}{a!}\right],$$

welche Gleichung zur Rechten genau die Reihe in (1.) enthält, so daß folgert

3) $a^x = e^{x \cdot La}$;

d. h.: Jede künstliche Potenz a^x kann in eine natürliche $e^{x \cdot La}$ verwandelt werden, wenn man den Exponenten x mit dem reelen Logarithmen La des Dignanden a (für die Basis e genommen) multiplizirt.

§. 615. Zusatz.

Ferner folgt hieraus noch:

1) Die künstliche Potenz a^x und darunter auch die natürliche e^x hat für jeden reelen oder imaginären Werth von x, jedesmal nur einen einzigen Werth, und dieser Werth ist von der Form $p+qi$, wenn x selbst diese Form hat.

2) Zwey künstliche Potenzen sind daher einander gleich, sobald ihre Dignanden und ihre Exponenten einander gleich sind; d. h. gleiche positive Zahlen mit gleichen Ausdrücken potenzirt, geben gleiche Resultate.

§. 616. Lehrsätze.

Es ist allemal für künstliche und somit auch für natürliche Potenzen

$$\text{I.} \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

$$\text{II.} \quad a^x : a^y = a^{x-y},$$

$$\text{III.} \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

und

$$\text{IV.} \quad (a^x)^m = a^{mx},$$

wenn nur m eine Differenz ganzer Zahlen ist.

Beweis. Denn es sind diese Sätze keine andern, als die (§. 603. und §. 606.) bereits erwiesenen, unter dem dortigen P_1, jetzt La gedacht.

§. 617. Zusatz.

Es ist aber auch, wenn a und b positive Zahlen sind, für künstliche Potenzen, also für jeden Werth von x:

$$\text{V.} \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$\text{VI.} \quad a^x : b^x = (a:b)^x.$$

Denn es ist nach (§. 614.) $a^x = e^{x \cdot La}$ und $b^x = e^{x \cdot Lb}$, also

$$a^x \cdot b^x = e^{x \cdot La} \cdot e^{x \cdot Lb} = e^{x \cdot La + x \cdot Lb} = e^{x(La+Lb)}.$$

Weil aber nach (§. 149. Nr. 19. und §. 178.)

$$La + Lb = L(ab)$$

und $e^{x \cdot L(ab)} = (ab)^x$ ist, nach (§. 614.), so folgt noch, für jeden Werth von x

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x,$$

wodurch (V.) außer Zweifel gesetzt ist. — Die (VI.) aber ist nun deshalb richtig, weil der Ausdruck $(a:b)^x$ zur Rechten, wenn solcher mit

dem Divisor b^x zur Linken multiplizirt wird, nach (V.) den Dividenden a^x wieder gibt.

Anmerkung. Es gelten also alle die Formeln der Potenzen (§. 149.) auch für diese künstlichen Potenzen, für jeden Exponenten, so lange nur wirklich Ausdrücke vorkommen, welche Bedeutung haben, also namentlich mit Ausnahme der (§. 149. Nr. 7.), welche, wie hier in (§. 616. IV.) bereits bemerkt worden ist, nur gilt, wenn der Exponent m eine Differenz ganzer Zahlen ist, so oft x imaginär oder allgemein *) seyn sollte.

Ist aber x reel, so kommen blos reele Potenzen vor, und dann ist der Satz: daß $(a^x)^m = a^{mx}$ ist, für irgend ein reeles m, bereits (§. 170.) außer Zweifel gesetzt.

§. 618. Erklärung.

Versteht man unter

$$\overset{a}{log}\, b$$

d. h. unter dem Logarithmen von b für die Basis a, jeden allgemein-numerischen reelen oder imaginären Ausdruck z, mit welchem die Basis a potenzirt, b gibt; — so ist für eine positive Basis a und für ein allgemein-numerisches b, der Begriff des Logarithmen $\overset{a}{log}\, b$ zugleich mit dem weitern Begriff der künstlichen Potenz a^z bedeutend erweitert, und dieser Logarithme heißt dann der künstliche, und wenn $a = e$ ist, unter e die Zahl $S\left[\frac{1}{a!}\right]$ des (§. 608. III.) verstanden, so daß er der natürlichen Potenz gegenübersteht, so heißt er auch der natürliche Logarithme. Und in diesem letztern Fall bezeichne man ihn blos durch $\overset{a}{log}\, b$, die Basis e noch hinzudenkend.

*) So lange nämlich x allgemein ist, so lange hat es keinen bestimmten Werth, und kann also noch imaginär seyn. Wollte man eine Formel, welche für einen imaginären Werth von x nicht gilt, anwenden, wenn x noch allgemein ist, so könnte nachher doch x noch imaginär werden, und dann hätte man ein unrichtiges Resultat.

§. 619. Zusatz.

Hieraus folgt sogleich:

1) Stellt z jeden so eben definirten künstlichen Logarithmen $\overset{a}{log}\,b$ vor, so hat man

$$\overset{a}{log}\,b = z$$

und $b = a^z$, d. h. $b = a^{(\overset{a}{log}\,b)}$,

so daß z, d. h. $\overset{a}{log}\,b$, bestimmt wird durch die Gleichung

$$b = S\left[\frac{z^a \cdot (La)^a}{a!}\right],$$

d. h. $$b = 1 + \frac{z \cdot La}{1} + \frac{z^2 \cdot (La)^2}{2!} + \frac{z^3 \cdot (La)^3}{3!} + \cdots$$

Weil aber diese Gleichung die Form einer höhern Gleichung vom unendlichen Grade hat, so können für z unendlich viele, ihr genügende Werthe existiren.

2) Ist b positiv, so ist einer dieser Werthe von $\overset{a}{log}\,b$, der (§. 172.) definirte reele Logarithme, also reel; die andern Werthe sind aber nach (§. 173.) alle imaginär. — Und ist noch überdies $a = e$, so ist einer der Werthe von $log\,b$, der (§. 610.) durch Lb bezeichnete reele Logarithme für die Basis e.

3) Jeder künstliche Logarithme kann nach (§. 614.) auf einen natürlichen Logarithmen zurückgeführt werden. — Da nämlich

$$a^z = e^{z \cdot La}$$

ist, so ist, wenn $b = a^z$, also $z = \overset{a}{log}\,b$

ist, auch $b = e^{z \cdot La}$, also $z \cdot La = \overset{e}{log}\,b = log\,b$,

mithin $$z = \frac{log\,b}{La},$$

d. h. $$\overset{a}{log}\,b = \frac{log\,b}{La},$$

d. h. alle Werthe des künstlichen Logarithmen von b für die

(allemal positive) Basis a, werden gefunden, wenn man alle Werthe des natürlichen Logarithmen von b, durch den einzigen reelen Werth des natürlichen Logarithmen von a (welcher letztere durch La vorgestellt worden ist) dividirt.

Anmerkung 1. Ehe man aber solche und ähnliche Folgerungen wie die letztere zieht, muß man sich vorher über folgende zwey Fragen Bescheid gegeben haben:

1) Hat $\overset{a}{log}\,b$ allemal für jedes gegebene b (reel oder imaginär, aber von der Form $p+qi$) eine Bedeutung?

2) Hat $\overset{a}{log}\,b$ für jedes solche b auch allemal nur eine einzige Bedeutung, oder wirklich deren unendlich viele, die alle in endlichen Ziffern angebbar sind?

Um diese Fragen zu beantworten, muß man sich sogleich geradezu die Aufgabe vorlegen: Alle Werthe von $\overset{a}{log}(p+qi)$ oder doch von $\overset{e}{log}(p+qi)$, d. h. von $log(p+qi)$ zu finden; d. h. alle allgemein-numerischen Werthe von u zu finden, welche

$$e^u = (p+qi), \quad \text{d. h.} \quad S\left[\frac{u^a}{a!}\right] = p+qi$$

machen.

Anmerkung 2. Will man aber alle allgemein-numerischen Werthe $\alpha+\beta i$ von u suchen, welche

$$e^u = p+qi$$

machen, so müßte man alle reelen Werthe von α und β suchen, welche $e^{\alpha+\beta i} = p+qi$

machen, wo, wie immer p und q ebenfalls reel vorausgesetzt sind. — Dann hätte man, weil

$$e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}\cdot e^{\beta i}$$

$$\text{und } e^{\beta i} = S\left[\frac{(\beta i)^a}{a!}\right] = S\left[(-1)^a\cdot\frac{\beta^{2a}}{(2a)!}\right]+i\cdot S\left[(-1)^a\cdot\frac{\beta^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$$

ist, nach (§. 387.), nothwendig

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & e^{\alpha}\cdot S\left[(-1)^a\cdot\frac{\beta^{2a}}{(2a)!}\right] = p \\ \text{und} \quad 2) & e^{\alpha}\cdot S\left[(-1)^a\cdot\frac{\beta^{2a+1}}{(2a+1)!}\right] = q \end{array}\right\} \text{nach (§. 325.),}$$

aus welchen beyden Gleichungen nun die ihnen genügenden reellen Werthe von α und β gefunden werden müssen.

Um aber diese Gleichungen bequemer behandeln zu können, wollen wir vorher die so eben aus der Potenzreihe hervorgegangenen beyden unendlichen Reihen in (1.) und in (2.), nämlich

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{\beta^{2a}}{(2a)!}\right] \quad \text{und} \quad S\left[(-1)^a \cdot \frac{\beta^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

noch näher betrachten, ihre Eigenschaften kennen lernen, um sich nachher dieser Eigenschaften zur bequemern Vollführung der hier vorkommenden allgemeinen Untersuchungen bedienen zu können. — Zu dem Ende mögen diese Reihen vorläufig durch kürzere Zeichen bezeichnet, und unter diesen Zeichen sie selbst der Untersuchung unterworfen werden. — Nur muß man nicht übersehen, wie diese Reihen so eben aus $e^{\beta i}$ entstanden sind, so daß sie hervorgehen werden, wenn man $e^{\beta i}$ und $e^{-\beta i}$ zu einander addirt oder von einander subtrahirt. — Dies als Einleitung in die

---

Zweyte Abtheilung.

Von den natürlichen trigonometrischen Funktionen.

---

§. 620. Lehrsatz.

Die unendlichen Reihen

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right] \quad \text{und} \quad S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$$

sind allemal konvergent, für jeden allgemein-numerischen Werth von x, d. h. für jeden Werth $p+qi$ von x.

Beweis. Denn es ist nach (§§. 614. Nr. 2. und §. 387.):

$$e^{xi} = S\left[\frac{(xi)^a}{a!}\right] = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right] + i \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$$

$$\text{und } e^{-xi} = S\left[\frac{(-xi)^a}{a!}\right] = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right] - i \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right];$$

folglich, wenn man addirt und subtrahirt und durch 2 oder durch 2i dividirt:

$$\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]$$

und

$$\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i} = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right].$$

Die gedachten unendlichen Reihen sind also aus den nach (§. 604.) immer konvergenten Potenz-Reihen blos durch Addition und Subtraktion zusammengesetzt; folglich deshalb ebenfalls immer konvergent, für jeden solchen Werth von x.

§. 621. Erklärung.

Die unendliche Reihe

$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right]$, oder $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ bezeichne man durch *Cos* x,

so wie diese andere

$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$, oder $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ durch *Sin* x,

und spreche diese Zeichen aus: Kosinus von x, und Sinus von x. — Die Quotienten

$$\frac{Sin\,x}{Cos\,x}, \quad \frac{Cos\,x}{Sin\,x}, \quad \frac{1}{Cos\,x}, \quad \frac{1}{Sin\,x},$$

bezeichne man beziehlich durch

$$Tg\,x, \quad Cotg\,x, \quad Sec\,x, \quad Cosec\,x,$$

und spreche solche Zeichen beziehlich aus:

Tangente, Kotangente, Sekante, Kosekante von x.

Diese, durch *Sin* x, *Cos* x, *Tg* x, *Cotg* x, *Sec* x, *Cosec* x, vorgestellten Ausdrücke nennt man trigonometrische Funktionen, und für spezielle Werthe von x (in den Anwendungen auf die Raumgrößenlehre), auch trigonometrische *) Linien. Und x selbst heißt gewöhnlich der Bogen.

*) Man könnte auch die Differenzen 1—*Cos* x, und 1—*Sin* x, beziehlich durch *Sin vers* x und *Cos vers* x bezeichnen. —

§. 622. Zusatz.

Aus den Erklärungen des (§. 621.) folgt sogleich:

1) Ist x ein Ausdruck von der Form $p+qi$, so sind auch nothwendig die Funktionen *Sin* x, *Cos* x, *Tg* x, *Cotg* x, *Sec* x, *Cosec* x, Ausdrücken gleich von derselben Form.

2) Für einen bestimmten Werth $p+qi$ von x, hat jede der Funktionen *Sin* x, *Cos* x, *Tg* x, *Cotg* x, *Sec* x, *Cosec* x, nur einen einzigen Werth.

3) Zu jedem reelen Werth von x gehören auch lauter reele Werthe der trigonometrischen Funktionen *Sin* x, *Cos* x, *Tg* x, *Cotg* x, *Sec* x und *Cosec* x.

§. 623. Zusatz.

Nach den Definitionen des (§. 621.) hat man also:

1) $$Sin\,x = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right] = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

2) $$Cos\,x = S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{2a}}{(2a)!}\right] = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2};$$

In einem der folgenden Theile dieses Werkes, welcher die Raum-Größenlehre enthalten soll, wird gezeigt werden, wie die hier erklärten trigonometrischen Funktionen, in einem besonderen Fall, wo x eine absolute Zahl ist, während x hier jeden beliebigen Ausdruck vorstellt, auch in der Raumgrößenlehre Anwendung finden.

Daß übrigens der Wissenschaftsforscher bey Aufstellung eines Systems der Wissenschaft, sich nicht um ihre Geschichte bekümmern darf, braucht wohl nicht besonders erinnert zu werden. Die Geschichte führt uns immer zu besondern, einer bestimmten Sphäre entnommenen Begriffen; die Wissenschaft steht ihrer selbst wegen da, und muß dabey zu den allgemeinsten Begriffen zu gelangen trachten.

Die Lehre dieser sogenannten trigonometrischen Funktionen, nennt man aber insbesondere die analytische Trigonometrie. — Die analytische Trigonometrie, so wie sie hier eben definirt worden, ist also von der Geometrie ganz unabhängig, findet aber in der Geometrie ihre Anwendung, und wird dann zur ebenen und zur sphärischen Trigonometrie.

3) $Tg\ x = \frac{Sin\ x}{Cos\ x}$; 4) $Cotg\ x = \frac{Cos\ x}{Sin\ x}$;

5) $Sec\ x = \frac{1}{Cos\ x}$; 6) $Cosec\ x = \frac{1}{Sin\ x}$.

§. 624. Zusatz.

Aber daraus geht sogleich hervor, für $x = 0$,

1) $Sin\ 0 = 0$; 2) $Cos\ 0 = 1$;
3) $Tg\ 0 = 0$; 4) $Cotg\ 0 = \frac{1}{0}$;
5) $Sec\ 0 = 1$; 6) $Cosec\ 0 = \frac{1}{0}$.

Und für $-x$ statt x,

7) $Sin\ (-x) = -Sin\ x$; 8) $Cos\ (-x) = Cos\ x$;
9) $Tg\ (-x) = -Tg\ x$; 10) $Cotg\ (-x) = -Cotg\ x$;
11) $Sec\ (-x) = Sec\ x$; 12) $Cosec\ (-x) = -Cosec\ x$.

§. 625. Zusatz.

Quadrirt man die Gleichungen (1. u. 2. des §. 619.), so erhält man:

1) $Sin\ x^2 + Cos\ x^2 = 1$; *)

woraus $Sin\ x = \sqrt{1 - Cos\ x^2}$,

$Cos\ x = \sqrt{1 - Sin\ x^2}$ folgert;

in welchen letztern Gleichungen, weil $Sin\ x$ und $Cos\ x$ nur eindeutig sind, offenbar immer nur der eine Werth der Quadratwurzel genommen werden darf, und zwar bald der positive, bald der negative, wie solches in jedem einzelnen Falle erst entschieden werden muß; indem späterhin zu untersuchen ist, für welche Werthe von y, die Funktionen $Sin\ y$ und $Cos\ y$ positiv oder negativ seyn werden.

Und dividirt man diese (1.) beziehlich mit $Cos\ x^2$ und mit $Sin\ x^2$, so ergiebt sich noch:

---

*) Durch eine treffende Bemerkung veranlaßt, schreibt der Verf. nicht mehr $Cos^2 x$ oder $(Cos\ x)^2$ statt $Cos\ x^2$; eben so nicht mehr $Sin^2 x$ und auch nicht $(Sin\ x)^2$ statt $Sin\ x^2$; wird aber $Sin(u^2)$ schreiben, wenn er den Werth der Reihe $Sin\ x$ für $x = u^2$ ausdrücken will.

2) $Tg\,x^2 + 1 = Sec\,x^2$;

3) $1 + Cotg\,x^2 = Cosec\,x^2$.

Desgleichen findet sich noch aus der Vergleichung der Formeln (3. u. 4.) des (§. 623.)

4) $Cotg\,x = \frac{1}{Tg\,x}$; und 5) $Tg\,x = \frac{1}{Cotg\,x}$.

Ueberhaupt kann man jede der 6 trigonometrischen Funktionen $Sin\,x$, $Cos\,x$, $Tg\,x$, $Cotg\,x$, $Sec\,x$, $Cosec\,x$, durch jede der 5 übrigen ausdrücken, von welchen Resultaten wir noch bemerken wollen:

6) $Sin\,x = \frac{Tg\,x}{\sqrt{(1+Tg\,x^2)}}$; 7) $Cos\,x = \frac{1}{\sqrt{(1+Tg\,x^2)}}$.

Die Richtigkeit dieser letztern Behauptung fällt aber sogleich in die Augen, wenn man bedenkt, daß man zwischen den 6 Zeichen $Sin\,x$, $Cos\,x$, $Tg\,x$, $Cotg\,x$, $Sec\,x$, $Cosec\,x$, allemal 5 von einander unabhängige Gleichungen hat, nämlich die Gleichung (§. 625. N. 1.) und dann noch die Gleichungen (§. 623. N. 3—6.)

§. 626. Zusatz.

Die für die Folge wichtigsten Formeln gehen aus (1. und 2. des §. 623.) hervor, wenn man die (1.) mit i multiplizirt, und dann zur (2.) addirt, oder von der (2.) subtrahirt; man erhält nämlich dann:

1) $e^{ix} = Cos\,x + i \cdot Sin\,x$,

2) $e^{-ix} = Cos\,x - i \cdot Sin\,x$;

und wenn man (1.) durch (2.) dividirt,

3) $e^{2ix} = \frac{Cos\,x + i \cdot Sin\,x}{Cos\,x - i \cdot Sin\,x} = \frac{1 + i \cdot Tg\,x}{1 - i \cdot Tg\,x}$.

Und weil, wenn m eine Differenz ganzer Zahlen, d. h. eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 ist, allemal (§. 616. IV.)

$$(e^{xi})^m = e^{(mx)i}$$

seyn muß, so giebt diese Gleichung (1.) noch

4) $(Cos\,x + i \cdot Sin\,x)^m = Cos\,(mx) + i \cdot Sin\,(mx)$; **)

---

*) Zähler und Nenner zugleich durch $Cos\,x$ dividirt.

**) Diese Formel ist in vielen Fällen deshalb so bequem, weil die

so wie

$$5)\ (Cos\,x - i\cdot Sin\,x)^m = Cos(mx) - i\cdot Sin(mx).$$

Aus diesen Gleichungen (4. und 5.) geht aber wieder hervor, wenn man sie addirt oder subtrahirt:

$$6)\ Cos(mx) = \frac{(Cos\,x + i\cdot Sin\,x)^m + (Cos\,x - i\cdot Sin\,x)^m}{2};$$

$$7)\ Sin(mx) = \frac{(Cos\,x + i\cdot Sin\,x)^m - (Cos\,x - i\cdot Sin\,x)^m}{2i}.$$

Und weil nach dem binomischen Lehrsatze (§. 401.):

$$(Cos\,x + i\cdot Sin\,x)^m = S[m_a\cdot Cos\,x^{m-a}\cdot i^a\cdot Sin\,x^a],$$

d. h. nach (§. 387.):

$$(Cos\,x + i\cdot Sin\,x)^m = S[m_{2a}\cdot Cos\,x^{m-2a}(-1)^a\cdot Sin\,x^{2a}] + i\cdot S[m_{2a+1}\cdot Cos\,x^{m-2a-1}(-1)^a\cdot Sin\,x^{2a+1}],$$

so wie, wenn $-i$ statt i gesetzt wird, was allemal erlaubt ist, weil i durchgehends einen und denselben beliebigen Werth von $\sqrt{-1}$ vorstellt, und $-i$ ebenfalls einer ihrer Werthe ist:

$$(Cos\,x - i\cdot Sin\,x)^m = S[m_{2a}\cdot Cos\,x^{m-2a}(-1)^a\cdot Sin\,x^{2a}] - i\cdot S[m_{2a+1}\cdot Cos\,x^{m-2a-1}(-1)^a\cdot Sin\,x^{2a+1}]$$

ist, so folgt, wenn man diese Werthe in (6. und 7.) substituirt:

$$8)\ Cos(mx) = S[m_{2a}\cdot Cos\,x^{m-2a}(-1)^a\cdot Sin\,x^{2a}],$$

und $9)\ Sin\,(mx) = S[m_{2a+1}\cdot Cos\,x^{m-2a-1}(-1)^a\cdot Sin\,x^{2a+1}]$,

d. h. $Cos(mx) = Cos\,x^m - m_2\cdot Cos\,x^{m-2}\cdot Sin\,x^2 + m_4\cdot Cos\,x^{m-4}\cdot Sin\,x^4 - \cdots$

---

mte Potenz eines zweigliedrigen Ausdrucks hier selber wieder nur zweigliedrig wird. So wie sie hier steht, darf sie aber nur angewandt werden, wenn der Exponent m eine positive oder negative ganze Zahl ist.

und $Sin(mx) = m_1 \cdot Cos\,x^{m-1} \cdot Sin\,x - m_3 \cdot Cos\,x^{m-3} \cdot Sin\,x^3 + m_5 \cdot Cos\,x^{m-5} \cdot Sin\,x^5 - \cdots,$

wo aber überall m eine positive oder negative ganze Zahl seyn muß, während im letztern Fall, wenn nämlich m eine negative ganze Zahl ist, die Reihen zur Rechten unendliche sind, daher auch konvergent seyn müssen, wenn sie weiter gebraucht werden sollen.

Anmerkung. Wendet man in diesen beiden letztern Gleichungen den Satz an, daß

$$Cos\,x^2 + Sin\,x^2 = 1$$

ist, so kann man aus ihnen $Cos\,x$ oder $Sin\,x$ eliminiren, und erhält $Cos\,mx$ und $Sin\,mx$ in Potenzen von $Cos\,x$ oder $Sin\,x$ ausgedrückt, immer jedoch hier vorläufig nur unter der Voraussetzung, daß m eine positive oder negative ganze Zahl ist, und daß im letztern Falle die unendlichen Reihen noch konvergent sind.

§. 627. Die 4 Hauptlehrsätze der analytischen Trigonometrie.

Sind x und y ganz allgemein, also beliebig reel oder imaginär, so ist doch allemal

I. $Sin\,(x+y) = Sin\,x \cdot Cos\,y + Cos\,x \cdot Sin\,y;$
II. $Sin\,(x-y) = Sin\,x \cdot Cos\,y - Cos\,x \cdot Sin\,y;$
III. $Cos\,(x+y) = Cos\,x \cdot Cos\,y - Sin\,x \cdot Sin\,y;$
IV. $Cos\,(x-y) = Cos\,x \cdot Cos\,y + Sin\,x \cdot Sin\,y.$

Beweise ergeben sich unmittelbar, wenn man statt

$$Sin\,z \quad \text{und} \quad Cos\,z,$$

beziehlich $\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$ und $\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$ setzt

(so daß z. B. die Gleichung I. die Form

$$\frac{e^{(x+y)i} - e^{-(x+y)i}}{2i} = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \cdot \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} + \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \cdot \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$$

annimmt); und nun nach den Regeln der Zahlenlehre, namentlich der (I. und II. §. 616.) zusieht, ob die so geschriebenen Gleichungen richtig sind. Dies fällt aber für dieselbe Gleichung (I.) sogleich in die Augen, da man augenblicklich

$$\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\cdot\frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2}=\frac{(e^{xi}-e^{-xi})(e^{yi}+e^{-yi})}{4i}$$

$$=\frac{e^{(x+y)i}-e^{(-x+y)i}+e^{(x-y)i}-e^{-(x+y)i}}{4i},$$

so wie, wenn man x und y mit einander vertauscht, hieraus

$$\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}\cdot\frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i}=\frac{e^{(x+y)i}-e^{(x-y)i}+e^{(-x+y)i}-e^{-(x+y)i}}{4i}$$

erhält, während beide Ausdrücke zur Rechten zusammen addirt, augenfällig $\frac{e^{(x+y)i}-e^{-(x+y)i}}{2i}$ d. h. $Sin(x+y)$ geben. —

Gerade so leicht ergeben sich die übrigen Gleichungen.

Die Gleichungen (II.) und (IV.) folgen noch überdies auch aus denen (I. und III.), wenn man $-y$ statt y setzt, und (§. 624. N. 7. und 8.) in Anwendung bringt.

Endlich kann man, nachdem die (I.) erwiesen ist, dadurch, daß man $-y$ statt y setzt, die (II.) ableiten; dann aber in (II.) $x+y$ statt x setzen, so erhält man eine neue Gleichung, welche, nachdem in ihr statt $Sin(x+y)$ der aus (I.) bekannte Ausdruck zur Rechten gesetzt worden ist, für $Cos(x+y)$ die Gleichung (III.)*) liefert, aus welcher dann die (IV.) hervorgeht, sobald $-y$ statt y gesetzt wird.

Note. Da mit diesen Lehrsätzen das wichtigste der analytischen Trigonometrie beendigt ist, so sey es uns vergönnt, ehe wir weiter gehen, noch mit kurzen Worten anzudeuten, wie man dieselben Begriffe und dieselben Resultate aus geometrischen Betrachtungen abzuleiten pflegt.

1) Man findet nämlich in der Geometrie, daß wenn (Fig. 1.), AB, A_1B_1, A_2B_2 &c. beliebige, auf BC senkrechte Linien sind, daß die Quotienten je zweier Seiten in den rechtwinklichen Dreiecken ABC, A_1B_1C, A_2B_2C &c. beziehlich alle einander gleich sind, also nicht von der Größe der Seiten, sondern nur von dem Winkel x abhängen. Bezeichnet man daher in irgend einem dieser Dreiecke die drei Seiten AB, BC und AC durch die Buchstaben c, a und b, so kann man die 6 Quotienten

$$\frac{c}{b'}\quad\frac{a}{b'}\quad\frac{c}{a'}\quad\frac{a}{c'}\quad\frac{b}{a'}\quad\frac{b}{c}$$

---

*) Man muß aber, soll es dem Anfänger, der dieses Herleiten versucht, auch wirklich gelingen, nicht unbemerkt lassen, daß

$Sin\,x\cdot Cos\,y^2-Sin\,x=-Sin\,x\cdot[1-Cos\,y^2]=-Sin\,x\cdot Sin\,y^2$ ist.

bilden, und weil sie bloß von x abhängen, solche beziehlich durch *Sin* x, *Cos* x, *Tg* x, *Cotg* x, *Sec* x, *Cosec* x bezeichnen, so daß diese Zeichen absolute Zahlen bedeuten, die in jedem rechtwinklichen Dreieck (groß oder klein) dieselben Werthe behalten, so lange der Winkel x derselbe bleibt, die also bloß von dem Winkel x abhängig sind.

2) Da nun im rechtwinklichen Dreieck ABC, $b^2 = a^2 + c^2$ ist, so erhält man, wenn hier durch beziehlich b^2, a^2 oder c^2 dividirt wird, neue Gleichungen, welche in diese neuen Zeichen umgeformt, sogleich die Gleichungen (§. 625. N. 1 bis 3.) liefern, der Form nach, wenn letztere auch viel allgemeiner sind als diejenigen, von denen in diesem Augenblicke die Rede ist.

Die Gleichungen (§. 623. N. 5. 6. und §. 625. N. 4. 5.) ergeben sich augenblicklich aus dem Umstande, daß $1 : \frac{p}{q} = \frac{q}{p}$ ist.

3) Die 4 Hauptlehrsätze des (§. 627.) werden für diese speziellen Sinus und Cosinus, wie folgt, außer Zweifel gesetzt: Ist nämlich, (Fig. 2.) W. DCE = x, und W. ACD = y, so ist W. ACE = x + y, und, wenn AD senkrecht auf CD gezogen wird, W. FAD = x; folglich wenn AB, DE auf CE, und DF auf AB senkrecht gezogen sind,

$$Sin(x+y) = \frac{AB}{AC},$$

so wie $Sin\,x = \frac{DE}{DC} = \frac{DF}{AD}$, $Cos\,x = \frac{CE}{CD} = \frac{AF}{AD}$,

$$Sin\,y = \frac{AD}{AC}, \quad Cos\,y = \frac{CD}{AC};$$

also $$Sin\,x \cdot Cos\,y = \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{DE}{AC};$$

und $$Cos\,x \cdot Sin\,y = \frac{AF}{AD} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AC};$$ mithin

ist, wenn man beide letztere Gleichungen addirt, der Lehrsatz (I.) des (§. 627.), wenigstens der Form nach derselbe, aber in der jetzigen Bedeutung genommen weniger allgemein, außer Zweifel.

Genau so, mit Hülfe derselben Figur, wird der Lehrsatz (§. 627. III.) erwiesen.

Zu den Lehrsätzen (II. und IV.) nimmt man aber lieber die (Figur 3.), wo W. ACB = x, W. DCB = y, W. ACD = x − y, AB senkrecht auf BC, und AE und BF senkrecht auf CD und BE stehen, wo

also $Sin(x-y) = \frac{AD}{AC'}$ so wie

$Sin\,x = \frac{AB}{AC'}$ $Cos\,x = \frac{BC}{AC'}$

$Sin\,y = \frac{BF}{BC} = \frac{BE}{AB}$ und $Cos\,y = \frac{CF}{BC} = \frac{AE}{AB}$ ist.

4) Man kann aber auch das rechtwinkliche Dreieck ABC, mit der Spitze C in den Mittelpunkt eines Kreises setzen, wie (Fig. 4.) zu sehen, und den Maaßstab, womit die Linien vor der Division gemessen werden müssen, so nehmen, daß der Radius $AC = CE = CG = 1$ wird, so ist dann, wenn GCE ein rechter Winkel ist,

$$Sin\,x = \frac{AB}{1} = AB; \qquad Cos\ x = \frac{BC}{1} = BC;$$

$$Tg\,x = \frac{DE}{CE} = DE; \qquad Cotg\ x = \frac{CB}{AB} = \frac{GH}{CG} = GH;$$

$$Sec\,x = \frac{CD}{CE} = CD; \qquad Cosec\,x = \frac{CA}{CB} = \frac{CH}{CG} = CH;$$

wenn man nur unter AB, BC, DE, GH, CD uud CH nicht die Linien selber, sondern die Zahlen setzt, welche sich für sie ergeben, wenn man den Maaßstab so nimmt, daß der Radius 1 wird.

Aus dieser Figur, und mit Hülfe dieser Versinnlichung der Sinus, Kosinus ꝛc. (in Gestalt von Linien), ergeben sich wieder die bisher schon erwähnten Formeln (Gleichungen) augenblicklich.

5) Allein auf diesem Wege hat man Resultate, welche in den speziellen Fällen nur gelten, wo x und y und $x+y$ ꝛc. spitze Winkel sind.

Man kann jedoch in letzterer Kreisfigur die Begriffe der Sinus und Kosinus sogleich allgemeiner auffassen, wenn man festsetzt: daß man unter Sinus von x, mag x ein beliebiger hohler oder erhabener Winkel seyn, allemal die senkrechte Linie (als Zahl gedacht für den Radius 1) nehmen wolle, welche von dem Endpunkte des einen Schenkels auf den andern Schenkel herabgefällt werden kann, mit dem (+ oder −) Zeichen noch versehen, je nachdem der Winkel hohl oder erhaben ist; während Kosinus von x allemal das Stück des andern Schenkels bedeuten solle, welches der Sinus vom Mittelpunkte ab gerechnet abschneidet, ebenfalls mit dem (+ oder −) Zeichen versehen, je nachdem dieses abgeschnittene Stück, vom Mittelpunkt ausgegangen, in der anfänglichen, oder in der entgegengesetzten Richtung läuft. — Auf diese Weise gewinnen die Sinus und Kosinus aller Winkel, selbst diejenigen, die größer als 4 rechte sind, eine Bedeutung, sobald man im letztern Fulle noch hinzufügt, daß solche Winkel geometrisch als

diejenigen betrachtet werden sollen, welche den Ueberschuß über 4 rechte, oder über 8 rechte, oder über 12 rechte ꝛc., oder allgemein über 4n rechte Winkel bilden, und dabei kleiner als 4 rechte Winkel sind.

Nicht aber weiß man nun, erstlich: ob das für den erstern speziellern Fall Gefundene, für diese nun schon allgemeiner aufgefaßten Sinus und Cosinus noch gelten werde? und zweitens, was man unter *Sin* x oder *Cos* x sich zu denken habe, wenn x negativ oder imaginär ist, wenn man auch im Nothfalle die Bedeutung derselben, wenn $x = 0$ ist, durch Analogie aus dem Falle, wo x sehr klein ist, ableiten könnte.

6) Man pflegt daher die Bedeutung von *Sin* x und *Cos* x für den Fall, daß x negativ ist, noch durch die eigenthümliche Festsetzung nachzuweisen, daß man in diesem Falle die Winkel in entgegengesetzter Richtung entstehend und größer werdend sich denken, und nun die alten Bedeutungen der Sinus und Kosinus mit der Modifikation beibehalten wolle, daß die (+ oder —) Zeichen der Bedeutungeu genau nach der Lage der Sinus und Kosinus gegen die anfängliche der spitzen Winkel sich richten solle.

Durch diese Annahme rechtfertigen sich die Gleichungen, welche hier (§. 624. N. 7 bis 12.) zu finden sind.

7) Sinus von x, und Kosinus von x, wenn x eine imaginäre Zahl ist, erhält man auf diesem Wege gar nicht. Eben so schwer fällt es, nachzuweisen, daß die oben in den (§§.) entwickelten Gleichungen noch gelten, wenn die jetzigen, auf alle wirklichen, und auch auf die fingirten negativen Winkel, ausgedehnten Begriffe der Sinus und Kosinus zu Grunde gelegt werden. — Daher wird ein gründlicherer Vortrag, wenn er auch diese trigonometrischen Funktionen als reine Zahlenbegriffe aus geometrischen (uns hier ganz fremden) Betrachtungen ableitet, doch einen Weg sich bahnen müssen, der das Mangelhafte möglichst zu ersetzen im Stande ist; und aus dieser Rücksicht ist in dem zweiten Bande der Elementar-Mathematik, Berlin, 1826, ohngefähr der folgende Gang gewählt worden.

Man hat nämlich wie in (N. 1.) hier, die Begriffe der *Sin* x und *Cos* x für den spitzen Winket x festgesetzt, aus dem Dreieck oder aus dem Kreise entnommen; für diese, die in (N. 2 und 3.) erwähnten Formeln für spitze Winkel hingestellt, dann aber sogleich sich dieser Formeln bedient, um für *Sin* x und *Cos* x unendliche Reihen zu finden, welche berechnet, näherungsweise dieselben Werthe liefern. Und da fand sich

$$Sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

$$Cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

unter der Voraussetzung jedoch, daß x nicht die Zahl der Grade, sondern die abstrakte Zahl vorstellt, durch welche die Länge des mit dem Radius 1, zwischen den Schenkeln des fraglichen Winkels beschriebenen Kreisbogens, ausgedrückt wird.

So fand man also für spitze Winkel:

$$\left.\begin{aligned} Sin\,x &= \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i} \\ Cos\,x &= \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2} \end{aligned}\right\}$$ d. h. die obigen Reihen symbolisch dargestellt,

und nun konnte man die Begriffe sogleich ganz allgemein geben, indem man, wie auch hier im Texte geschehen ist, unter $Sin\,x$ und $Cos\,x$ diese Reihen selbst verstehen zu wollen festsetzte, was man auch immer unter x sich denken mag, während man aus dieser vorangegangenen Untersuchung schon wußte, daß diese Reihen, so oft für x die Länge eines Bogens gesetzt wird (für den Radius 1 genommen), berechnete Werthe liefern, welche mit obigen Quotienten übereinstimmen.

Hier, in einem Lehrgebäude, welches die Zahl vor der Größe, die Analysis (Zahlenlehre) vor der Geometrie behandelt, mußten die reinen Zahlenbegriffe, welche das Wesen der sogenannten trigonometrischen Linien ausmachen, ganz allgemein und von der Geometrie unabhängig hingestellt werden; und spätern Theilen dieses Systems muß es vorbehalten bleiben, den Uebergang auf die Geometrie und auf die speziellern trigonometrischen Linien nachzuweisen. — In jedem Falle leitet aber nun unser Text aus den bis jetzt entwickelten Hauptsätzen der analytischen Trigonometrie neue unwesentlichere aber praktische Umformungen ab, wie die folgenden Paragraphen zeigen.

§. 628. Zusatz.

Will man Summen und Differenzen zweier Kosinus oder Sinus in Produkte derselben verwandeln, oder Produkte in Summen und Differenzen, so addirt und subtrahirt man die Sätze (I. u. II.), desgleichen (III. u. IV.) des (§. 627.), und erhält:

1) $Sin\,x \cdot Cos\,y = \frac{1}{2}Sin\,(x+y)+\frac{1}{2}Sin\,(x-y)$,
2) $Cos\,x \cdot Sin\,y = \frac{1}{2}Sin\,(x+y)-\frac{1}{2}Sin\,(x-y)$,
3) $Cos\,x \cdot Cos\,y = \frac{1}{2}Cos\,(x-y)+\frac{1}{2}Cos\,(x+y)$,
4) $Sin\,x \cdot Sin\,y = \frac{1}{2}Cos\,(x-y)-\frac{1}{2}Cos\,(x+y)$,

welche sich, wenn man x+y durch α und x—y durch β bezeichnet, umwandeln in:

5) $Sin\ \alpha + Sin\ \beta = 2Sin\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot Cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

6) $Sin\ \alpha - Sin\ \beta = 2Cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot Sin\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

7) $Cos\alpha + Cos\beta = 2Cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot Cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

8) $Cos\beta - Cos\alpha = 2Sin\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cdot Sin\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
$= -2Sin\ \frac{1}{2}(\beta+\alpha)\cdot Sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$.

Und dividirt man diese letztern Gleichungen paarweise durch einander, so erhält man viele neue Gleichungen, in welchen zur rechten $\frac{Sin}{Cos}$ oder $\frac{Cos}{Sin}$, also Tangenten und Kotangenten erscheinen. Sie mögen hier stehen:

9) $\frac{Sin\ \alpha + Sin\ \beta}{Sin\ \alpha - Sin\ \beta} = \frac{Tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{Tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$,

10) $\frac{Sin\ \alpha + Sin\ \beta}{Cos\alpha + Cos\beta} = Tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$,

11) $\frac{Sin\ \alpha + Sin\ \beta}{Cos\alpha - Cos\beta} = -Cotg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

12) $\frac{Sin\ \alpha - Sin\ \beta}{Cos\alpha + Cos\beta} = Tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$,

13) $\frac{Sin\ \alpha - Sin\ \beta}{Cos\alpha - Cos\beta} = -Cotg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$,

14) $\frac{Cos\ \alpha + Cos\ \beta}{Cos\ \alpha - Cos\ \beta} = -\frac{Cotg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{Tg\ \ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$.

Ferner erhält man noch durch bloße Multiplikation, und mit Anwendung von (§. 627.)

15) $(Cos\,x \pm i\cdot Sin\,x)(Cos\,y \pm i\cdot Sin\,y)$
$= Cos(x+y) \pm i\cdot Sin(x+y)$,

16) $(Cos\,x \pm i\cdot Sin\,x)(Cos\,y \mp i\cdot Sin\,y)$
$= Cos(x-y) \pm i\cdot Sin(x-y)$.

Und will man endlich Summen oder Differenzen von Tangenten oder Kotangenten in Produkte oder Quotienten verwandeln, so erhält man sogleich, wenn man $\frac{Sin}{Cos}$ statt jeder *Tg*, und $\frac{Cos}{Sin}$

statt jeder *Cotg* schreibt, mit Anwendung der Hauptsätze des (§. 627.)

17) $Tgx + Tgy = \frac{Sin\ (x+y)}{Cosx \cdot Cosy}$,

18) $Tgx - Tgy = \frac{Sin\ (x-y)}{Cosx \cdot Cosy}$,

19) $Cotgx + Cotgy = \frac{Sin\ (x+y)}{Sinx \cdot Siny}$,

20) $Cotgx - Cotgy = -\frac{Sin\ (x-y)}{Sinx \cdot Siny}$;

aus welchen Formeln, wenn man sie paarweise mit einander multiplizirt, oder durch einander dividirt, sogleich wiederum neue anwendbare Formeln hervorgehen.

Hätte man aber $Tg(x \pm y)$ und $Cotg(x \pm y)$ in Tgx und Tgy, oder in $Cotgx$ und $Cotgy$ auszudrücken, so dürfte man nur die Formeln (§. 627.) paarweise durch einander dividiren, und in den Quotienten zur Rechten, Zähler und Nenner zugleich, entweder durch $Cosx \cdot Cosy$ oder durch $Sinx \cdot Siny$ dividiren; und man erhielte:

21) $Tg(x \pm y) = \frac{Tgx \pm Tgy}{1 \mp Tgx \cdot Tgy}$,

22) $Cotg(x \pm y) = \frac{Cotgx \cdot Cotgy \mp 1}{Cotgy \pm Cotgx}$.

Anmerkung. Da sich die Formeln hier sogleich ungemein anhäufen, so thut der Anfänger am besten, im Gedächtniß nur die allerersten Begriffe und die allereinfachsten Formeln zu behalten, besonders die Hauptsätze des (§. 627.) sich sorgfältig einzuprägen, aber dann überall mit der Ueberzeugung auszugehen, daß mit diesem Wenigen alles vorkommende Zweckgemäße sich sogleich und leicht ableiten lassen werde.

§. 629. Zusatz.

Will man Sinus und Kosinus größerer Bogen aus Sinus und Kosinus kleinerer ableiten, so dienen dazu dieselben Formeln (1. u. 3. des §. 628.) nur so umgeformt:

1) $Sin\ (x+y) = 2Sin\ x \cdot Cosy - Sin\ (x-y)$,

2) $Cos\ (x+y) = 2Cosx \cdot Cosy - Cos\ (x-y)$,

welche sich in

3) $Sin\ (ny) = 2\ Sin(n-1)y \cdot Cos\ y - Sin(n-2)y.$

4) $Cos\ (ny) = 2Cos(n-1)y \cdot Cos\ y - Cos(n-2)y.$

umformen, sobald man $(n-1)y$ statt x setzt.

Diese letztern beiden Formeln dienen besonders dazu, aus den direkt berechneten Sinus und Kosinus eines sehr kleinen Bogens y, [für welchen die 2 ersten Glieder der Reihen

$$Sin\ y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \text{ &c.}$$

und $$Cos\ y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \text{ &c. &c.}$$

bereits große Genauigkeit geben, ja für welchen man bloß

$$Sin\ y = y \quad \text{und} \quad Cos\ y = 1 - \frac{y^2}{2}$$

nehmen kann, die 3ten und höhern Potenzen von y als unbedeutend außer Acht lassend], nach und nach die Sinus und Kosinus der doppelten, 3fachen, 4fachen, 5fachen &c., überhaupt jedes größern Bogens zu berechnen, und doch immer nur möglichst einfache Rechnungen zu haben.

§. 630. Zusatz.

Setzt man in (3. u. 4. des §. 629.) statt n nach und nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c., so erhält man hieraus noch, unter der Voraussetzung, daß jedesmal die früheren Resultate statt der Sinus der vielfachen y substituirt werden.

A. Aus (No. 3.):

1) $Sin\ y = Sin\ y,$

2) $Sin\,2y = 2Sin\,y \cdot Cos\,y,$

3) $Sin\,3y = [4Cos\,y^2 - 1] \cdot Sin\,y,$

4) $Sin\,4y = [8Cos\,y^3 - 4Cos\,y] \cdot Sin\,y,$

5) $Sin\,5y = [16Cos\,y^4 - 12Cos\,y^2 + 1] \cdot Sin\,y,$

u. s. w. f.

B. Aus (No. 4.):

1) $Cos\ y = Cos\,y,$

2) $Cos\,2y = 2Cos\,y^2 - 1,$

3) $Cos3y = 4Cosy^3 - 3Cosy$,
4) $Cos4y = 8Cosy^4 - 8Cosy^2 + 1$,
5) $Cos5y = 16Cosy^5 - 20Cosy^3 + 5Cosy$,

u. s. w. f.

Und setzt man in den vorstehenden Resultaten durchaus $1 - Siny^2$ statt $Cosy^2$, so ergiebt sich noch:

C. Aus (A):

1) $Sin\ y = Siny$,
2) $Sin2y = 2Siny \cdot Cosy$,
3) $Sin3y = 3Siny - 4Siny^3$,
4) $Sin4y = [4Siny - 8Siny^3] \cdot Cosy$,
5) $Sin5y = 5Siny - 20Siny^3 + 16Siny^5$,
6) $Sin6y = [6Siny - 32Siny^3 + 32Siny^5] \cdot Cosy$,

u. s. w. f.

D. Aus (B):

1) $Cos\ y = Cosy$,
2) $Cos2y = 1 - 2Siny^2$,
3) $Cos3y = [1 - 4Siny^2] \cdot Cosy$,
4) $Cos4y = 1 - 8Siny^2 + 8Siny^4$,
5) $Cos5y = [1 - 12Siny^2 + 16Siny^4] \cdot Cosy$,
6) $Cos6y = 1 - 18Siny^2 + 48Siny^4 - 32Siny^6$,

u. s. w. f.

Anmerkung. Die vorstehenden Gleichungen (A), (B), (C), (D), befolgen offenbar auf der rechten Seite in ihren Koeffizienten ein gewisses Gesetz, so daß sich in allen 4 Parthien $Sin(my)$, $Cos(my)$, durch Aggregate sich darstellen lassen müssen. — Obgleich wir zur Auffindung dieses Gesetzes später erst zurückkehren werden, so mögen doch vorläufig die Resultate hier Platz finden.

Man findet nämlich folgende Gesetze:

A. Für die Formeln (A):

$$Sin(my) = Siny \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{(m-a-1)^{a|-1}}{a!}(2Cosy)^{m-2a-1}\right]_{2a+b=m-1};$$

oder, wenn man ungerade und gerade m von einander unterscheiden will,

$$Sin(my) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot Siny \cdot S\left[(-1)^a \frac{(m-2a+1)^{2a|2}}{(2a)!} Cosy^{2a}\right],$$

wenn m ungerade, dagegen

$$Sin(my) = (-1)^{\frac{m}{2}} Sin\,y \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{(m-2a)^{2a+1|2}}{(2a+1)!} \cdot Cos\,y^{2a+1}\right]$$

im Falle m eine gerade Zahl ist.

B. Für die Formeln (B):

$$Cos(my) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{(m-a-1)^{a-1|-1}}{a!} (2Cos\,y)^{m-2a}\right]_{2a+b=m}$$

oder, wenn wiederum ungerade und gerade m von einander unterschieden werden:

$$Cos(my) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{m \cdot (m-2a+1)^{2a|2}}{(2a+1)!} Cos\,y^{2a+1}\right]$$

wenn m ungerade, dagegen

$$Cos(my) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cdot S\left[(-1)^a \frac{m \cdot (m-2a+2)^{2a-1|2}}{(2a)!} Cos\,y^{2a}\right]$$

im Falle m gerade ist.

C. Für die Formeln (C):

$$Sin(my) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{m(m-2a+1)^{2a|2}}{(2a+1)!} Sin\,y^{2a+1}\right]$$

wenn m ungerade, dagegen

$$Sin(my) = Cos\,y \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{m \cdot (m-2a)^{2a|2}}{(2a+1)!} Sin\,y^{2a+1}\right]$$

wenn m eine gerade Zahl ist.

D. Endlich für die Formeln (D):

$$Cos(my) = Cos\,y \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{(m-2a+1)^{2a|2}}{(2a)!} Sin\,y^{2a}\right]$$

wenn m ungerade ist, dagegen

$$Cos(my) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{m \cdot (m-2a+2)^{2a-1|2}}{(2a)!} Sin\,y^{2a}\right]$$

wenn m eine gerade Zahl ist.

Sind diese Gesetze einmal (analytisch) aufgefunden, so kann man sich auch synthetisch von ihrer Richtigkeit überzeugen, d. h. solche erweisen, und zwar alle dadurch, daß man zuvor zeigt, wie sie allemal für $m = h+1$ gelten müssen, so oft sie für die beiden nächstvorhergehenden ganzen Werthe von m, nämlich für $m = h$ und für $m = h-1$ zu gleicher Zeit gelten, unter h eine bestimmte ganze Zahl gedacht.

Zu diesem erstern Theil der Beweise werden allemal die Sätze (§. 629. No. 3 u. 4.) in Anwendung gebracht, h+1 statt n setzend. Nachgehends zeigt es sich aus der Vergleichung der, aus den allgemeinen Formeln für $m=1$, und $m=2$, hervorgehenden Resultate, mit den im (§. 630.) selbst stehenden, daß sie gelten für $m=1$ und für $m=2$, also auch für $m=3$; mithin, weil sie nun für $m=2$ und $m=3$ statt finden, müssen sie auch für $m=4$ u. s. w. f., für jede ganze Zahl gelten, welche statt m gesetzt werden mag. Auf dieses Gesetz werden wir später zurückkommen.

§. 631. Zusatz.

Unter den vorliegenden Formeln des (§. 630.) sind am häufigsten anwendbar die (Nummern 2.), nämlich:

$$1)\ Sin\,2y = 2Siny \cdot Cos\,y,$$

$$2)\ Cos\,2y = 2Cos\,y^2 - 1,$$

$$3)\ Cos\,2y = 1 - 2Sin\,y^2,$$

welche daher dem Gedächtniß wohl einzuprägen sind. — Dieselben ergeben sich direkt aus den Hauptlehrsätzen (§. 627. I. II.) wenn man dort y statt x setzt. — Aus ihnen geht sogleich noch hervor:

$$4)\ Cos\,y = \sqrt{\frac{1+Cos\,2y}{2}},$$

$$5)\ Sin\,y = \sqrt{\frac{1-Cos\,2y}{2}},$$

durch welche Sinus und Kosinus des halben Bogens durch den Kosinus des ganzen ausgedrückt sind, in welchen jedoch von den Quadratwurzeln immer nur einer der Werthe zu nehmen ist, bald der positive, bald der negative, wie solches bei näherer Untersuchung der reelen Werthe von $Siny$ und $Cos\,y$ für die einzelnen Werthe von y, jedesmal sich erst ergeben kann.

Und da $Tg = \frac{Sin}{Cos}$ ist, so ergiebt sich noch ferner:

$$6)\ Tg\,2y = \frac{2Tg\,y}{1-(Tg\,y)^2},$$

$$7)\ Tg\,3y = \frac{3 \cdot Tg\,y - (Tg\,y)^3}{1-3(Tg\,y)^2},$$

u. s. w. f.; so wie noch:

$$8)\ Tg\,y = \sqrt{\frac{1-Cos2y}{1+Cos2y}} = \frac{2Sin\,y^2}{Sin2y}$$
$$= \frac{1-Cos2y}{Sin2y} = \frac{Sin2y}{1+Cos2y};$$

u. dgl. m.

Anmerkung. Um, was jetzt zunächst Noth thut, den Gang der reelen Werthe der Funktionen $Sin\,x$ und $Cos\,x$, für den Fall zu ermitteln, daß für x nach und nach alle reelen Zahlen gesetzt werden, von $+\infty$ an, bis zu $-\infty$ hin stetig abnehmend gedacht, betrachten wir, wie solches bereits (§. 456. — §. 462.) für ganze Funktionen geschehen ist, die zu den 3 auf einander folgenden, stetig abnehmenden Werthen

$x+h$, x und $x-h$

gehörigen Werthe von $Sin\,x$ und $Cos\,x$, nämlich:

$Sin(x+h)$, $Sin\,x$ und $Sin(x-h)$,

oder $Cos(x+h)$, $Cos\,x$ und $Cos(x-h)$,

h im Moment des Verschwindens und positiv gedacht, und sehen zu, wie letztere mit denen von x wachsen oder abnehmen, oder wachsen während jene abnehmen, oder abnehmen, während jene wachsen.

Zu diesem Behufe mögen folgende Hilfssätze vorausgehen.

§. 632. Aufgabe.

Man soll $Sin(x+h)$ und $Cos(x+h)$ in, nach ganzen Potenzen von h, fortlaufende Reihen verwandeln.

Auflösung. Man hat nach (§. 627.):

$$Sin\,(x+h) = Sin\,x \cdot Cos\,h + Cos\,x \cdot Sin\,h,$$

und $$Cos(x+h) = Cos\,x \cdot Cos\,h - Sin\,x \cdot Sin\,h.$$

Setzt man daher in diesen Gleichungen zur Rechten statt $Sin\,h$ und statt $Cos\,h$ die Reihen, welche sie nach (§. 621.) vorstellen, so erhält man das verlangte.

Die ersten Glieder dieser Reihen zeigen sich in nachstehendem Schema:

$$1)\ Sin\,(x+h) = Sin\,x + Cos\,x \cdot \frac{h}{1} - Sin\,x \cdot \frac{h^2}{2!} - Cos\,x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

$$2)\ Cos(x+h) = Cos\,x - Sin\,x \cdot \frac{h}{1} - Cos\,x \cdot \frac{h^2}{2!} + Sin\,x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

§. 633. Zusatz.

Setzt man —h statt h, so zeigt sich ferner:

3) $Sin\,(x-h) = Sin\,x - Cos\,x\cdot\frac{h}{1} - Sin\,x\cdot\frac{h^2}{2!} + Cos\,x\cdot\frac{h^3}{3!} + \ldots$

4) $Cos\,(x-h) = Cos\,x + Sin\,x\cdot\frac{h}{1} - Cos\,x\cdot\frac{h^2}{2!} - Sin\,x\cdot\frac{h^3}{3!} + \ldots$

Anmerkung. Man kann auch diese Sätze unmittelbar in dem Taylorschen Satze (§. 440 u. §. 584.) enthalten erblicken, wenn man die Ableitungen

$$\partial\cdot Sin\,x,\quad \partial^2\cdot Sin\,x,\quad \partial^3\cdot Sin\,x \text{ ꝛc. ꝛc.}$$
$$\partial\cdot Cos\,x,\quad \partial^2\cdot Cos\,x,\quad \partial^3\cdot Cos\,x \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

bestimmt, und ihre Werthe dafür setzt.

Man findet aber nach (§. 585.) aus

$$Sin\,x = S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

$$\partial\cdot Sin\,x = S\left[(-1)^a\cdot\frac{(2a+1)x^{2a}}{(2a+1)!}\right] = S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right],$$

d. h.
$$\text{I.}\quad \partial\cdot Sin\,x = Cos\,x.$$

Eben so folgt aus:

$$Cos\,x = S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^{2a}}{(2a)!}\right],$$

wenn man zuerst $a=0$, dann $a+1$ statt a setzt nach (§. 389.), und zugleich beachtet, daß $(-1)^{a+1} = -(-1)^a$ ist,

$$Cos\,x = 1 - S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^{2a+2}}{(2a+2)!}\right]$$

folglich nach (§. 585.)

$$\partial\cdot Cos\,x = -S\left[(-1)^a\cdot\frac{(2a+2)x^{2a+1}}{(2a+2)!}\right] = -S\left[(-1)^a\cdot\frac{x^{2a+1}}{(2a+1)!}\right]$$

d. h.
$$\text{II.}\quad \partial\cdot Cos\,x = -Sin\,x.$$

Diese beiden Formeln vorausgesetzt, ergiebt sich sogleich weiter:

$$\partial^2\cdot Sin\,x = \partial(\partial Sin\,x) = \partial\cdot Cos\,x = -Sin\,x,$$
$$\partial^3\cdot Sin\,x = -\partial\cdot Sin\,x = -Cos\,x,$$
$$\partial^4\cdot Sin\,x = -\partial\cdot Cos\,x = +Sin\,x,$$

u. s. w. f.; so wie noch

$$\partial^2\cdot Cos\,x = -\partial\cdot Sin\,x = -Cos\,x,$$
$$\partial^3\cdot Cos\,x = -\partial\cdot Cos\,x = +Sin\,x,$$
$$\partial^4\cdot Cos\,x = \partial\cdot Sin\,x = +Cos\,x,$$

u. s. w. f.

Aus diesen Ableitungen giebt der Taylorsche Lehrsatz sogleich das Verlangte; und man sieht hier schon deutlicher ein, wie dieser Taylorsche Lehrsatz hier, so wie früher bei den ganzen Funktionen, der einzige Satz ist, der uns über den Gang der Werthe einer solchen Funktion den sichersten Aufschluß giebt; während aus diesem Gange der Werthe der Funktion in die Augen fällt, wann und für welche reelen Werthe von x sie Null wird, oder einen Wendepunkt hat, d. h. einen größten oder einen kleinsten Werth, u. dgl. m.

§. 634. Aufgabe.

Den Gang der Werthe von *Sin*x und *Cos*x näher zu bezeichnen, für den Fall, daß statt x nach und nach alle pofitiven stetig auf einander folgenden Werthe gesetzt werden, von 0 an bis nach $+\infty$ hin.

Auflösung.

1) Aus den Reihen für *Sin*(x+h) und *Cos*(x+h) (§. 632.) geht sogleich hervor, daß sich die Werthe für *Sin*x und *Cos*x, mit den stetig wachsenden Werthen von x, zugleich stetig sich ändern, weil, wenn h im Moment des Verschwindens gedacht wird, auch die Unterschiede *Sin*(x+h)—*Sin*x und *Cos*(x+h)—*Cos*x im Moment des Verschwindens sind.

2) Ist x beliebig reel, so kann man sich h immer absolut und klein genug denken, daß

$$Sin(x+h) \gtrless Sin\,x, \text{ je nachdem } Cos\,x \begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases};$$

und $$Cos(x+h) \gtrless Cos\,x, \text{ je nachdem } Sin\,x \begin{cases} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{cases}$$

ist; und wenn dies für einen absoluten Werth von h der Fall ist, so ist es nothwendig für jeden kleinern Werth von h ebenfalls der Fall.

Dies fällt eben in die Augen, sobald man die Unterschiede *Sin*(x+h)—*Sin*x uud *Cos*(x+h)—*Cos*x aus (§. 632. N. 1 u. N. 2.) nach h entwickelt sich denkt.

3) Da *Sin*x und *Cos*x sich mit dem Bogen x zugleich stetig ändern, da ferner $Sin\,0 = 0$ und $Cos\,0 = 1$ ist, so wächst *Sin*x mit x zugleich von 0 an stetig, während *Cos*x zu gleicher Zeit von 1 an stetig abnimmt.

4) In so ferne für jeden Werth von x

$$(Sin\,x)^2+(Cos\,x)^2=1 \text{ ist,}$$

kann, so lange x, folglich auch $Sin\,x$ und $Cos\,x$, reel sind, sowohl $Sin\,x$ als auch $Cos\,x$ nicht größer als 1, und nicht kleiner als -1 werden.

5) Weil aber, so lange $Cos\,x$ positiv bleibt, der Zuwachs von $Sin\,x$ mit dem von x zugleich statt hat, immer fort, so muß auch $Sin\,x$, von 0 an stetig wachsend, endlich wirklich die Grenze 1 erreichen, während dann der zugehörige Kosinus nothwendig der Null gleich seyn muß.*)

---

*) Diese Folgerung ist hier zwar wörtlich aus der ersten Ausgabe mit herübergezogen worden, aber offenbar nicht genug bindend, da $Sin\,x$ ohne Aufhören größer werden könnte, ohne jedoch die Grenze, z. B. $\frac{1}{2}$, je zu übersteigen. Im Gegentheil muß man vorher beweisen, daß ein positiver Werth von x existirt, für welchen $Cos\,x=0$ wird. Dies geschieht aber dadurch, daß man $Cos\,x$, d. h. den Werth der Reihe

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-$$

so geschrieben,

$$-\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}\right)-\left(\frac{x^6}{6!}-\frac{x^8}{8!}\right)-\left(\frac{x^{10}}{10!}-\frac{x^{12}}{12!}\right)-\left(\frac{x^{14}}{14!}-\frac{x^{16}}{16!}\right)-\text{ in inf.}$$

oder auch so geschrieben:

$$1-\frac{x^2}{2!}\cdot\left(1-\frac{x^2}{3.4}\right)-\frac{x^6}{6!}\cdot\left(1-\frac{x^2}{7.8}\right)-\frac{x^{10}}{10!}\cdot\left(1-\frac{x^2}{11.12}\right)$$
$$-\frac{x^{14}}{14!}\cdot\left(1-\frac{x^2}{15.16}\right)-\ldots.$$

etwa für $x=2$ berechnet, wo man sich augenblicklich überzeugt, daß die zwei ersten Glieder $1-\frac{x^2}{2!}\cdot\left(1-\frac{x^2}{3.4}\right)$ zusammen etwas negatives geben, während die übrigen Glieder z. B.

$$\frac{x^6}{6!}\cdot\left(1-\frac{x^2}{7.8}\right),\quad \frac{x^{10}}{10!}\cdot\left(1-\frac{x^2}{11.12}\right),\text{ u. s. w.}$$

nothwendig positiv sind; so daß der Werth der ganzen Reihe, da letztere Glieder alle subtrahirt werden, nothwendig negativ ist. Da nun $Cos\,x=+1$ also positiv, für $x=0$, und $Cos\,x$ negativ wird, für $x=2$; und da $Cos\,x$ mit x zugleich stetig sich ändert, so ist der Uebergang vom positiven Werthe $+1$, für $x=0$, zu dem negativen

6) Indem man also x von 0 an stetig größer werden läßt, muß man nothwendig zu einem ersten absoluten Werth des Bogens x kommen, dessen Sinus $= 1$, und dessen Kosinus $= 0$ ist.

7) Bezeichnen wir diesen Werth des Bogens x durch $\frac{1}{2}\pi$, (das Doppelte desselben nämlich durch π) so stehet also fest, daß für alle stetig von 0 bis zu $\frac{1}{2}\pi$ wachsenden Werthe vom x, die Werthe von *Sin* x ebenfalls von 0 an bis zu 1 wachsen, also alle positiv sind, während die Werthe von *Cos* x zu gleicher Zeit von 1 an bis zu Null hin abnehmen, aber alle positiv bleiben, wobei $\frac{1}{2}\pi$ selbst wirklich existirt, zwischen 0 und 2 liegt, und so ist, daß $Sin\frac{1}{2}\pi = 1$, dagegen $Cos\frac{1}{2}\pi = 0$ ist.

8) So wie für $x = \frac{1}{2}\pi$, $Cos\, x = 0$ wird, so ist der Unterschied $Sin(x+h) - Sin\, x$, weil die dafür gefundene unendliche Reihe (§. 632.) jetzt mit $Sin\, x \cdot \frac{h^2}{2!}$ anfängt, negativ, man mag $+h$ oder $-h$ statt h setzen, wenn nur h im Moment des Verschwindens gedacht wird, d. h. $x+h$ mag den nächst größern oder den nächst kleinern Werth von x vorstellen. Also hat für $x = \frac{1}{2}\pi$, *Sin* x einen Wendepunkt, und zwar ist $Sin\frac{1}{2}\pi$ ein größter Werth, so daß von hier ab diese Sinus wieder anfangen abzunehmen. (Vergl. §. 459.).

9) Dagegen, eben weil *Sin* x noch immer positiv bleibt, wird *Cos* x, wenn x noch über $\frac{1}{2}\pi$ hinaus wachsend gedacht wird, noch immer stetig abnehmen, also von Null in das Negative überge-

---

Werth, für $x = 2$, nicht anders als durch Null hindurch möglich. Also existirt zwischen 0 und 2 ein Werth von x, für welchen $Cos\, x = 0$ ist.

(Dieser Werth von x, für welchen $Cos\, x = 0$ ist, und welcher in der Reihe der positiven Werthe von x, im Falle darunter mehrere existiren sollten, denen dieselbe Eigenschaft zukommt, von 0 an aufwärts gehend nach $+\infty$ hin, als der erste derselben nachgewiesen werden wird, soll in der Folge berechnet werden, und er wird sich dann ausweisen als die Hälfte von

3,14159.....

während die Geometrie späterhin zeigen wird, daß diese letztere Zahl die Länge des Halbkreises, ihre Hälfte also die Länge des Viertelskreises ausdrückt, für den Radius als Einheit genommen.)

hen. Und weil nun *Cos* x negativ wird, so wird *Sin* x noch immerfort abnehmen, so lange wenigstens, als *Cos* x negativ bleibt (nach Nr. 2.), und so scheint man zuletzt zu einem positiven Werth von x, $> \frac{1}{2}\pi$ gelangen zu können, für welchen *Sin* x bis zu Null, und *Cos* x bis zu —1 hin abgenommen hat. *)

10) So wie aber $Sin\,x = 0$ geworden wäre, wo dann $Cos\,x = -1$ geworden seyn muß, wegen $(Sin\,x)^2 + (Cos\,x)^2 = 1$, so finge der Unterschied $Cos(x+h) - Cos\,x$ (§. 632.) jetzt mit dem Gliede $-Cos\,x \cdot \frac{h^2}{2!}$ an, bliebe also positiv, es möchte h positiv oder negativ gedacht seyn; also wäre nun *Cos* x ein kleinster Werth, weil seine beiden nächsten Nachbarwerthe $Cos(x+h)$ (für h positiv der eine, für h negativ der andere) alle beide größer wären als er selbst. Es würde also von da ab, *Cos* x von —1 an nach Null hin wiederum größer werden, während *Sin* x von 0 an, eben weil *Cos* x noch immer negativ ist, noch immer abnimmt, also in das Negative hineinrückt.

11) Fährt man so fort, x immer größer annehmend, die zugehörigen Werthe von *Sin* x und *Cos* x, wie in den vorstehenden Nummern geschehen, zu verfolgen, so wird man wahrnehmen, daß für gewisse Werthe von x, *Sin* x und *Cos* x zugleich positiv für andere Werthe von x beide zugleich negativ, und für noch andere Werthe von x, der eine von ihnen positiv, der andere aber zu gleicher Zeit negativ werden kann, während keiner über die Grenzen +1 oder —1 hinausgeht.

§. 635. Zusatz.

Um jedoch diese Untersuchung bequemer und gründlicher zugleich zu verfolgen und zu beendigen, denken wir an die Formeln (§. §. 627 — 630.), und daß durch sie die Sinus und Kosinus größerer Bogen in Sinus und Kosinus kleinerer ausgedrückt werden

---

*) Diesen Schein kann man zur Gewißheit erheben, wenn man zeigt, daß für $x = 4$, die Reihe für *Sin* x nothwendig negativ wird, wo dann zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und 4 wenigstens ein Werth von x liegen muß, für welchen $Sin\,x = 0$ wird, u. s. w. f.

können; ferner, daß jeder nach $\frac{1}{2}\pi$ folgende positive Bogen durch $b\cdot(\frac{1}{2}\pi)+z$ ausgedrückt werden kann, wenn z alle Bogen von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$, und b jede ganze positive Zahl bedeutet; und verschaffen wir uns zuerst die Werthe der Sinus und Kosinus der Bogen

$$2\cdot(\tfrac{1}{2}\pi),\quad 3\cdot(\tfrac{1}{2}\pi),\quad 4\cdot(\tfrac{1}{2}\pi),\quad 5\cdot(\tfrac{1}{2}\pi),\ldots$$

und allgemein $b\cdot(\frac{1}{2}\pi)$, nach den Formeln (§. 630. oder §. 629. Nr. 3. 4.), $\frac{1}{2}\pi$ statt y setzend, und wir erhalten

aus 1) $Sin\frac{1}{2}\pi = 1$ und 2) $Cos\frac{1}{2}\pi = 0$ (§. 634. N. 7.)

sogleich 3) $Sin\ \pi = 0$, 4) $Cos\ \pi = -1$,

5) $Sin\frac{3}{2}\pi = -1$, 6) $Cos\frac{3}{2}\pi = 0$,

7) $Sin 2\pi = 0$, 8) $Cos 2\pi = 1$.

Ferner findet sich aus (7. und 8.), wenn man 2π statt y in (§. 630. oder §. 629. Nr. 3. 4.) substituirt, für die Bogen

$$2\cdot(2\pi),\quad 3\cdot(2\pi),\quad 4\cdot(2\pi),\cdots a(2\pi)$$

wenn a eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, die Resultate

9) $Sin\,2a\pi = 0$, 10) $Cos\,2a\pi = 1$;

woraus dann mittelst der Formeln (§. 627. I. III.), wenn $2a\pi$ statt x, und nach und nach $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ statt y gesetzt wird:

11) $Sin(2a+\frac{1}{2})\pi = 1$, 12) $Cos(2a+\frac{1}{2})\pi = 0$,

13) $Sin(2a+1)\pi = 0$, 14) $Cos(2a+1)\pi = -1$,

15) $Sin(2a+\frac{3}{2})\pi = -1$, 16) $Cos(2a+\frac{3}{2})\pi = 0$,

hervorgehen, welche Formeln für $a = 0$ die obigen (1.—8.) wieder liefern, so daß die letztern (9.—16.) gelten, wenn a Null oder eine ganze positive Zahl ist. — Dabei ist nicht unbemerkt zu lassen, daß die Bogen

$$2a\pi,\quad (2a+\tfrac{1}{2})\pi,\quad (2a+1)\pi,\quad (2a+\tfrac{3}{2})\pi$$

die $4a$, $4a+1$, $4a+2$, $4a+3$ fachen des Bogens $\frac{1}{2}\pi$ sind, so daß die Formeln (9.—16.) die Sinus und Kosinus aller Bogen liefern $b\cdot(\frac{1}{2}\pi)$, es mag die Zahl b die Form $4a$, oder $4a+1$, oder $4a+2$, oder $4a+3$ haben, von denen eine dieser Buchstabe b nothwendig haben muß, so oft er jede ganze positive Zahl vorstellen soll.

§. 636. Zusatz.

Um nun die Sinus und Kosinus aller zwischen

$$\tfrac{1}{2}\pi,\ 2\cdot(\tfrac{1}{2}\pi),\ 3\cdot(\tfrac{1}{2}\pi),\ 4\cdot(\tfrac{1}{2}\pi),\ 5\cdot(\tfrac{1}{2}\pi),\ 6\cdot(\tfrac{1}{2}\pi),\ \ldots\ b\cdot(\tfrac{1}{2}\pi)$$

liegenden Bogen zu finden, so denke man sich unter z jeden Bogen zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, so daß *Sin* z und *Cos* z beide zugleich positiv sind, während der erstere (*Sin* z nämlich) mit z zugleich von 0 bis 1 stetig wächst, der andere dagegen (d. h. *Cos* z) zu gleicher Zeit von 1 bis 0 stetig abnimmt; und es kann keinen positiven Bogen x geben, der nicht in der Form $b\cdot(\frac{1}{2}\pi)+z$, der also nicht in einer der 4 Formen

$2a\pi+z$, $(2a+\frac{1}{2})\pi+z$, $(2a+1)\pi+z$ und $(2a+\frac{3}{2})\pi+z$

enthalten wäre. — So wie aber aus $(2a+\frac{1}{2})\pi+z$ alle Bogen zwischen $(2a+\frac{1}{2})\pi$ und $(2a+1)\pi$ hervorgehen, wenn statt z nach und nach alle Bogen von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gesetzt werden, eben so gehen dieselben Bogen auch aus $(2a+1)\pi-z$ hervor, wenn man statt z alle Bogen von $\frac{1}{2}\pi$ bis 0 setzt. Und eben so einleuchtend kann man alle durch $(2a+\frac{3}{2})\pi+z$ vorgestellten Bogen auch durch $(2a+2)\pi-z$, also auch durch $2a\pi-z$ vorstellen, wenn man nur unter a jede ganze Zahl sich denkt, weil dann a, so wie $a+1$ selbst, jede ganze Zahl vorstellt. — Also ist kein positiver Bogen denkbar, der nicht in den 4 Formen enthalten wäre:

$2a\pi+z$, $(2a+1)\pi-z$, $(2a+1)\pi+z$, $2a\pi-z$,

d. h. in den Formen $2a\pi\pm z$ und $(2a+1)\pi\mp z$.

Nun ist aber nach (§. 627. I. III.), $2a\pi$ oder $(2a+1)\pi$ statt der dortigen x setzend:

1) $Sin\,(2a\pi+z) = +Sin\,z$,
2) $Cos\,(2a\pi+z) = +Cos\,z$,
3) $Sin[(2a+1)\pi-z] = +Sin\,z$,
4) $Cos[(2a+1)\pi-z] = -Cos\,z$,
5) $Sin[(2a+1)\pi+z] = -Sin\,z$,
6) $Cos[(2a+1)\pi+z] = -Cos\,z$,
7) $Sin(2a\pi-z) = -Sin\,z$,
8) $Cos(2a\pi-z) = +Cos\,z$.

§. 637. Zusatz.

Aus diesen ganz allgemeinen Formeln, durch welche Sinus und Kosinus eines jeden positiven Bogens in die (allemal positiven) Sinus und Kosinus eines Bogens z ausgedrückt sind, welcher

zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegt, gehet der Gang von *Sin* x und *Cos* x für alle positiven Werthe von x ganz anschaulich hervor, und läßt sich mit Worten so geben:

1) Nennt man nämlich die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ einen Quadranten, so sind die Bogen

$2a\pi+z$, d. h. $4a\cdot(\frac{1}{2}\pi)+z$ im 1sten, 5ten, 9ten, 13ten, und allgemein im $4a+1$ten Quadranten, und ihre Sinus und Kosinus sind genau wie die Sinus und Kosinus der um 4, 8, 12 ꝛc. $4a$ Quadranten verminderten und im ersten Quadranten liegenden Bogen z selbst, also namentlich alle beide zugleich positiv (§. 636. 1. u. 2.). — Ferner sind

2) Die Bogen $(2a+1)\pi-z$ oder $(4a+2)\frac{1}{2}\pi-z$, solche, welche im 2ten, 6ten, 10ten, 14ten, und allgemein im $4a+2$ten Quadranten liegen, und ihre Sinus und Kosinus sind gleich den Sinus und Kosinus der Bogen z, welche sie zu 2, 6, 10, ... oder zu $4a+2$ Quadranten ergänzen, und zwar die Sinus genau dieselben und positiv, die Kosinus aber negativ, also nur ihrem absoluten Gliede nach dieselben (§. 636. Nr. 3. 4.). — Eben so sind

3) Die Bogen $(2a+1)\pi+z$, solche, welche im 3ten, 7ten, 11ten, und allgemein im $4a+3$ten Quadranten liegen; und ihre Sinus und Kosinus sind wie die der, um 2, 6, 10, oder um $4a+2$ Quadranten verminderten und dann im ersten Quadranten liegenden Bogen z, ihrem absoluten Gliede nach, dagegen beide negativ (§. 636. Nr. 5. 6.). — Endlich sind

4) Alle Bogen von der Form $(2a+2)\pi-z$ oder von der Form $2a\pi-z$, solche, die im 4ten, 8ten, 12ten ꝛc., und allgemein im $4a+4$ten oder im $4a$ten Quadranten liegen; und ihre Sinus und Kosinus sind wie die Sinus und Kosinus der, solche zu 4, 8, 12, ... $4a+4$ oder $4a$ Quadranten ergänzenden und im ersten Quadranten liegenden Bogen z, und zwar die Kosinus genau so und positiv, die Sinus dagegen, nur ihrem absoluten Gliede nach, übrigens negativ (§. 637. Nr. 7. 8.).

§. 638. Zusatz.

Es erhellet aber hieraus der Gang der reelen Werthe von *Sin* x und *Cos* x vollkommen, für den Fall, daß x nach und nach von 0 bis $+\infty$ hin alle positiven Werthe bekommt. Um aber zu wissen, was für die negativen Werthe von x statt findet, bedenke man nur, daß nach (§. 624.)

$$Sin(-x) = -Sin\,x \quad \text{und} \quad Cos(-x) = Cos\,x$$

ist, daß daher die Kosinus aller negativen x, von 0 bis $-\infty$ genommen, genau so wie die der positiven x fortgehen, während die Sinus der negativen x alle das entgegengesetzte Zeichen annehmen, übrigens aber, absolut betrachtet, gerade so wachsen und abnehmen, wie die der positiven x.

Es werden aber durch diese Betrachtung die Formeln (9. 10. 13. 14. des §. 635. und die des §. 636.) noch die allgemeinere Form annehmen können, nämlich:

1) $Sin(\pm 2a\pi) = 0,$
2) $Cos(\pm 2a\pi) = 1,$
3) $Sin \pm (2a+1)\pi = 0,$
4) $Cos \pm (2a+1)\pi = -1;$
5) $Sin(\pm 2a\pi + z) = +Sin\,z,$
6) $Cos(\pm 2a\pi + z) = +Cos\,z,$
7) $Sin(\pm(2a+1)\pi + z) = -Sin\,z,$
8) $Cos(\pm(2a+1)\pi + z) = -Cos\,z,$ so wie noch
9) $Sin(\pm 2a\pi - z) = -Sin\,z,$
10) $Cos(\pm 2a\pi - z) = +Cos\,z$
11) $Sin(\pm(2a+1)\pi - z) = +Sin\,z$
12) $Cos(\pm(2a+1)\pi - z) = -Cos\,z,$

wo zwar z in der Regel im ersten Quadranten liegend gedacht wird, wo aber doch auch z ganz allgemein jeden positiven, jeden negativen, ja auch jeden imaginären Werth haben kann, weil diese Formeln (5.—12.) sich augenblicklich aus denen des (§. 627.) für $Sin(x \pm y)$ und $Cos(x \pm y)$ ergeben, so oft $\pm 2a\pi$ oder $\pm(2a+1)\pi$ statt x, dagegen z statt y gesetzt wird.

Note 1. Alles was von (§. 634.) an über den Gang der Werthe von *Sin* x und *Cos* x gesagt worden ist, liefern die in der Note zu (§. 627.) und zwar in (N. N. 5. und 6.) hingestellten speziellern Begriffe der Sinus und Kosinus ebenfalls, eben weil jene Begriffe in den hier, im Texte gegebenern allgemeinern wirklich enthalten sind, wenn auch letzteres erst in spätern Theilen dieses Systems, bei der Anwendung der Analysis auf die Raumgrößenlehre, vollkommen genügend bewiesen werden kann. —

Man denkt sich nämlich (Fig. 5.) den Winkel x immer größer werdend, so wird für den Radius =1, *Sin* x zuerst AB, dann A_1B_1, u. s. f.; also bis x dem rechten Winkel ECD gleich wird, immer größer und für den rechten Winkel selber =1; während *Cos* x anfänglich BC, dann B_1C, und so fort immer kleiner, endlich für den rechten Winkel ECD geradezu Null wird. Geht nun x über den rechten Winkel hinaus, so daß, wenn man den rechten Winkel durch $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet, der stumpfe Winkel $ECA_2 = \pi - z$ daraus wird, so ist jetzt A_2B_2 $= Sin\, x = Sin(\pi - z)$; aber auch $A_2B_2 = Sin\, z$, also jetzt *Sin* x d. h. $Sin(\pi - z) = Sin\, z$; dagegen hat man nach der in der oben angeführten (N. 5.) gemachten Festsetzung, jetzt *Cos* x d. h. $Cos(\pi - z)$ $= -B_2C = -Cos\, z$, also negativ.

Wird der Winkel x endlich = ECF d. h. $= \pi$, nämlich 2 rechte oder ein gestreckter, so ist *Sin* x in Null und *Cos* x in — CF d. h. in —1 übergegangen, so daß man hat $Sin\, \pi = 0$, $Cos\, \pi = -1$.

Und wird der Winkel x noch größer, so daß er erhaben und $= ECA_3$ wird, d. h. $= \pi + z$, so ist jetzt $Sin\, x = -A_3B_2$ während $A_3B_2 = Sin\, z$ ist; also hat man $Sin(\pi + z) = -Sin\, z$; während $Cos(\pi + z) = -B_2C = -Cos\, z$ ist. So zeigt sich also, daß für solche Winkel, welche zwischen 2 und 3 rechten liegen, der Sinus und der Kosinus zugleich negativ sind.

Geht x in 3 rechte d. h. in den erhabenen Winkel ECG über, so geht *Sin* x in —CG d. h. in —1 und *Cos* x in Null über, so daß man hat $Sin\, \frac{3}{2}\pi = -1$, $Cos\, \frac{3}{2}\pi = 0$. Und geht x in den erhabenen Winkel $ECA_4 = 2\pi - z$ über, so hat man

$$Sin(2\pi - z) = -A_4B_1 = -Sin\, z$$

und $$Cos(2\pi - z) = +Cos\, z;$$

bis endlich $Sin\, \frac{4}{2}\pi$ in Null und $Cos\, \frac{4}{2}\pi$ in +1 übergeht.

Wird nun ein Winkel um 4 rechte Winkel d. h. um $\frac{4}{2}\pi$ oder 2π, oder um a mal 2π größer oder kleiner gedacht, so geht der bewegliche Schenkel a mal in derselben oder in der entgegengesetzten Richtung, durch den ganzen Kreis herum, befindet sich also nachher in derselben

Lage, die er Anfangs hatte, wo er noch innerhalb der 4 ersten rechten Winkel lag, hat also auch noch denselben Sinus und denselben Kosinus, wodurch sich die allgemeinern Formeln

$$Sin\,(\pm 2a\pi + z) = +Sin\,z; \quad Cos(\pm 2a\pi + z) = +Cos\,z;$$
$$Sin\,(\pm(2a+1)\pi - z) = +Sin\,z; \quad Cos(\pm(2a+1)\pi - z) = -Cos\,z;$$
$$Sin\,(\pm(2a+1)\pi + z) = -Sin\,z; \quad Cos(\pm(2a+1)\pi + z) = -Cos\,z;$$

und

$$Sin\,(\pm 2a\pi - z) = -Sin\,z; \quad Cos(\pm 2a\pi - z) = +Cos\,z;$$

versinnlicht darstellen. —

Wenn auch die hier so eben angedeutete Darstellung, wie solche gewöhnlich in den Elementen der Trigonometrie gegeben wird, nicht genügend oder befriedigend genannt werden kann, eben weil sie statt der allgemeinen Begriffe bloß spezielle hat, und diese nicht durch Abstraktion sondern nach der Analogie verallgemeinert, und bei den Anwendungen der für den speziellern Fall entwickelten Gesetze auf den allgemeinern Fall, vorzüglich ihre schwache Seite hat, weil eine solche Anwendung, strenge genommen, nicht erlaubt ist; so ist es doch interessant, hier vorläufig zu sehen, wie sich das hier im Texte entwickelte späterhin bei der Anwendung unserer allgemeinern Begriffe auf deren speziellern Fälle gestaltet. Auf der andern Seite hat jede solche Versinnlichung erhaltener Rechnungsresultate den nicht zu verachtenden Vortheil, daß man in ihr ein Gedächtniß-Hilfsmittel hat, welches im Falle der Noth die längst aus dem Gedächtniß entschwundenen abstrakten Rechnungsresultate, sogleich wieder in das Bewußtseyn zurückführt.

Note 2. Man kann auch den Gang von $Sin\,x$ und $Cos\,x$ durch das Verfahren der Schluß-Note zum neunzehnten Kapitel noch in (Fig. 10.) versinnlicht erblicken.

Nimmt man nämlich von A aus nach X hin die positiven Werthe von x als Abscissen z. B. $AB_1 = \frac{1}{2}\pi$, $AC = \pi$, $AD_1 = \frac{3}{2}\pi$, $AE = 2\pi$, $AF_1 = \frac{5}{2}\pi$, $AG = 3\pi$, $AH_1 = \frac{7}{2}\pi$, $AI = 4\pi$, u. s. w. f., so finden sich dazu die Werthe von y oder $Sin\,x$ beziehlich $BB_1 = 1$, $CC = 0$, $DD_1 = -1$, $EE = 0$, $FF_1 = +1$, $GG = 0$, $HH_1 = -1$, $II = 0$, u. s. w. f. Dagegen die Werthe von y_1 oder $Cos\,x$ beziehlich $B_1B_1 = 0$, $CC_1 = -1$, $D_1D_1 = 0$, $EE_1 = +1$, $F_1F_1 = 0$, $GG_1 = -1$, $H_1H_1 = 0$, $II_1 = +1$, u. s. w. f. Und nimmt man von A aus nach X_1 hin die negativen Werthe von x, ihrer absoluten Größe nach, so finden sich zu

$$x = -AB_1' = -\tfrac{1}{2}\pi, \quad x = -AC' = -\pi, \quad x = -AD_1' = -\tfrac{3}{2}\pi,$$
$$x = -AE' = -2\pi, \quad x = -AF_1' = -\tfrac{5}{2}\pi, \quad x = -AG' = -3\pi,$$
$$x = -AH_1' = -\tfrac{7}{2}\pi, \quad x = -AI' = -4\pi, \quad \text{u. s. w. f.;}$$

für $y = Sin\, x$ beziehlich die Werthe
$B_1'/B' = -1$, $C'/C' = 0$, $D'/D_1' = +1$, $E'/E' = 0$, $F'/F_1' = -1$
$G'/G' = 0$, $H'/H_1' = -1$, $I'/I' = 0$, u. s. w. f.;
dagegen für $y_1 = Cos\, x$ beziehlich
$B_1'/B_1' = 0$, $C'/C_1' = -1$, $D_1'/D_1' = 0$, $E'/E_1' = +1$, $F_1'/F_1' = 0$,
$G'/G_1' = -1$, $H_1'/H_1' = 0$, $I'/I_1', = +1$, u. s. w. f.

Und denkt man sich zu allen zwischenliegenden Abscissen x, auf der positiven und auf der negativen Seite, die Ordinaten $Sin\, x$ und $Cos\, x$ berechnet und senkrecht auf oder unter getragen, je nachdem sie positiv oder negativ werden; so erblickt man in der Kurve I'H'G'F'E'D'C' B'ABCDEFGHI den $Sin\, x$ und in der andern Kurve den $Cos\, x$ versinnlicht, während beide Kurven auf jeder Seite in's Unendliche sich erstrecken.

§. 639. Lehrsatz.

Sind von einem unbekannten Bogen x, Sinus und Kosinus reel und gegeben, nämlich der Sinus $= \pm\alpha$ und der Kosinus $= \pm\beta$ (so daß allemal $\alpha^2 + \beta^2 = 1$); so liegt allemal innerhalb der ersten 4 Quadranten ein Bogen φ, der diesen gegebenen Sinus und Kosinus hat, aber auch nur ein einziger. Und die Form $\pm 2a\pi + \varphi$ enthält dann alle möglichen reelen positiven oder negativen Bogen, welche denselben Sinus und Kosinus haben.

Beweis. Ist $Sin\, x = +\alpha$ und $Cos\, x = +\beta$ d. h. sind Sinus und Kosinus alle beide positiv, so liegt φ einzig im ersten Quadranten, und kann in keinem der 3 folgenden liegen, weil in letzteren allemal eine dieser beiden Funktionen negativ wird (§. 637.). — Ist $Sin\, x = -\alpha$ nnd $Cos\, x = -\beta$, d. h. sind beide Funktionen negativ gegeben, so liegt φ einzig im 3ten Quadranten, denn im 1ten, 2ten und 4ten Quadranten sind die Sinus und Kosinus nie beide zugleich negativ. — Ist $Sin\, x = +\alpha$, dagegen $Cos\, x = -\beta$, so liegt φ im 2ten Quadranten; und ist $Sin\, x = -\alpha$ dagegen $Cos\, x = +\beta$, so liegt φ einzig im 4ten Quadranten, weil jedesmal in den 3 übrigen der 4 erstern Quadranten, bald das (+ oder −) Zeichen des Sinus, bald das des Kosinus ein geändertes ist, nach (§. 637.).

Ist aber φ innerhalb der 4 ersten Quadranten und so, daß dessen Sinus und Kosinus die gegebenen sind, so würden nach (§. 636. N. N. 5 — 6.) $Sin\,(\pm 2a\pi + \varphi)$ und $Cos\,(\pm 2a\pi + \varphi)$ wiederum die ge-

gebenen seyn; und es darf also nur noch nachgewiesen werden, daß außer diesen unendlich vielen Bogen $\pm 2a\pi + \varphi$ kein reeler Bogen mehr existirt, welcher denselben Sinus und Kosinus haben könnte.

Welcher positive oder negative Bogen aber noch gedacht werden könnte, so läßt er sich doch immer um $\pm 2b\pi$ vermindern, so daß er die Form $\pm 2b\pi + y$ annehmen kann, wo y positiv ist und innerhalb der 4 ersten Quadranten liegt. Wäre nun noch

$$Sin\,(\pm 2b\pi + y) = Sin\,\varphi \text{ und } Cos\,(\pm 2b\pi + y) = Cos\,\varphi,$$

so wäre auch, nach (§. 638. N. N. 5. 6.)

$$Sin\,y = Sin\,\varphi \quad \text{und} \quad Cos\,y = Cos\,\varphi,$$

folglich nach (§. 627. II. IV.):

$$Sin\,(y-\varphi) = 0, \qquad Cos\,(y-\varphi) = 1,$$

und auch $$Sin\,(\varphi-y) = 0, \qquad Cos\,(\varphi-y) = 1.$$

Weil aber y und φ innerhalb der 4 ersten Quadranten liegen, so liegt $y-\varphi$, oder doch $\varphi-y$ nothwendig ebenfalls innerhalb der 4 ersten Quadranten, wenn solche Differenz nicht 0 ist. Und da innerhalb der 4 ersten Quadranten kein Bogen liegt, dessen Sinus $= 0$ und dessen Kosinus $= 1$ wäre, so muß $\varphi - y = 0$, also $y = \varphi$ seyn, so daß $\pm 2b\pi + y$ von $\pm 2b\pi + \varphi$ nicht verschieden, mithin in $\pm 2a\pi + \varphi$ enthalten ist. — Also ist unser Lehrsatz vollständig erwiesen.

§. 640. Zusatz.

Ist daher sowohl die Zahl π berechnet, als auch der Sinus und der Kosinus von allen positiven Werthen von x, die im ersten Quadranten, d. h. zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ liegen, und sind solche Resultate in eine Tabelle zusammengetragen, so kann man, wenn Sinus und Kosinus eines und desselben Bogens x zugleich gegeben sind, etwa $Sin\,x = \pm\alpha$ und $Cos\,x = \pm\beta$, sogleich alle möglichen reelen Werthe von x finden.

1) Ist nämlich

$$Sin\,x = +\alpha \quad \text{und} \quad Cos\,x = +\beta,$$

so liefert die Tabelle sogleich Φ im ersten Quadranten, und man hat dann $x = \pm 2a\pi + \Phi$.

2) Ist aber $Sin\,x = +\alpha$ und $Cos\,x = -\beta$ gegeben, so sucht man zuerst z im ersten Quadranten so, daß

$$Sin\,z = +\alpha \quad \text{und} \quad Cos\,z = +\beta$$

ist, und hat dann $\Phi = \pi - z$ im zweiten Quadranten, so,

daß $Sin\,\varphi = +\alpha$, $Cos\,\varphi = -\beta$ ist; und dann hat man $x = \pm 2a\pi + \varphi$ oder $x = \pm(2a+1)\pi - z$ *).

3) Ist ferner $Sin\,x = -\alpha$ und $Cos\,x = -\beta$ gegeben, so sucht man zuerst z im ersten Quadranten so, daß

$Sin\,z = +\alpha$ und $Cos\,z = +\beta$

ist, nimmt dann $\varphi = \pi + z$, so hat man φ im dritten Quadranten und so, daß $Sin\,\varphi = -\alpha$ und $Cos\,\varphi = -\beta$ ist, und dann ist $x = \pm 2a\pi + \varphi$, oder $x = \pm(2a+1)\pi + z$.

4) Ist endlich $Sin\,x = -\alpha$, aber $Cos\,x = +\beta$ gegeben, so sucht man z im ersten Quadranten so auf, daß

$Sin\,z = +\alpha$ und $Cos\,z = +\beta$ ist,

nimmt dann $\varphi = 2\pi - z$, so ist φ im 4ten Quadranten und so, daß

$Sin\,\varphi = -\alpha$, aber $Cos\,\varphi = +\beta$ ist,

und dann hat man $x = \pm 2a\pi + \varphi$ oder $x = \pm 2a\pi - z$ **).

Und in allen Fällen hat man alle möglichen reelen Werthe von x, denen derselbe gegebene Sinus und zu gleicher Zeit auch derselbe gegebene Kosinus zukommt ***).

§. 641. Zusatz.

Ist nur $Sin\,x = \pm\alpha$ allein gegeben, so liegen innerhalb der 4 ersten Quadranten 2 Werthe von x, φ und φ_1, und es existen dann doppelt so viele reele Bogen, welche denselben gegebenen Sinus haben. Ist nämlich $Sin\,x = +\alpha$, so findet sich zuerst z im ersten Quadranten, so daß $Sin\,z = +\alpha$ ist; dann noch $\pi - z$ im 2ten Quadranten, so daß ebenfalls $Sin\,(\pi - z)$

---

*) Eigentlich $x = (\pm 2a+1)\pi - z$. Weil aber $\pm 2a+1$ alle positiven und alle negativen ungeraden Zahlen vorstellt, so kann man $\pm(2a+1)$ dafür setzen, weil dieses Letztere dieselbe Bedeutung hat.

**) Eigentlich $x = (\pm 2a+2)\pi - z$. Aber statt $\pm 2a+2$ kann man $\pm 2a$ setzen, weil jeder dieser Ausdrücke, 0 und alle positiven und negativen geraden Zahlen vorstellt.

***) Es ist aber die Aufgabe überhaupt nicht möglich, sondern widersprechend, so lange nicht $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ seyn sollte.

$= +\alpha$ ist. Im dritten und 4ten Quadranten dagegen liegt kein Werth von x, weil daselbst der Sinus allemal negativ ist. Und hat man $\varphi = z$ und $\varphi_1 = \pi - z$ gefunden, so enthalten die Ausdrücke

$$\pm 2a\pi + \varphi \quad \text{und} \quad \pm 2a\pi + \varphi_1$$

d. h. $\pm 2a\pi + z$ und $\pm(2a+1)\pi - z$

alle reelen Werthe von x, welche denselben Sinus, $= +\alpha$, haben.

Ist dagegen $Sin\, x = -\alpha$ gegeben, so findet sich erstlich z im ersten Quadranten, so daß $Sin\, z = +\alpha$, dann $\varphi = \pi + z$ und $\varphi_1 = 2\pi - z$ so, daß $Sin\, \varphi = Sin\, \varphi_1 = -\alpha$ ist; und dann enthält $x = \pm 2a\pi + \varphi$ und $x = \pm 2a\pi + \varphi_1$

d. h. $x = \pm(2a+1)\pi + z$ und $x = \pm 2a\pi - z$ *)

alle reelen Werthe von x, welche denselben Sinus, $= -\alpha$, haben.

§. 642. Zusatz.

Ist $Cos\, x = \pm\beta$ allein gegeben, so finden sich wiederum innerhalb der 4 ersten Quadranten zwei Bogen φ und φ_1 dazu und zwar

$$\varphi = z \quad \text{und} \quad \varphi = 2\pi - z$$

wenn $Cos\, x = +\beta$ d. h. positiv, dagegen

$$\varphi = \pi - z \quad \text{und} \quad \varphi = \pi + z$$

wenn $Cos\, x = -\beta$ d. h. negativ gegeben war, und wenn in beiden Fällen z den Bogen im ersten Quadranten vorstellt, dessen Kosinus $= +\beta$ ist.

Und dann sind

$$\pm 2a\pi + \varphi \quad \text{und} \quad \pm 2a\pi + \varphi_1$$

d. h. $\pm 2a\pi + z$ und $\pm 2a\pi - z$

wenn $Cos\, x = +\beta$ (positiv), dagegen

$$\pm(2a+1)\pi - z \quad \text{und} \quad \pm(2a+1)\pi + z,$$

wenn $Cos\, x = -\beta$ (negativ) ist, alle möglchen reelen Bogen

---

*) Eigentlich $x = (\pm 2a + 2)\pi - z$. Allein $\pm 2a + 2$, wenn man dem a nach und nach alle positiven ganzen Zahlen und Null vorstellen läßt, bedeutet 0 und alle positiven und alle negativen geraden Zahlen, also dasselbe, was auch durch $\pm 2a$ vorgestellt ist.

Bogen, welche denselben gegebenen Kosinus $+\beta$ oder $-\beta$ haben.

Anmerkung. Da allemal $Sin\,x^2 + Cos\,x^2 = 1$ ist, so hat man jedesmal $Cos\,x = \sqrt{1 - Sin\,x^2}$ und so scheint also $Cos\,x$ in $Sin\,x$, oder auch $Sin\,x$ in $Cos\,x$ gegeben zu seyn. Allein, da jede Quadratwurzel zweideutig ist, so wird man nicht wissen, wenn $Sin\,x$ allein gegeben ist, ob $Cos\,x$ positiv oder negativ ist; er ist nämlich positiv, wenn x positiv ist, und im $4a+1$ oder $4a+4$ten Quadranten liegt, oder allgemeiner und besser ausgedrückt, wenn x eine der beiden Formen

$$\pm 2a\pi + z \quad \text{und} \quad \pm 2a\pi - z$$

annehmen kann; der Kosinus ist dagegen negativ, wenn x positiv ist und im $4a+2$ten oder $4a+3$ten Quadranten liegt, oder allgemeiner und besser ausgedrückt, wenn x eine der Formen

$$\pm(2a+1)\pi - z \quad \text{und} \quad \pm(2a+1)\pi + z$$

hat, z jedesmal positiv und im ersten Quadranten gedacht. Soll also mit dem Sinus der Kosinus zugleich gegeben seyn, so muß man wenigstens noch wissen, entweder unter welcher Form die reelen dazugehörigen Bogen enthalten seyn werden, oder doch ob dieser Kosinus positiv oder negativ ist.

Und soll mit $Cos\,x$ auch noch $Sin\,x$ durch die Gleichung $Sin\,x = \sqrt{1 - Cos\,x^2}$ zugleich gegeben seyn, so muß man noch wissen, entweder ob dieser Sinus positiv oder negativ seyn wird, oder, was dasselbe ist, ob die zugehörigen reelen Bogen unter den Formen $\pm 2a\pi + z$ und $\pm(2a+1)\pi - z$, oder unter den Formen $\pm 2a\pi - z$ und $\pm(2a+1)\pi + z$ enthalten seyn werden, z wie bisher, immer positiv und im ersten Quadranten gedacht.

So lange daher nichts weiter gegeben ist, als $Sin\,x$ allein, oder $Cos\,x$ allein, so lange muß man sich den nicht gegebenen $Cos\,x$, oder den nicht gegebenen $Sin\,x$, sowohl positiv als auch negativ denken, und daher erhält man jedesmal doppelt so viele reele Werthe von x, welche denselben gegebenen Sinus, oder welche denselben gegebenen Kosinus haben, als man reele Werthe für x bekommt, wenn Sinus und Kosinus zugleich gegeben sind, oder nur einer allein, und von dem andern die Bestimmung, daß er positiv oder negativ ist.

§. 643. Zusatz.

Weil $Tg\,x = \frac{Sin\,x}{Cos\,x}$ und $Cotg\,x = \frac{Cos\,x}{Sin\,x}$,

so folgt sogleich aus (§. 638.):

1) $Tg(\pm 2a\pi + z) = +Tg\,z$;
2) $Tg(\pm(2a+1)\pi - z) = -Tg\,z$;
3) $Tg(\pm(2a+1)\pi + z) = +Tg\,z$;
4) $Tg(\pm 2a\pi - z) = -Tg\,z$;
5) $Cotg(\pm 2a\pi + z) = +Cotg\,z$;
6) $Cotg(\pm(2a+1)\pi - z) = -Cotg\,z$;
7) $Cotg(\pm(2a+1)\pi + z) = +Cotg\,z$;
8) $Cotg(\pm 2a\pi - z) = -Cotg\,z$.

Denkt man sich daher z positiv und im ersten Quadranten, so daß $Tg\,z$ und $Cotg\,z$ positiv seyn müssen, so folgt, daß die Tangenten und Kotangenten aller Bogen im 1ten, 3ten, $4a+1$ten und $4a+3$ten Quadranten, und allgemeiner, aller um $4a$ oder $4a+2$ Quadranten vermehrten oder verminderten Bogen des 1ten und 3ten Quadranten, positiv, die übrigen negativ sind.

Soll daher zu einer gegebenen Tangente (oder Kotangente) $\pm\alpha$, der Bogen x gesucht werden, so sucht man zuerst den Bogen z im ersten Quadranten so, daß $Tg\,z = +\alpha$ (oder $Cotg\,z = +\alpha$) ist, und nimmt dann

$$x = \pm 2a\pi + z \quad \text{und} \quad x = \pm(2a+1)\pi + z,$$

wenn die gegebene Tangente (oder Kotangente) positiv, dagegen $x = \pm(2a+1)\pi - z$ und $x = \pm 2a\pi - z$ wenn die gegebene Tangente (oder Kotangente) negativ gegeben gewesen seyn sollte.

Und in jedem Falle hat man alle möglichen reelen Bogen, denen dieselbe Tangente (oder Kotangente) zukommt.

Anmerkung. Wir haben bisher für x alle möglichen reelen Werthe von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin gesetzt, und die zugehörigen (reelen) Werthe von $Sin\,x$ und $Cos\,x$, so wie den Gang derselben kennen gelernt. Wir haben umgekehrt zu jedem reel gegebenen Sinus oder Kosinus alle möglichen reelen Bogen bestimmt. Allein es fragt sich jetzt noch, ob nicht außer den reelen Bogen auch noch imaginäre Bogen (von der Form $p+qi$) existiren, denen derselbe gegebene Sinus oder Kosinus zukommt.

Die nachstehenden, durch diese Frage veranlaßten, Untersuchungen werden nun nachweisen, daß zu jedem reel gegebenen Sinus oder Ko-

sinus sobald er, absolut genommen, <1 ist, auch nur reele Bogen gehören, wenn es auch umgekehrt imaginäre Bogen giebt, die einen reelen Sinus oder Kosinus haben (welcher aber dann, absolut genommen, >1 ist, so daß dann nie Sinus und Kosinus zugleich reel seyn können, sondern der eine allemal imaginär und von der Form qi ist, wenn der andere reel seyn sollte). —

§. 644. Aufgabe.

Alle die imaginären Werthe $p+qi$ von x aufzusuchen, für welche $Sin\,x$ oder $Cos\,x$ reel wird.

Auflösung. Es ist nach (§. 627. I. III.):

1) $Sin(p+qi) = Sin\,p \cdot Cos(qi) + Cos\,p \cdot Sin(qi)$;

2) $Cos(p+qi) = Cos\,p \cdot Cos(qi) - Sin\,p \cdot Sin(qi)$.

Nun ist aber nach (§. 621.):

$$3)\ Cos(qi) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{(qi)^{2a}}{(2a)!}\right] = S\left[\frac{q^{2a}}{(2a)!}\right];$$

folglich $Cos\,(qi)$ allemal reel, positiv und auch allemal größer als 1, weil alle einzelnen Glieder dieser Reihe zur Rechten positiv sind, und das erste Glied derselben 1 ist, q mag positiv oder negativ seyn. Ferner ist nach (§. 621.)

$$4)\ Sin\,(qi) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{(qi)^{2a+1}}{(2a+1)!}\right] = i.\ S\left[\frac{q^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

folglich allemal imaginär, aber bloß von der Form $\delta \cdot i$ (nämlich $0+\delta \cdot i$) wo noch überdies δ mit q zugleich positiv oder negativ oder Null ist, weil alle einzelnen Glieder der Reihe zur Rechten mit q ein und dasselbe Zeichen haben.

Setzt man daher

$$Cos\,(qi) = \gamma \quad \text{und} \quad Sin\,(qi) = \delta \cdot i,$$

$$\text{wo } \gamma = S\left[\frac{q^{2a}}{(2a)!}\right] \text{ und } \delta = \left[\frac{q^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

wo auch γ nothwendig positiv und >1, dagegen δ mit q zugleich positiv oder negativ oder Null ist, so hat man

$$5)\ Sin\,(p+qi) = \gamma \cdot Sin\,p + i \cdot \delta \cdot Cos\,p,$$

$$\text{und}\ \ 6)\ Cos(p+pi) = \gamma \cdot Cos\,p - i \cdot \delta \cdot Sin\,p,$$

welche Werthe reel sind, so oft der mit dem imaginären Faktor i

affizirte Theil Null wird. Da nun δ nie Null seyn kann, so lange nicht $q = 0$ ist, so muß also $Cos\, p = 0$ und $Sin\, p = \pm 1$ seyn, wenn $Sin\,(p+qi)$ reel, und $Sin\, p = 0$, also $Cos\, p = \pm 1$ seyn, wenn $Cos\,(p+qi)$ reel seyn soll.

Also ist $Sin\,(p+qi)$ reel, so oft p die Form $(\pm 2\alpha + \frac{1}{2})\pi$ oder $(\pm 2\alpha + \frac{3}{2})\pi$ hat, dagegen $Cos\,(p+qi)$ reel, so oft p von der Form $\pm 2\alpha\pi$ oder $(\pm 2\alpha + 1)\pi$ ist. — Und eben deshalb sind $Sin\,(p+qi)$ und $Cos\,(p+qi)$ von einem und demselben Bogen $p+qi$, nie zu gleicher Zeit reel.

Endlich sind $Sin\,(p+qi)$ und $Cos\,(p+qi)$ allemal beide zugleich imaginär und von derselben allgemein-numerischen Form, nämlich $P+Q\cdot i$, so oft p nicht einen der so eben bezeichneten Werthe $\pm 2\alpha\pi$ oder $(\pm 2\alpha + \frac{1}{2})\pi$ oder $\pm(2\alpha+1)\pi$ oder $(\pm 2\alpha + \frac{3}{2})\pi$ hat.

§. 645. Zusatz.

Weil aber, so oft $Sin\,(p+pi)$ reel wird, solcher $= \pm\gamma$, also, absolut genommen, allemal größer wie 1 wird, und weil dasselbe auch von $Cos\,(p+qi)$ gilt; weil ferner so oft

$$Sin\,(p+qi) = \pm\gamma,$$

dann $$Cos\,(p+qi) = \sqrt{1-\gamma^2} = i\cdot\sqrt{\gamma^2-1}$$

und so oft $$Cos\,(p+qi) = \pm\gamma,$$

dann $$Sin\,(p+qi) = \sqrt{1-\gamma^2} = i\cdot\sqrt{\gamma^2-1}$$

ist, so folgt:

1) daß zu einem gegebenen reelen Sinus, der absolut genommen, <1 ist, so wie zu einem gegebenen reelen Kosinus, welcher, absolut genommen <1 ist, nur reele Bogen gehören; also

2) daß die (§. 639 — §. 642.) gefundenen reelen Bogen wirklich alle Bogen enthalten, welche dem gegebenen Sinus oder Kosinus, oder, wenn beide zugleich gegeben sind, diesen beiden zugleich entsprechen.

Dritte Abtheilung.

Fortsetzung der analytischen Trigonometrie. Von den Formeln für das Operiren mit Bogen. Von den künstlichen trigonometrischen Funktionen.

---

§. 646. Erklärung.

Jeden Bogen x dessen Sinus = y ist, bezeichne man durch $\frac{1}{Sin}y$

so daß man,

wenn $Sin\,x = y$ ist, $x = \frac{1}{Sin}y$ hat.

Und ist $Cos\,x = z$, so bezeichne man den Bogen x durch $\frac{1}{Cos}z$, so daß man außer $Cos\,x = z$, noch $x = \frac{1}{Cos}z$ hat.

Eben so sollen die Zeichen $\frac{1}{Tg}y$, $\frac{1}{Cotg}y$, $\frac{1}{Sec}y$ $\frac{1}{Cosec}y$,

beziehlich die Bogen vorstellen, deren Tangente, Kotangente, Sekante oder Kosekante, = y ist.

Anmerkung. Was hier durch $\frac{1}{Sin}y$, $\frac{1}{Cos}y$, ꝛc. ꝛc. bezeichnet wird, findet man gewöhnlich durch *arc. Sin* y, *arc. Cos* y, ꝛc. ꝛc. bezeichnet, auch durch *ang.* (*Sin* = y), *ang.* (*Cos* = y), ꝛc. ꝛc. — Hier wird diese neue Bezeichnung empfohlen, weil sie einen weit bequemern Mechanismus des Kalkuls zuläßt, in so ferne, analog mit den gemeinsten Formen der Buchstabenrechnung, aus $\frac{1}{Tg}y = x$, sogleich folgt

$y = Tg\,x$; aus $\frac{1}{Cos}z = u$, sogleich $z = Cos\,u$; u. s. w. f.

§. 647. Zusatz.

Nach dieser Erklärung sind $\frac{1}{Sin}y$, $\frac{1}{Cos}y$, $\frac{1}{Tg}y$, $\frac{1}{Cotg}y$, $\frac{1}{Sec}y$, $\frac{1}{Cosec}y$, unendlich-vieldeutige Zeichen, welche jedesmal einen von unendlich vielen Bogen vorstellen, die alle denselben Sinus oder Kosinus, dieselbe Tangente oder Kotangente, dieselbe Sekante oder Kosekante y haben. — Operirt man daher mit solchen Zeichen, so muß man die nöthige Vorsicht nicht außer Acht lassen, und ein und dasselbe Zeichen nicht eher als einen und denselben Ausdruck ansehen, bis man sich überzeugt hat, daß es auch jedesmal wirklich in einer und derselben Bedeutung vorkomme. [Vgl. sorgfältig was über das Arbeiten mit vieldeutigen Wurzeln (§. §. 238. 270. 293. 532.) gesagt worden ist, in so ferne gerade dasselbe auch hier wieder gilt.]

Namentlich übersehe man nicht, daß zwei vieldeutige Ausdrücke einander unvollkommen gleich seyn können, in dem Sinne, daß unter ihren Bedeutungen einmal oder einigemal auch ein und dieselbe vorkommt, wie z. B.

$$\sqrt[2]{9} = 3 \text{ ist, oder } \sqrt[3]{8} = -1+\sqrt{-3};$$

aber auch vollkommen gleich seyn können, d. h. so, daß der eine Ausdruck nicht mehr und nicht weniger Bedeutungen hat und auch genau dieselben, wie der andere, wie z. B. $\sqrt[3]{8}$ vollkommen gleich ist dem Produkt $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$, welches letztere nicht mehr und nicht weniger als 3 Werthe hat und gerade dieselben 3 Werthe, die durch $\sqrt[3]{8}$ repräsentirt sind.

Anmerkung. Da sich bei vieldeutigen Ausdrücken diese Begriffe der unvollkommenen und der vollkommenen Gleichheit oft wiederholen, so möchte es gut seyn, wenn man für erstere ein eigenes Zeichen, etwa $\equiv$ statt $=$ einführen wollte, was hier jedoch nur angedeutet bleiben soll.

§. 648. Zusatz.

Ist y der Sinus eines Bogens x, so hat man

$$Sin\ x = y \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{Sin}\, y,$$

$$Cos\ x = \sqrt{1-y^2} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{Cos}\sqrt{1-y^2},$$

$$Tg\ x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{Tg}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$Cotg\ x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{Cotg}\,\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

$$Sec\ x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{Sec}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$Cosec\ x = \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad x = \frac{1}{Cosec}\,\frac{1}{y}.$$

Folglich hat man noch:

$$\frac{1}{Sin}\,y = \frac{1}{Cos}\sqrt{1-y^2} = \frac{1}{Tg}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{Cotg}\,\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$= \frac{1}{Sec}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{Cosec}\,\frac{1}{y}.$$

Aber es fragt sich, ob alle diese letztern Ausdrücke einander vollkommen gleich sind, d. h. ob sie auch alle gleich viele und genau dieselben Bedeutungen haben. Suchen wir diese Frage, auf welche hier nur hingedeutet werden sollte, in einigen Beispielen zu beantworten.

Nehmen wir z. B. an, y wäre positiv und <1, so zeigt $x = \frac{1}{Sin}\,y$ alle die Bogen an, welche zu diesem positiven Sinus gehören, also die Bogen $\pm 2a\pi + z$ und $\pm(2a+1)\pi - z$, wenn z der positive Bogen im ersten Quadranten ist, welcher denselben Sinus y hat, und dessen Kosinus daher der positive Werth der $+\sqrt{1-y^2}$ ist. Wollte man nun $x = \frac{1}{Cos}\sqrt{1-y^2}$ nehmen, so müßte man sich diese Quadratwurzel einmal positiv und ein andermal auch negativ denken. Ist sie positiv, so stellt x die Bogen vor $\pm 2a\pi + z$ und $\pm 2a\pi - z$; und ist die Wurzel negativ gedacht, so stellt x die Bogen $\pm(2a+1)\pi - z$ und

$\pm(2a+1)\pi+z$ vor. Also ist in diesem Falle das Zeichen $\frac{1}{Cos}\sqrt{1-y^2}$ viel umfassender (allgemeiner, oder auch unbestimmter) als $\frac{1}{Sin}y$, weil es außer den Bogen $\pm 2a\pi+z$ und $\pm(2a+1)\pi-z$, welche durch letzteres $\frac{1}{Sin}y$ vorgestellt sind, auch noch die andern Bogen $\pm 2a\pi-z$ und $\pm(2a+1)\pi+z$ vorstellt. Und wollte man die Quadratwurzel $\sqrt{1-y^2}$ nur eindeutig nehmen, so würde man in jedem Falle unter $\frac{1}{Cos}\sqrt{1-y^2}$ nicht genau dieselben Bogen als unter $\frac{1}{Sin}y$ vorgestellt haben.

Aehnliches findet sich, wenn man y negativ sich denkt. — Also sind $\frac{1}{Sin}y$ und $\frac{1}{Cos}\sqrt{1-y^2}$ zwar unvollkommen, aber nicht vollkommen einander gleich.

Untersucht man ferner, ob

$\frac{1}{Sin}y$ vollkommen gleich ist dem $\frac{1}{Tg}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$,

so findet man, daß wenn y positiv ist, und $\sqrt{1-y^2}$ doppeldeutig genommen wird, dann $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ ebenfalls doppeldeutig ist, und daß daher, wenn z der positive Bogen im ersten Quadranten ist, welcher den positiv genommenen Ausdruck $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ zur Tangente oder y zum Sinus hat, dann die Bogen

$\pm 2a\pi+z$, $\pm(2a+1)\pi-z$, $\pm(2a+1)\pi+z$ und $\pm 2a\pi-z$

dazu gehören, also genau alle Bogen, welche unter $\frac{1}{Cos}\sqrt{1-y^2}$ vorgestellt sind, sobald man auch hier die Quadratwurzel doppeldeutig nimmt. Dasselbe findet sich, wenn y negativ ist. Also ist

$\frac{1}{Tg}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ vollkommen gleich mit $\frac{1}{Cos}\sqrt{1-y^2}$,

aber nicht vollkommen gleich mit $\frac{1}{Sin}y$.

Und wollte man in $\frac{1}{Tg}\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ die Wurzel nur eindeutig haben, so würde dieser Ausdruck Bogen vorstellen, welche zum Theil

mit denen in $\frac{1}{Sin}\,y$ vorgestellten zusammen fallen; aber jeder der beiden Ausdrücke $\frac{1}{Tg}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ und $\frac{1}{Sin}\,y$ würde auch noch Bogen enthalten, die dem andern fremd wären.

Aus allen diesen Betrachtungen geht also unzweideutig hervor, daß man diese unvollkommenen Gleichungen

$$\frac{1}{Sin}\,y = \frac{1}{Cos}\sqrt{1-y^2} = \frac{1}{Tg}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \text{u. s. w.}$$

nur mit großer Vorsicht gebrauchen muß, und daß man in jedem Falle ihrer Anwendung sich erst wieder mittelst der Sätze (§. 639. bis §. 643.) überzeugen muß, in wie ferne der eine dieser Ausdrücke für den andern gesetzt werden darf, um das, was jener vorstellen sollte, vollkommen zu ersetzen.

Anmerkung. Der Anfänger muß aber noch besonders darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Gleichungen zwischen den Wurzeln ebenfalls schon solche unvollkommene oder solche vollkommene seyn können, weshalb bereits für Wurzeln, wie für jeden mehrdeutigen Ausdruck, dasselbe gilt, was hier eben in Bezug auf die Bogen-Ausdrücke mitgetheilt worden ist.

§. 649. Zusatz.

Ist $x = \frac{1}{Cos}\,y$ d. h. $y = Cos\,x$,

so hat man sogleich noch

$$x = \frac{1}{Cos}\,y = \frac{1}{Sin}\sqrt{1-y^2} = \frac{1}{Tg}\,\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{1}{Cotg}\,\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$= \frac{1}{Sec}\,\frac{1}{y} = \frac{1}{Cosec}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

wo jedoch die einzelnen daraus hervorgehenden Gleichungen (zwischen je zweien dieser Bogen-Ausdrücke) wiederum nicht lauter vollkommene Gleichungen sind, wo also alles gilt, was im vorhergehenden (§. 648.) darüber gesagt worden ist.

§. 650. Zusatz.

Ist gegeben:

$$x = \frac{1}{Tg}\, y, \qquad \text{also} \qquad y = Tg\, x,$$

so hat man, weil

$$Sin = \frac{Tg}{\sqrt{1+Tg^2}}, \quad Cos = \frac{1}{\sqrt{1+Tg^2}}, \quad Cotg = \frac{1}{Tg},$$

u. s. w. ist, sogleich noch:

$$x = \frac{1}{Tg}\, y = \frac{1}{Sin}\, \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{Cos}\, \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{Cotg}\, \frac{1}{y}$$

$$= \frac{1}{Sec}\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{Cosec}\, \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

§. 651. Zusatz.

Und ist gegeben:

$$x = \frac{1}{Cotg}\, y, \qquad \text{also} \qquad y = Cotg\, x,$$

so ist auch:

$$x = \frac{1}{Cotg}\, y = \frac{1}{Tg}\, \frac{1}{y} = \frac{1}{Sin}\, \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{Cos}\, \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$= \frac{1}{Sec}\, \frac{\sqrt{1+y^2}}{y} = \frac{1}{Cosec}\sqrt{1+y^2}.$$

§. 652. Zusatz.

Man sieht leicht, wie ein Bogen dadurch gegeben seyn kann, daß seine Sekante oder seine Kosekante gegeben ist, und daß man aus der gegebenen Sekante oder Kosekante sogleich wiederum den Sinus, den Kosinus, die Tangente und die Kotangente finden kann, nach (§. 625.), und daher denselben Bogen auch dadurch ausdrücken kann, daß man eine dieser letztern trigonometrischen Funktionen statt der erstern angiebt.

Die dadurch entstehenden Gleichungen zwischen Bogen-Ausdrücken sind aber nicht durchaus vollkommene Gleichungen, und

es muß bei ihrer Anwendung mit Sorgfalt auf diesen Umstand Rücksicht genommen werden.

§. 653. Aufgabe.

Die Summe und die Differenz zweier Bogen-Ausdrücke selber wieder in einen Bogen-Ausdruck zu verwandeln.

Auflösung. Man hat dazu die Gleichungen:

$$1)\ \frac{1}{Sin}y \pm \frac{1}{Sin}z = \frac{1}{Sin}[y.\sqrt{1-z^2} \pm z.\sqrt{1-y^2}];$$

$$2)\ \frac{1}{Cos}y \pm \frac{1}{Cos}z = \frac{1}{Cos}[yz \pm \sqrt{(1-y^2)(1-z^2)}];$$

$$3)\ \frac{1}{Tg}y \pm \frac{1}{Tg}z = \frac{1}{Tg}\left[\frac{y \pm z}{1 \mp yz}\right];$$

$$4)\ \frac{1}{Cotg}y \pm \frac{1}{Cotg}z = \frac{1}{Cotg}\left[\frac{yz \mp 1}{z \pm y}\right];$$

u. s. w. f.; welche sich sogleich ergeben, wenn man die beiden Bogen durch u und v bezeichnet, und nun

$Sin(u \pm v)$, $Cos(u \pm v)$, $Tg(u \pm v)$ und $Cotg(u \pm v)$

beziehlich in $Sin\,u$ und $Sin\,v$, oder in $Cos\,u$ und $Cos\,v$, oder in $Tg\,u$ und $Tg\,v$, oder endlich in $Cotg\,u$ und in $Cotg\,v$, d. h. jedesmal in y und in z ausdrückt, wie solches in den (§§. 627. und 628.) größtentheils schon ausgeführt zu finden ist.

In allen diesen Gleichungen sind aber diese vorkommenden Bogen-Ausdrücke unendlich vieldeutige Zeichen, welche in den Anwendungen alle die, für solche früher schon ausgesprochene Vorsicht erfordern.

Anmerkung. Wir begnügen uns mit dem über das Operiren mit Bogen-Ausdrücken hingestellten, und gehen zu den künstlichen trigonometrischen Funktionen über, um solche noch mit einigen wenigen Worten zu berühren.

§. 654. Erklärung.

Suchte man, statt, wie in Anmerkung (2.) zu (§. 619.) geschehen ist, $\overset{e}{log}(p+qi)$, lieber alle Werthe von $\overset{a}{log}(p+qi)$, wo

a eine beliebige positive Zahl ist, so würde man zur Betrachtung dieser beiden Reihen gezwungen, nämlich der Reihen

$$S\left[(-1)^a.\frac{x^{2a}.(La)^{2a}}{(2a)!}\right] \text{ und } S\left[(-1)^a.\frac{x^{2a+1}.(La)^{2a+1}}{(2a+1)!}\right],$$

welche wir hier durch

$$\overset{a}{Cos}\,x \qquad \text{und} \qquad \overset{a}{Sin}\,x$$

bezeichnen, und künstliche trigonometrische Funktionen nennen wollen, im Gegensatz zu dem besondern Fall derselben, wo $a = e$ und $La = Le = 1$ wird, und wo dann $\overset{e}{Cos}\,x$ und $\overset{e}{Sin}\,x$ in die (§. 621.) definirten $Cos\,x$ und $Sin\,x$ übergehen, welche letztere deshalb natürliche trigonometrische Funktionen genannt werden können.

Eben so können die Quotienten

$$\frac{\overset{a}{Sin}\,x}{\overset{a}{Cos}\,x}, \quad \frac{\overset{a}{Cos}\,x}{\overset{a}{Sin}\,x}, \quad \frac{1}{\overset{a}{Cos}\,x} \text{ und } \frac{1}{\overset{a}{Sin}\,x}$$

beziehlich durch

$$\overset{a}{Tg}\,x, \quad \overset{a}{Cotg}\,x, \quad \overset{a}{Sec}\,x \text{ und } \overset{a}{Cosec}\,x$$

bezeichnet, und dann künstliche Tangenten, Kotangenten, Sekanten und Kosekanten genannt werden.

§. 655. Zusatz.

Für diese künstlichen trigonometrischen Funktionen gelten alle Formeln, wie für die natürlichen der vorigen Abtheilung, wenn man hier nur überall a setzt, wo dort e steht. Namentlich gelten also alle die Formeln unverändert, in welchen e gar nicht zu sehen ist.

Es können aber auch die künstlichen trigonometrischen Funktionen zugleich in die früher betrachteten übergehen, weil aus (§. 655. und §. 621.) sogleich hervorgeht:

$$\overset{a}{Sin}\,x = Sin(x.La), \qquad \overset{a}{Cos}\,x = Cos(x.La)$$

u. s. w. f.

Note. Wollte man nach der Bedeutung fragen, welche später $\overset{a}{Sin}x$ in der Geometrie erhalten könnte, so könnte man $a = e^{\frac{1}{r}}$, also $La = \frac{1}{r}$ setzen, und man hätte dann $\overset{a}{Sin}x = Sin\left(\frac{x}{r}\right)$. Ist nun x die Länge eines zu einem Centriwinkel gehörigen Bogens für den Radius r, so ist $\frac{x}{r}$ der zugehörige Bogen für den Radius 1, und es ist also der künstliche Sinus des Bogens x für den Radius r und für die Basis $a = e^{\frac{1}{r}}$, einerlei mit dem natürlichen Sinus des Bogens $\frac{x}{r}$ für den Radius 1 genommen.

Wir machen aber dem Leser noch besonders bemerklich, daß die hier zuweilen eingestreuten Noten, als durchaus nicht hieher gehörig angesehen werden müssen.

Vierte Abtheilung.

Auffindung der Werthe der künstlichen und natürlichen Logarithmen, der Bogen, und der Zahl π.

---

§. 656. Aufgabe.

Alle Werthe des natürlichen Logarithmen der allgemein-numerischen Zahl $p+qi$ zu finden (wo p und q beliebig reel sind).

Auflösung. Werden die gesuchten Werthe durch $\alpha+\beta i$ vorgestellt, so soll

1) $log\,(p+qi) = \alpha+\beta i$, also 2) $p+qi = e^{\alpha+\beta i}$

werden. Weil aber

$e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}\cdot e^{\beta i}$ und $e^{\beta i} = Cos\,\beta + i\cdot Sin\,\beta$ ist (§. §. 616. u. 626.), so hat man also alle reelen Werthe von α und β zu suchen, welche

3) $p+q\cdot i = e^{\alpha}\cdot Cos\,\beta + i\cdot e^{\alpha}\cdot Sin\,\beta$

mithin nach (§. 325.):

4) $p = e^{\alpha} \cdot Cos\,\beta$ und 5) $q = e^{\alpha} \cdot Sin\,\beta$

machen. Aus diesen letztern beiden Gleichungen, wenn man noch die neue

$$Cos\,\beta^2 + Sin\,\beta^2 = 1$$

dazu nimmt, kann man aber $Sin\,\beta$ und $Cos\,\beta$ eliminiren und erhält dann

6) $(e^{\alpha})^2 = p^2 + q^2$, also 7) $e^{\alpha} = +\sqrt{p^2+q^2}$,

wobei die Quadratwurzel nur ihren positiven Werth vorstellen darf, weil e^{α} mit α zugleich positiv ist, und in $\frac{1}{e^{\gamma}}$ übergeht, also positiv bleibt, so oft α negativ und $= -\gamma$ werden sollte. Daraus folgt aber

$$8)\ \alpha = L(+\sqrt{p^2+q^2}),$$

so daß also α der einzige reele Werth des natürlichen Logarithmen der positiven Zahl $+\sqrt{p^2+q^2}$ seyn muß, und überhaupt nur diesen einzigen Werth haben, und nach (§. 612.) allemal berechnet werden kann.

Ist α bestimmt, so muß β noch so bestimmt werden, daß den beiden Gleichungen (4 u. 5) zugleich genügt wird; also muß

$$9)\ Cos\,\beta = \frac{p}{e^{\alpha}} = \frac{p}{+\sqrt{p^2+q^2}}$$

und $$10)\ Sin\,\beta = \frac{q}{e^{\alpha}} = \frac{q}{+\sqrt{p^2+q^2}}$$

genommen werden, so daß $Cos\,\beta$ mit p, und $Sin\,\beta$ mit q zugleich positiv, negativ oder Null sind.

Während also α nur einen einzigen Werth hat, erhält man für β die unendlich vielen Bogen, deren Sinus und deren Kosinus, die in (9. und 10.) bestimmten sind. Und ist φ der erste positive Bogen (innerhalb der 4 ersten Quadranten liegend), der diesem Sinus und diesem Kosinus entspricht, so hat man

$$11)\ \beta = \pm 2n\pi + \varphi,$$

unter dem deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}$, wie immer, 0 und jede ganze Zahl verstanden; also

$$12)\quad log\,(p+qi) = L(+\sqrt{p^2+q^2})+(\pm 2\mathfrak{a}\pi+\varphi)\cdot i,$$

wo $L(+\sqrt{p^2+q^2})$ den einzigen reelen Werth des natürlichen Logarithmen (also den reelen Logarithmen für die Basis e des §. 172.) von der positiven Zahl $+\sqrt{p^2+q^2}$) wo φ den innerhalb der 4 ersten Quadranten liegenden einzigen Bogen bedeutet, der durch die Gleichungen

$$Cos\,\varphi = \frac{p}{+\sqrt{p^2+q^2}} \quad \text{und} \quad Sin\,\varphi = \frac{q}{+\sqrt{p^2+q^2}}$$

bestimmt ist, wo π die noch zu berechnende Zahl ist (welche später $= 3{,}14159\ldots$ gefunden werden wird), und wo endlich $\mathfrak{a}$ Null und jede ganze Zahl der Zahlenreihe vorstellt, wo also auch statt $L(+\sqrt{p^2+q^2})$ noch $\frac{1}{2}\cdot L(p^2+q^2)$ geschrieben werden kann.

Anmerkung. Wollte man statt der Gleichungen (9.) und (10.) lieber schreiben

$$\beta = \frac{1}{Cos}\left(\frac{p}{+\sqrt{p^2+q^2}}\right),$$

oder

$$\beta = \frac{1}{Sin}\left(\frac{q}{+\sqrt{p^2+q^2}}\right),^{*})$$

so würde jeder dieser beiden Ausdrücke zur Rechten allein statt β genommen, doppelt so viele Werthe anzeigen, als β deren wirklich hat, da solches β nicht dem gegebenen Sinus oder dem gegebenen Kosinus allein, sondern beiden zugleich zu entsprechen hat. Daher ist es hier vielleicht am bequemsten, die Bezeichnung durch Bogen-Ausdrücke nicht zu benützen.

---

*) D. h. auf die gewöhnliche Art geschrieben

$$\beta = arc.\,Cos\,\frac{p}{+\sqrt{p^2+q^2}},\ \text{oder}\ \beta = arc.\,Sin\,\frac{q}{+\sqrt{p^2+q^2}}.$$

§. 657. Zusatz.

Will man sich auf Betrachtung spezieller Fälle einlassen, so kann man zunächst folgende Fälle nehmen:

1) p und q zugleich positiv,
2) p und q zugleich negativ,
3) p positiv und q negativ,
4) p negativ und q positiv.

Nennt man nun in allen 4 Fällen z den positiven Bogen im ersten Quadranten, welcher die in $\frac{p}{+\sqrt{p^2+q^2}}$ und $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ enthaltenen positiven Zahlen zu seinem Kosinus und Sinus hat, so ist nach (§. 640.)

im 1ten Falle $\varphi = z$,
im 2ten dagegen $\varphi = \pi + z$,
im 3ten Falle $\varphi = 2\pi - z$,
und im 4ten Falle $\varphi = \pi - z$.

Also findet sich aus der allgemeinen Formel (12.) des (§. 656):

I. wenn p und q positive Zahlen sind,

$$log(p+qi) = L(+\sqrt{p^2+q^2}) + (\pm 2a\pi + z)\cdot i;$$

II. wenn p und q negative Zahlen sind,

$$log(p+qi) = L(+\sqrt{p^2+q^2}) + (\pm(2a+1)\pi + z)\cdot i$$

III. wenn p positiv und q negativ ist,

$$log(p+qi) = L(+\sqrt{p^2+q^2}) + (\pm 2a\pi - z)\cdot i;$$

IV. wenn p negativ und q positiv,

$$log(p+qi) = L(+\sqrt{p^2+q^2}) + (\pm(2a+1)\pi - z)\cdot i;$$

wo der Ausdruck rechts allemal alle Werthe enthält, welche die (§. 618.) festgesetzte Eigenschaft des natürlichen Logarithmen haben; daß nämlich e mit ihnen potenzirt, allemal p+qi wieder giebt.

§. 658. Zusatz.

Unter den speziellen Fällen kann man aber auch folgende noch betrachten:

5) p positiv, $= +a$, $q = 0$,
6) p negativ, $= -a$, $q = 0$,
} also $p+qi$ reel;

7) $p = 0$, q positiv, $= +b$
8) $p = 0$, q negativ, $= -b$
} also $p+qi = \pm bi$,

so ist im Falle (5.): $Cos\,\varphi = +1$, $Sin\,\varphi = 0$, u. $\varphi = 0$,
dagegen im Falle (6.): $Cos\,\varphi = -1$, $Sin\,\varphi = 0$, u. $\varphi = \pi$,
ferner ist im Falle (7.): $Cos\,\varphi = 0$, $Sin\,\varphi = +1$, u. $\varphi = \frac{1}{2}\pi$,
so wie im Falle (8.): $Cos\,\varphi = 0$, $Sin\,\varphi = -1$, u. $\varphi = \frac{3}{2}\pi$.

Folglich giebt die allgemeine Formel (12. §. 656.)

V. wenn p positiv, $= +a$ und $q = 0$ ist,

$$log\,(+a) = L(+a) \pm 2a\pi \cdot i;$$

VI. wenn p negativ, $= -a$ und $q = 0$ ist,

$$log\,(-a) = L(+a) \pm (2a+1)\pi \cdot i;$$

VII. wenn $p = 0$ und q positiv, $= +b$,

$$log\,(+bi) = L(+b) + (\pm 2a + \tfrac{1}{2})\pi \cdot i$$

$$\text{oder auch} = L(+b) - (\pm 2a + \tfrac{3}{2})\pi \cdot i;$$

VIII. wenn $p = 0$ und q negativ, $= -b$,

$$log\,(-bi) = L(+b) + (\pm 2a + \tfrac{3}{2})\pi \cdot i$$

$$\text{oder auch} = L(+b) - (\pm 2a + \tfrac{1}{2})\pi \cdot i.$$

§. 659. Zusatz.

Aus

1) $log\,(+a) = L\,(+a) \pm 2a\pi \cdot i$

und 2) $log\,(-a) = L\,(+a) \pm (2a+1)\pi \cdot i$,

folgt auch noch, für $a = e$, weil $Le = 1$ ist,

3) $log\ e = 1 \pm 2a\pi \cdot i$,
4) $log\,(-e) = 1 \pm (2a+1)\pi \cdot i$,

und für a = 1, weil $L1 = 0$ ist,

5) $log\ 1 = \pm 2a\pi \cdot i$

6) $log\,(-1) = \pm(2a+1)\pi \cdot i$

§. 660. Zusatz.

Aus dieser Formel (5.) in Verbindung mit (§. 656. N. 12.) geht aber auch noch die nicht unwichtige Folgerung hervor: daß man alle Werthe des Logarithmen einer beliebigen reelen oder imaginären Zahl p+qi erhält, wenn man irgend einen Werth derselben zu allen Werthen von *log* 1 addirt.

Anmerkung. Aus der Betrachtung von (§. 659. N. N. 1. 2.) geht auch noch hervor: daß unter allen Werthen des *log* (—a) keiner reel seyn kann, während unter allen Werthen des *log* (+a) nur ein einziger reel ist (für $a=0$).

Eben so fällt in die Augen, daß wenn q nicht Null ist, also wenn p+qi imaginär ist, keiner der unendlich vielen Werthe von *log* (p+qi) reel werden könne.

§. 661. Zusatz.

Da für jede positive Basis a

$$\overset{a}{log}\,(p+qi) = \frac{log\,(p+qi)}{La}$$

ist, nach (§. 619.), so findet man alle Werthe des künstlichen Logarithmen von p+qi, für die (positive) Basis a, wenn man jeden der Werthe des natürlichen Logarithmen *log* (p+qi) noch durch *L*a dividirt; so daß der künstliche Logarithme überhaupt nicht mehr und nicht weniger Werthe hat, als der natürliche, und auch keiner von beyden mehr reele oder mehr imaginäre Werthe hat als der andere.

§. 662. Zusatz.

Der künstliche und der natürliche Logarithme ist daher ein unendlich-vieldeutiges Zeichen. — Daraus folgt:

1) Derselbe Logarithme (dasselbe Zeichen) kann mehremale, jedesmal in einer andern seiner unendlich vielen Bedeutungen erscheinen.

2) Derselbe Logarithme (dasselbe Zeichen), wenn es in der Rechnung mehremale vorkommt, muß nicht eher als ein und dieselbe Bedeutung habend angesehen werden, bevor man sich nicht davon vorher gehörig überzeugt hat.

Man wird daher nicht eher

z. B. statt $p \cdot log\, a \pm q \cdot log\, a$ setzen $(p \pm q) \cdot log\, a$

statt $(log\, a) \cdot (log\, a)$ setzen $(log\, a)^2$

statt $log\, a + log\, a$ setzen $2\, log\, a$,

nicht aus $log\, a = \alpha$ und $log\, a = \beta$ schließen, daß auch $\alpha = \beta$ seyn müsse, u. s. w., bevor man sich nicht überzeugt hat, daß $log\, a$ in den Ausdrücken zur Linken, jedesmal einen und denselben seiner unendlich vielen Werthe bezeichnet.

3) Man wird wohl thun die Gleichungen zwischen Logarithmen, wie die zwischen den mehrdeutigen Wurzeln, und später zwischen den unendlich vieldeutigen Bogen-Ausdrücken, in unvollkommene und in vollkommene abzutheilen, und unter den ersteren solche zu verstehen, durch welche bloß ausgedrückt wird, daß einer oder einige der Werthe der vieldeutigen Ausdrücke links und rechts dieselben seyn sollen, unter den vollkommenen Gleichungen dagegen diejenigen sich zu denken, in welchen die beiden Seiten der Gleichung durchaus gleich viele und auch genau dieselben Ausdrücke vorstellen.

Unter den vollkommenen Gleichungen steht aber oben an

$$e^{log\, a} = a,$$

die links und rechts blos den Werth a enthält, welcher der unendlich vielen Werthe auch statt $log\, a$ gesetzt werden mag.

4) Da übrigens der Definition des (§. 618.) zufolge, zwischen den künstlichen Potenzen und den künstlichen Logarithmen derselbe Zusammenhang statt findet, wie anfänglich zwischen den wirklichen Potenzen und wirklichen Logarithmen (d. h. zwischen solchen, die wirkliche Zahlen der Zahlenreihe, ganze unbenannte Zahlen, vorstellen), und später zwischen den reelen Potenzen und

reelen Logarithmen festgesetzt wurde, so werden alle die Gleichungen der (§§. **136** und **149.**), also auch des (§. **178.**) hier für diese künstlichen Logarithmen noch statt finden, jedoch mit den Ausnahmen

A. daß alle diejenigen weggelassen werden, in denen Ausdrücke vorkommen, in Fällen, für welche sie bis jetzt noch keine Bedeutung erhalten haben,

B. daß ein Theil der Gleichungen unvollkommene seyn werden, und in den Anwendungen derselben auf diesen Umstand mit Sorgfalt Rücksicht genommen werden muß.

Anmerkung 1. Um dies letztere noch durch Beispiele deutlicher zu machen, nehme man die Gleichung

$$1) \quad log\,a + log\,b = log\,(ab).$$

Sie wird so erwiesen: Es ist nach (§. 616.)

$$e^{log\,a + log\,b} = e^{log\,a} \cdot e^{log\,b};$$

aber $$e^{log\,a} = a \text{ und } e^{log\,b} = b,$$

welcher der unendlichen vielen Werthe von $log\,a$ und $log\,b$ auch immer gesetzt werden mag; also ist

$$e^{(log\,a + log\,b)} = ab;$$

mithin ist $log\,a + log\,b$, welche der unendlich vielen Werthe man auch statt $log\,a$ und $log\,b$ setzen mag, doch immer ein Ausdruck, mit welchem e potenzirt ab gibt, also der Definition des (§. 618.) zufolge, allemal einer der Werthe von $log\,(ab)$. In diesem Sinne hat man also

$$log\,a + log\,b = log\,(ab);$$

d. h. wenn man statt $log\,a$ einen seiner unendlich vielen Werthe setzt, und eben so statt $log\,b$ einen seiner Werthe schreibt, so wird unter den unendlich vielen Werthen von $log\,(ab)$ allemal einer seyn, welcher statt $log\,(ab)$ gesetzt, macht, daß diese Gleichung eine identische ist, wie jede Gleichung dem Wesen nach seyn muß.

Aus dieser Untersuchung folgt nun zwar, daß $log\,(ab)$ nicht weniger Werthe haben kann, als $log\,a + log\,b$ deren hat; aber ob $log\,(ab)$ auch nicht mehr Werthe habe, d. h. ob diese Gleichung eine vollkommene sey, muß doch erst anderweitig entschieden werden, und zwar wie folgt:

Ist nämlich $a = p + qi$ und $b = p_1 + q_1 i$ so ist $ab = (pp_1 - qq_1) + (pq_1 + p_1 q) \cdot i$; und es sind nach (§. 656. N. N. 11. 12.):

$$\tfrac{1}{2}L(p^2+q^2)+(2a\pi+\varphi)\cdot i = \log a$$
$$\tfrac{1}{2}L(p_1{}^2+q_1{}^2)+(2b\pi+\varphi_1)\cdot i = \log b$$
$$\tfrac{1}{2}L[(pp_1-qq_1)^2+(pq_1+p_1q)^2]+(2c\pi+\varphi_2)\cdot i = \log(ab)$$

3 vollkommene Gleichungen in denen φ, φ_1 und φ_2 die einzigen positiven Bogen sind, welche innerhalb der 4 ersten Quadranten liegen, und die so sind, daß man hat

$$Cos\,\varphi = \frac{+p}{+\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad Sin\,\varphi = \frac{+q}{+\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$Cos\,\varphi_1 = \frac{+p_1}{+\sqrt{p_1{}^2+q_1{}^2}}, \qquad Sin\,\varphi_1 = \frac{+q_1}{+\sqrt{p_1{}^2+q_1{}^2}},$$

und $$Cos\,\varphi_2 = \frac{pp_1-qq_1}{+\sqrt{(pp_1-qq_1)^2+(pq_1+p_1q)^2}}$$

$$Sin\,\varphi_2 = \frac{pq_1+p_1q}{+\sqrt{(pp_1-qq_1)^2+(pq_1+p_1q)^2}},$$

während die deutschen Buchstaben a, b, c, unabhängig von einander 0 und alle positiven und auch alle negativen ganzen Zahlen vorstellen, weil das ($\pm$) Zeichen weggelassen worden ist.

Alle Werthe von $\log a+\log b$ sind also in der Formel

$$\tfrac{1}{2}L(p^2+q^2)+\tfrac{1}{2}L(p_1{}^2+q_1{}^2)+[2(a+b)\pi+\varphi+\varphi_1]\cdot i$$

enthalten, während

$$\tfrac{1}{2}L(p^2+q^2)+\tfrac{1}{2}L(p_1{}^2+q_1{}^2) = \tfrac{1}{2}L(p^2+q^2)(p_1{}^2+q_1{}^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}L[(pp_1-qq_1)^2+(pq_1+p_1q)^2]$$

ist.

Da nun nach (§. 627.)

$$\varphi+\varphi_1=\varphi_2 \text{ oder } \varphi+\varphi_1 = 2\pi+\varphi_2 \text{ *)}$$

seyn muß, weil nur dann $Sin\,\varphi_2$ und $Cos\,\varphi_2$ so werden, wie sie oben gegeben sind, und da $2(a+b)\pi$ oder auch $2(a+b+1)\pi$ dieselben Werthe hat als $2c\pi$, nicht mehr und auch nicht weniger, so folgt nun allerdings daß $\log(ab)$ nicht mehr und nicht weniger Werthe hat, als $\log a+\log b$, und auch genau dieselben.

---

*) φ und φ_1 und φ_2 sind, jedes für sich, nach (§. 656.) $<2\pi$; folglich $\varphi+\varphi_1<4\pi$, daher höchstens $\varphi+\varphi_1=2\pi+\varphi_2$, wenn nicht an sich schon $\varphi+\varphi_1=\varphi_2$ seyn sollte.

Ganz anders verhielte es sich aber, wenn man hier $b = a$ nehmen und die noch immer vollkommene Gleichung

$$log\, a + log\, a = log\,(a^2)$$

in diese andere

$$2\, log\, a = log\,(a^2)$$

umwandeln wollte. Diese letztere Gleichung wäre zwar noch immer richtig, in sofern $e^{2log\, a}$ in der That noch immer a^2 giebt, aber sie wäre nun eine unvollkommene, weil der Ausdruck $2log\, a$ zur Linken, von allen Werthen der Summe $log\, a + log\, b$ (jetzt $log\, a + log\, a$), nur diejenigen enthält, wo zu einem Werthe des ersten Summanden $log\, a$, nicht jeder, sondern nur gerade derselbe Werth des andern Summanden $log\, a$ addirt wird, also viel weniger Werthe enthält als rechts durch $log\,(a^2)$ vorgestellt sind.

Dieses Beispiel mag ausreichen, um den Anfänger in der Analysis auf die Untersuchungen aufmerksam zu machen, welche hier durch die niedergelegten Prinzipien begründet sind, in den später folgenden Anwendungen nöthig werden, dann aber auch, bei sorgfältiger Beobachtung aller hier gegebenen Regeln, Vorschriften und der ihnen zum Grunde liegenden Begriffe, ohne Schwierigkeit angestellt und zu Ende gebracht werden können.

Anmerkung 2. Mit dieser gründlichern Theorie der Logarithmen versehen, kann man die Ursachen aller der Parodoxien (d. h. aller der unerwartet unrichtigen Resultate) des Kalkuls mit großer Leichtigkeit auffinden= Auch hiervon ein Beispiel:

Man konnte schließen, wenn z. B. a eine positive Zahl ist:

1) $(-a)^2 = a^2$, also 2) $log\,[(-a)^2] = log\,(a^2)$.

Aber 3) $log\,[(-a)^2] = 2log\,(-a) = log\,(a^2)$

und 4) $log\,(a^2) = 2log\, a$;

also auch aus (3. und 4.)

5) $2log\,(-a) = 2log\, a$ und 6) $log\,(-a) = log\, a$.

Und wollte man hier weiter gehen, so konnte man nun noch daraus folgern

7) $e^{log\,(-a)} = e^{log\, a}$, also 8) $-a = a$,

woraus 9) $0 = a + a = 2a$, und 10) $0 = a$,

d. h., die positive Zahl a der Null gleich, hervorgienge.

Allein, bringt man die gegenwärtige Theorie in Anwendung, so findet man, daß die Gleichungen (1. und 2.) richtige, vollkommene Gleichungen sind; während (3. und 4.) nur unvollkommene Gleichungen seyn können. Die Gleichung (3.) lehrt nichts weiter, wie so eben

(Anmerkung 1.) gezeigt worden, als daß unter allen Werthen von $log\,[(-a)^2]$ oder von $log\,(a^2)$, die Werthe von $2\,log\,(-a)$ mitbegriffen sind, während die Gleichung (4.) lehrt, daß unter allen Werthen von $log\,(a^2)$ auch die in $2\,log\,a$ ausgedrückten stecken. Die nähere Untersuchung lehrt aber, daß die in $2\,log\,(-a)$ enthaltenen Werthe gerade die nicht sind, welche in $2\,log\,a$ vorgestellt sind, während recht gut alle beide Reihen von Werthen unter denen des $log\,(a^2)$ vorkommen können.

Man hat nämlich aus (§. 660.) als vollkommene Gleichungen

$$11)\quad 2\,log\,(-a) = 2\cdot La \pm 2(2a+1)\pi\cdot i,$$
$$12)\quad 2\,log\,a = 2\cdot La \pm 2\cdot 2b\pi\cdot i,$$

so wie

$$13)\quad log\,(a^2) = L(a^2) \pm 2c\pi\cdot i$$
$$= 2\cdot La \pm 2c\pi\cdot i,$$

woraus alles Gesagte ganz übersichtlich wird, in so ferne (11.) alle die Werthe des $log\,(a^2)$ liefert, in denen π mit einer einfachen geraden Zahl multiplizirt erscheint, während (12.) alle diejenigen Werthe desselben $log\,(a^2)$ liefert, in denen π mit einer doppelt geraden Zahl multiplizirt ist *).

Der Fehler im Schließen lag also hier oben darin, daß man in den beiden, wie allemal nothwendig identischen Gleichungen

$$log\,(a^2) = 2\,log\,(-a)$$
und $$log\,(a^2) = 2\,log\,a,$$

als man daraus ableitete

$$2\,log(-a) = 2\,log\,a,$$

den unendlich vieldeutigen Ausdruck $log\,(a^2)$ zur Linken, als in beiden Gleichungen allemal einen und denselben seiner Werthe vorstellend angesehen hat, während dies dasmal doch nicht der Fall war; daß man also gerade den in den Beispielen zu (Nr. 2 des §. 662.) besonders angezeigten Fehler zu vermeiden unterlassen hat.

---

*) Einfach gerade heißen die Zahlen 2, 6, 10, 14, 18, ꝛc. ꝛc. welche durch 2 aber nicht durch 4 theilbar sind. Doppelt gerade dagegen werden die Zahlen 4, 8, 12, 16, 20, 24, cc. genannt, welche nicht bloß durch 2, sondern auch durch 4 getheilt werden können.

§. 663. Aufgabe.

Wir haben bereits (§. 612.) gefunden

$$La = S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1}(a-1)^{a+1}\right],$$

oder, wenn man $a-1 = x$, also $a = 1+x$ setzt:

$$L(1+x) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}\right]$$

d. h. $L(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots$ in inf., wo jedoch $1+x$ positiv, und die Reihe zur Rechten konvergent seyn muß.

Es tritt daher nun die allgemeinere Aufgabe ein, nämlich: die Koeffizienten der unendlichen Reihe

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

so zu finden, daß, wenn selbige durch X vorgestellt wird,

$$e^X = 1+x, \quad \text{also} \quad X = log\,(1+x)$$

werde.

Auflösung. Es ist nach (§. 616.):

$$1)\ e^X = e^\alpha \cdot e^{\beta x} \cdot e^{\gamma x^2} \cdot e^{\delta x^3} \cdot e^{\varepsilon x^4} \ldots\ldots \text{ in inf.}$$

also auch, weil nach (§. 614.)

$$e^{\beta x} = S\left[\frac{\beta^b \cdot x^b}{b!}\right]; \quad e^{\gamma x^2} = S\left[\frac{\gamma^c \cdot x^{2c}}{c!}\right]; \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

ist, wenn man diese Werthe in (1.) substituirt, und die unendlichen Reihen rechts nach (§. 563.) mit einander multiplizirt,

$$2)\ e^X = e^\alpha \cdot S\left[\frac{\beta^b \cdot \gamma^c \cdot \delta^d \cdot \varepsilon^e \ldots\ldots}{b!\ \ c!\ \ d!\ \ e! \ldots\ldots} x^p\right]_{b+2c+3d+4e+\ldots = p}$$

welches Aggregat zur Rechten eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe repräsentirt, deren einzelne Glieder erhalten werden, so wie man nach und nach 0, 1, 2, 3, 4.... in inf. statt p setzt, und welche mit $1+x$ identisch werden soll.

Für $p = 0$ erhält man e^α als erstes Glied, welches dem ersten Gliede 1 gleich seyn muß, nach (§. 659.); also ist

$$e^\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \alpha = log\,1.$$

Für $p = 1$ ergibt sich der Koeffizient des 2ten Gliedes, welcher dem Koeffizienten von x in $1+x$ gleich sein muß, also, wenn 1 statt e^{α} gesetzt wird, $\beta = 1$.

Für $p = 2$ ergibt sich der 3te Koeffizient,

nämlich $S\left[\frac{\gamma^c}{b!\ c!}\right]_{b+2c=i} = 0$, oder $\frac{1}{2}+\gamma = 0$,

woraus γ gefunden wird; nämlich $\gamma = -\frac{1}{2}$.

Für $p = 3$ ergibt sich der vierte Koeffizient,

nämlich $S\left[\frac{\gamma^c \cdot \delta^d}{b!c!d!}\right]_{b+2c+3d=3}$ d. h. $S\left[\frac{(-1)^c \cdot \delta^d}{b!\ c!\ d!\ 2^c}\right]_{b+2c+3d=3} = 0$,

oder, weil b, c, d die Werthe haben kann,

d	0	0	1
c	0	1	0
b	3	1	0,

$\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\delta = 0$, d. h. $\delta = +\frac{1}{3}$.

Ueberhaupt ist der Koeffizient von x^n in e^x offenbar

$$S\left[\frac{\beta^b \cdot \gamma^c \cdot \delta^d \cdot \varepsilon^e \cdots}{b!\ c!\ d!\ e! \cdots}\right]_{b+2c+3d+\cdots+nn=n};$$

und weil die Reihe e^x allemal $= 1+x$ werden soll, so ist dieser Koeffizient allemal $= 0$, so oft $n > 1$ genommen wird; und die Gleichungen, welche sich hieraus ergeben, sind nach den Unbekannten β, γ, δ, ε ꝛc. ꝛc. allemal vom ersten Grade, und geben daher für diese Koeffizienten nur einen einzigen Werth, während der erste Koeffizient α allein die unendlich vielen Werthe des *log* 1 hat.

Nach den wenigen hier berechneten Gliedern hätte man also, als allgemeine Reihe, mit welcher e potenzirt $1+x$ gibt, welche daher *log* $(1+x)$ repräsentiren kann, so oft sie einen Werth hat

$$log\ 1 \quad +x-\tfrac{1}{2}\cdot x^2+\tfrac{1}{3}\cdot x^3 \ldots \text{ in inf.}$$

Anmerkung. Obgleich hier zwar die Koeffizienten alle auseinander (also rekurrirend) bis in's Unendliche fort gefunden werden

können, so ist doch ihre independente Form (d. h. ein Ausdruck für den nten, welcher n enthält, und welcher sogleich und unabhängig von den vorhergehenden, jeden Koeffizienten angibt, selbst ohne die vorhergehenden berechnet zu haben) wie solche nothwendig wird, wenn die Reihen durch Aggregate ausgedrückt seyn sollen, keinesweges bekannt. — Um letztere zu finden bemerke man, daß wenn man, weil $e^{\alpha} = 1$ ist, das erste Glied α von der Reihe X absondert, und $X = \alpha + F(1+x)$ setzt, also unter $F(1+x)$ bloß noch die Reihe $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \cdots$ versteht, solche Reihe $F(1+x)$ noch immer $e^{F.1+x)} = 1+x$ macht, so daß man hat

$$e^{F(1+x)} = 1+x, \qquad e^{F(1+y)} = 1+y,$$

also $e^{F(1+x)+F(1+y)} = (1+x)(1+y) = 1+(x+y+xy) = 1+z,$

wenn $z = x+y+xy$ genommen wird, während wiederum $e^{F(1+z)} = 1+z$ seyn muß, also daß man, weil aus der Auflösung des vorstehenden (§.) hervorgeht, daß diese Reihe $F(1+x)$ nur eine einzige ist, in sofern jeder ihrer Koeffizienten nur einen einzigen Werth erhalten kann, offenbar nicht bloß

$$e^{F(1+x)+F(1+y)} = e^{F(1+z)},$$

sondern auch

$$F(1+x)+F(1+y) = F(1+z)$$

hat, wenn nur $z = x+y+xy$ genommen wird.

Suchen wir also alle Reihen nach x fortlaufend, denen diese Eigenschaft zukommt, so wird die hier in Rede stehende nothwendig darunter begriffen seyn müssen, und vielleicht auch unter allen herausgefunden werden können. Daher kommen wir nun zu der neuen

§. 664. Aufgabe.

Die Koeffizienten P_a der Reihe $S[P_a \cdot x^a]$ so zu finden, daß

1) $S[P_a \cdot x^a] + S[P_b \cdot y^b] = S[P_b \cdot (x+y+xy)^b]$

d. h. $F(1+x)+F(1+y) = F[1+(x+y+xy)]$

wird, wenn dasmal jede solche gesuchte Reihe $S[P_a \cdot x^a]$ durch $F(1+x)$ vorgestellt wird.

Auflösung. Da die Gleichung (1.) auch für $x = y = 0$ statt finden soll, sie aber dann $P_0 + P_0 = P_0$ liefert, so ist $P_0 = 0$, so daß die gesuchte Reihe selbst sogleich durch $S[P_{a+1} \cdot x^{a+1}]$ vorgestellt werden kann.

Man hat nun nach (§§. 404. 405.):

$$2)\ (x+y+xy)^b = S\left[\frac{(a+b+c!)}{a!\ b!\ c!}\cdot x^a\cdot y^b\cdot(xy)^c\right]_{a+b+c=b}$$

$$= S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!}\cdot x^{a+c}\cdot y^{b+c}\right]_{a+b+c=b}.$$

Setzt man daher diese Werthe in die (1.) zur Rechten, so wird aus (1.) jetzt:

$$3)\ S[P_a\cdot x^a]+S[P_b\cdot y^b] = S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!}P_{a+b+c}\cdot x^{a+c}\cdot y^{b+c}\right]_{a+b+c=b}.$$

Nimmt man hier links und rechts die Koeffizienten von y^1 so hat man nach (§. 559.), und weil $b+c=1$, die Werthe $b=0$, $c=1$, und $b=1$, $c=0$ zuläßt, und weil $\frac{(a+1)!}{a!}=a+1$ ist,

$$4)\ P_1 = S[(a+1)P_{a+1}\cdot x^a+(a+1)P_{a+1}\cdot x^{a+1}]$$

$$= S[(a+1)P_{a+1}\cdot x^a]+S[(a+1)P_{a+1}\cdot x^{a+1}],$$

oder wenn man in dem ersten der beiden letztern Aggregate zuerst $a=0$ und dann $(a+1)$ statt a setzt, nach (§. 389.):

$$5)\ P_1 = P_1+S[(a+2)P_{a+2}\cdot x^{a+1}]+S[(a+1)P_{a+1}\cdot x^{a+1}]$$

d. h.

$$6)\ 0 = S[((a+1)P_{a+1}+(a+2)P_{a+2})\cdot x^{a+1}].$$

Von diesem Aggregat zur Rechten ist nun der Koeffizient von x^{a+1},

$$(a+1)P_{a+1}+(a+2)P_{a+2};$$

und weil solcher allemal $=0$ seyn muß, so hat man

$$7)\ (a+2)\cdot P_{a+2} = -(a+1)P_{a+1}.$$

Und setzt man hier $0, 1, 2, 3, 4, \ldots a-1$ statt a, so ergiebt sich hieraus

$$2 \cdot P_2 = -1 \cdot P_1$$
$$3 \cdot P_3 = -2 \cdot P_2$$
$$4 \cdot P_4 = -3 \cdot P_3$$
$$\vdots$$
$$a \cdot P_a = -(a-1) \cdot P_{a-1}$$
$$(a+1) \cdot P_{(a+1)} = -a \cdot P_a.$$

Also wenn man diese Gleichungen multiplizirt und durch die gemeinschaftlichen Faktoren links und rechts dividirt:

$$(a+1) P_{a+1} = (-1)^a \cdot P_1$$

demnach

$$8) \quad P_{a+1} = (-1)^a \cdot \frac{1}{a+1} \cdot P_1.$$

Folglich ist die gesuchte Reihe

$$S[P_{a+1} \cdot x^{a+1}] = P_1 \cdot S\left[(-1)^a \frac{1}{a+1} x^{a+1}\right],$$

wo P_1 ganz willkührlich genommen werden kann.

Es giebt also nicht eine, sondern nach den verschiedenen Werthen von P_1 verschiedene, also unendlich viele Reihen, welche die in der Aufgabe vorgeschriebene Eigenschaft haben.

§. 665. Zusatz.

Da nun unter allen diesen Reihen, die (§. 664. Anmerkung.) durch $F(1+x)$ bezeichnete enthalten seyn muß, deren 3 erste Glieder

$$x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots$$

dort bereits gefunden worden waren, die eben gefundenen Reihen aber alle mit den 3 ersten Gliedern in

$$P_1 \cdot x - \tfrac{1}{2}P_1 \cdot x^2 + \tfrac{1}{3}P_1 \cdot x^3 - \cdots$$

ausgesprochen sind, so muß nothwendig $P_1 = 1$ genommen werden, wenn man die (§. 664.) gesuchte Reihe haben will.

Also findet sich die Reihe X, welche $e^x = 1+x$ macht, welche also dem *log* $(1+x)$ entspricht; nämlich

$$1)\quad log\,(1+x) = \quad S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}\right].$$

Setzt man hier $-x$ statt x, so findet sich noch

$$2)\quad log\,(1-x) = -S\left[\frac{1}{a+1} x^{a+1}\right]$$

woraus, wenn man (2.) von (1.) subtrahirt:

$$3)\quad log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \cdot S\left[\frac{1}{2a+1} x^{2a+1}\right]$$

hervorgeht, *) zu welchen Reihen jedoch durchaus noch ein erstes Glied $\alpha = log\,1 = \pm 2a\pi \cdot i$ hinzukommen muß, (wie (§. 664.) gefunden worden ist), wenn sie ganz allgemein und nicht bloß die speziellen Reihen seyn wollen, welche hervorgehen, wenn man statt $log\,1$, den einzigen Werth $L\,1$ d. h. 0 setzt.

Diese Reihe (3.) kann man noch auf mannigfaltige Weise umformen. Setzt man z. B. $\frac{1+x}{1-x} = z$, also $x = \frac{z-1}{z+1}$, so wird daraus

$$4)\quad log\,z = 2 \cdot S\left[\frac{1}{2a+1} \cdot \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2a+1}\right],$$

Wird aber in (3.) $\frac{z}{2n+z}$ statt x gesetzt, so findet sich

$$5)\quad log\left(\frac{n+z}{n}\right) = 2 \cdot S\left[\frac{1}{2a+1}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^{2a+1}\right],$$

welches in

$$6)\quad L(n+z) = Ln + 2\left[\frac{z}{2n+z} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{z^3}{(2n+z)^3} + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{z^5}{(2n+z)^5} \cdots\right]$$

übergeht, wenn n und z absolute Zahlen sind, und welche Reihe

---

*) Man muß in (1.) und in (2.) nach (§. 387.), dadurch daß man zuerst $2a$, dann $2a+1$ statt a setzt, die geraden Glieder von den ungeraden absondern, und man sieht dann erstere bei der Subtraktion herausfallen.

zur schnellern näherungsweisen Berechnung der reelen natürlichen Logarithmen der folgenden Zahlen $n+z$ gebraucht werden könnte, wenn die der großen Zahlen n schon berechnet und bekannt sind.

§. 666. Zusatz.

Da, wenn

$$X = S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1} x^{a+1}\right]$$

gedacht ist, allemal $e^X = 1+x$ ist, und da nach (§. 614. N. 3.) wenn man $P_1 \cdot X$ statt x setzt,

$$a^{P_1 \cdot X} = e^{P_1 La \cdot X} \text{ ist,}$$

so wird

$$a^{P_1 X} = 1+x,$$

so oft $P_1 \cdot La = 1$,

d. h. $$P_1 = \frac{1}{La}$$

genommen wird.

Die (§. 664.) gefundenen Reihen $P_1 \cdot X$ sind also diejenigen, welche dann $\overset{a}{log}(1+x)$ entsprechen, so oft $P_1 = \frac{1}{La}$, $La = \frac{1}{P_1}$, $a = e^{1:P_1}$ genommen wird. Und dieses P_1 oder $\frac{1}{La}$ nennt man den Modul des künstlichen Logarithmen für die Basis a.

Anmerkung. Setzt man in (1.) des (§. 666.) e^{zi}, und dann e^{-zi} statt x, so erhält man

$$log\,(1+e^{zi}) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1} \cdot e^{(a+1)zi}\right]$$

und $$log\,(1+e^{-zi}) = S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1} \cdot e^{-(a+1)zi}\right].$$

Und subtrahirt man diese beiden Gleichungen von einander, so ergibt sich, weil $\frac{1+e^{zi}}{1+e^{-zi}} = e^{zi}$, also auch

$$log\,(1+e^{zi}) - log(1+e^{-zi}) = log\left(\frac{1+e^{zi}}{1+e^{-zi}}\right) = log(e^{zi}) = zi,$$

und $e^{(a+1)zi} - e^{-(a+1)zi} = 2i \cdot Sin\,(a+1)z$ ist, wenn man durch 2i noch wegdividirt:

$$\tfrac{1}{2}z = S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{a+1} \cdot Sin\,(a+1)z\right],$$

d. h. $\tfrac{1}{2}z = Sin\,z - \tfrac{1}{2}\,Sin\,2z + \tfrac{1}{3}\,Sin\,3z - \tfrac{1}{4}\,Sin\,4z + \cdots$ in inf.;

oder, wenn man nach (§. 387.) zuerst 2a, dann 2a+1 statt a setzt

$$\tfrac{1}{2}z = S\left[\frac{1}{2a+1}\,Sin\,(2a+1)z\right] - S\left[\frac{1}{2a+2}\,Sin\,(2a+2)z\right].$$

Für $z = \tfrac{1}{2}\pi$ wird, weil

$$Sin\,(2a+1)z = Sin\,(a+\tfrac{1}{2})\pi = (-1)^a \text{ und}$$
$$Sin\,(2a+2)z = Sin\,(a+1)\pi = 0 \quad \text{ist,}$$

$$\tfrac{1}{4}\pi = S\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{2a+1}\right]$$

d. h. $\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} -$ in inf.,

so daß dadurch die Zahl π bestimmt ist.

Wir werden jedoch zu einer gründlichern und auch praktischern Bestimmung von π unsre Zuflucht nehmen müssen.

Da nämlich, der (§. 634. N. 7.) gegebenen Definition gemäß, unter π die Zahl verstanden wird, welche in der Reihe der, von 0 an stetig wachsenden positiven Zahlen, die erste ihrer Art ist, so daß

$$Sin\,\tfrac{1}{2}\pi = 1 \quad \text{und} \quad Cos\,\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$

so käme alles darauf an, den Bogen x in Sinus und Kosinus desselben auszudrücken. Man könnte zu dem Ende, den Aufgaben der (§§. 581. u. 582.) entsprechend, die Reihe

$$Sin\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

oder
$$Cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

umkehren, d. h. x in eine Reihe verwandeln die nach Potenzen von *Sin* x oder *Cos* x fortliefe; und dies führt uns zu folgender

§. 667. Aufgabe.

Es ist $y = Sin\,x$ gegeben; man soll x in eine nach ganzen Potenzen von y fortlaufende Reihe verwandeln.

Auflösung. Da

1) $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ in inf.

gegeben, so wird man

$$2)\quad x = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \cdots\cdots$$

nehmen, solche Reihe statt x in (1.) substituiren, und dann die einzelnen Koeffizienten von y einander gleich haben, ganz dem (§. 581.) gemäß, und so die Gleichungen erhalten, welche zur Bestimmung von α, β, γ, δ, ꝛc. ꝛc. dienen.

Man findet auf diesem Wege zunächst

$$0 = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \text{ꝛc. ꝛc.}$$

d. h. $0 = Sin\,\alpha$, also $\alpha = \frac{1}{Sin}\,0 = \pm a\pi$.

Wird nun $\beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \cdots$ in inf. $= v$ gesetzt, so hat man $x = \alpha + v$, also

$$y = Sin(\alpha + v) = Sin\,\alpha \cdot Cos\,v + Cos\,\alpha \cdot Sin\,v$$
$$= \pm Sin\,v = Sin(\pm v),$$

je nachdem $\alpha = \pm 2b\pi$ oder $= \pm(2b+1)\pi$ ist,
weil man $Cos \pm 2b\pi = +1$ und $Cos \pm (2b+1)\pi = -1$ hat.

Es wird also, im Falle $\alpha = \pm 2b\pi$ genommen wird,

$$v = \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \cdots$$

wiederum so gesucht, daß solche Reihe in

$$y = Sin\,v \quad \text{d. h. in} \quad y = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \frac{v^7}{7!} + \cdots \text{ in inf.}$$

statt v gesetzt, diese Gleichung identisch macht. — Und hat man die Reihe v so gefunden, so darf man nur alle Glieder mit dem entgegengesetzten + oder — Zeichen nehmen, um die Reihe für den Fall zu haben, daß $\alpha = \pm(2b+1)\pi$ genommen würde.

Die Aufgabe reduzirt sich also auf folgende:

Es ist 3) $y = v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \frac{v^7}{7!} + \cdots$ in inf.

gegeben, man soll

$$4)\quad v = \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \cdots \text{ in inf.}$$

so finden, daß letztere Reihe statt v in die Gleichung (3.) ge-

setzt, dieselbe identisch macht. Weil jedoch nach (§. 624), so oft $Sin\, u = y$ ist, auch $Sin\,(-u) = -y$ sein wird, so muß der Bogen, so oft $-y$ statt y gesetzt wird, genau in den entgegengesetzten übergehen können; also darf die Reihe (4.) offenbar nur ungerade Potenzen von y enthalten, so daß man sie sogleich so

$$5)\quad v = P_1.y + P_3.y^3 + P_5.y^5 + \ldots.$$

annehmen kann. — Auf demselben Wege des (§. 581.) fortfahrend, findet man nun $P_1 = 1$, $P_3 = \frac{1}{6}$, $P_5 = \frac{3}{40}$, $P_7 = \frac{15}{336}$, u. s. w.; überhaupt, die Koeffizienten alle mittelst der vorhergehenden (also rekurrirend) ausgedrückt, ohne daß jedoch das independente Gesetz, (nach welchem außer der Ordnung jeder nte Koeffizient sogleich und unabhängig von den vorhergehenden bestimmt wird) in die Augen fiele.

Anmerkung 1. Geübte Rechner werden $\frac{1}{6} = \frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{3}{40} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}$, $\frac{15}{336} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$ ꝛc. herausformen, und dann folgendes Resultat hinstellen:

Ist nämlich $y = Sin\, x$, so ist

$$\text{I.}\quad x = \pm 2b\pi + \frac{y}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^7}{7} + \ldots.$$

und noch

$$\text{II.}\quad x = \pm(2b+1)\pi - \left[\frac{y}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{y^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{y^7}{7} + \ldots\right];$$

und jede dieser Reihen entspricht der gegebenen Aufgabe.

Allein von der Form der hier hingestellten Glieder auf die der folgenden, der Analogie nach zu schließen, bleibt viel zu gewagt, als daß wir solches Verfahren hier anwenden dürften, wenn man auch von der obigen, jeden Anfänger als ein Glücksfall erscheinenden Umformung der gefundenen Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{15}{336}$ ꝛc. ꝛc. Gebrauch zu machen, nicht anstehen wollte.

Anmerkung 2. Weil aber nach (§. 626.)

$$e^{xi} = Cos\, x + i\cdot Sin\, x,$$
$$e^{-xi} = Cos\, x - i\cdot Sin\, x,$$
$$e^{2xi} = \frac{1 + i\cdot Tg\, x}{1 - i\cdot Tg\, x}\ \text{ist},$$

so folgt auch nach (§. 618.)

$$x = \frac{1}{i} \cdot log\,(Cos\,x + i \cdot Sin\,x),$$

$$x = -\frac{1}{i} \cdot log\,(Cos\,x - i \cdot Sin\,x),$$

$$x = \frac{1}{2i} \cdot log\left(\frac{1 + i \cdot Tg\,x}{1 - i \cdot Tg\,x}\right),$$

und diese Gleichungen dienen vielleicht dazu, um direkt den Bogen x in seinen Sinus, seinen Kosinus oder seine Tangente auszudrücken. — Diese Betrachtung veranlaßt nachstehende Untersuchungen.

§. 668. Lehrsätze.

In den Gleichungen

$$\text{I.}\quad x = \frac{1}{i} \cdot log\,(Cos\,x + i \cdot Sin\,x),$$

$$\text{II.}\quad x = -\frac{1}{i} \cdot log\,(Cos\,x - i \cdot Sin\,x),$$

$$\text{III.}\quad x = \frac{1}{2i} \cdot log\left(\frac{1 + i \cdot Tg\,x}{1 - i \cdot Tg\,x}\right),$$

$$\text{IV.}\quad x = \frac{1}{2i} \cdot log\left(\frac{Cotg\,x + i}{Cotg\,x - i}\right),$$

haben die Ausdrücke zur Rechten nicht mehr und nicht weniger, und auch genau dieselben Werthe, welche der zu gegebenen $Cos\,x$ und $Sin\,x$, oder zur gegebenen $Tg\,x$, oder zur gegebenen $Cotg\,x$ gehörige Bogen x haben kann.

Beweis. Denn nach der (§. 618.) gegebenen Definition, enthält $log\,z$ nicht mehr und auch nicht weniger, sondern genau alle Werthe, denen die Eigenschaft zukommt, daß

$$e^{log\,z} = z \quad \text{ist.}$$

Da nun nach (§. 626.)

$$e^{\pm xi} = Cos\,x \pm i \cdot Sin\,x \quad \text{ist,}$$

so sind alle Werthe von $\pm xi$ in $log\,(Cos\,x \pm i \cdot Sin\,x)$ ausge-

drückt. — Und da nach (§. 626.) auch

$$e^{2xi} = \frac{1+i\cdot Tg\,x}{1-i\cdot Tg\,x}\ ^{*)} = \frac{Cotg\,x+i}{Cotg\,x-i}$$ ist,

so sind $log\left(\frac{1+i\cdot Tg\,x}{1-i\cdot Tg\,x}\right)$ und $log\left(\frac{Cotg\,x+i}{Cotg\,x-i}\right)$

alle Werthe von $2xi$, nicht mehr und nicht weniger. — Und daraus folgern die Behauptungen des Lehrsatzes unmittelbar.

Anmerkung 1. Auch wäre es noch richtig, wenn man in den folgenden Gleichungen:

$$x = \pm\frac{1}{i}\cdot log\left(\sqrt{1-Sin\,x^2}\pm i\cdot Sin\,x\right)$$

$$x = \pm\frac{1}{i}\cdot log\left(Cos\,x+i\cdot\sqrt{1-Cos\,x^2}\right),$$

zur Rechten alle Werthe des, zu dem gegebenen Sinus, oder zu dem gegebenen Kosinus gehörigen Bogens erblicken wollte. Es würde zwar der Logarithmand, wegen der zwei-deutigen Quadratwurzel, zwei Werthe, und der Logarithme daher 2 mal so viele Werthe haben, als er außerdem, in den Gleichungen (I. und II.) hatte; allein der Bogen x hat ebenfalls 2 mal so viele Werthe, wenn sein Sinus oder sein Kosinus allein gegeben ist, als er in (I. und II) deren haben konnte, wo man $Cos\,x$ und $Sin\,x$ zugleich gegeben hatte.

Anmerkung 2. Auch mag man bei diesen Formeln nicht übersehen, daß $\frac{1}{i} = -i$ und $-\frac{1}{i} = i$,

so daß man auch hat

$$x = -i\cdot log\,(Cos\,x+i\cdot Sin\,x) = i\cdot log\,(Cos\,x-i\cdot Sin\,x).$$

Ferner ist $i\cdot\sqrt{1-v^2} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{1-v^2} = \sqrt{v^2-1}$,

so daß man die zweite der Formeln in der vorhergehenden Anmerkung auch so schreiben kann

$$x = \mp i\cdot log\left(Cos\,x+\sqrt{Cos\,x^2-1}\right).$$

Auf solche und ähnliche Umformungen soll jedoch hier nur hingedeutet werden, ohne daß wir gerade davon Gebrauch zu machen gedächten.

---

*) Zähler und Nenner durch $Tg\,x$ dividirt.

§. 669. Zusatz.

Bezeichnet man nun $Tg\,x$ durch t, so daß

$$Tg\,x = t, \qquad \frac{1}{Tg}\,t = x \qquad \text{ist,}$$

so hat man alle Werthe von $log\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$ aus (§. 666. N. 3.), wenn man dort it statt x setzt, nämlich, weil $log\,1 = \pm 2b\pi i$ ist:

$$log\left(\frac{1+it}{1-it}\right) = \pm 2b\pi \cdot i + 2i \cdot S\left[(-1)^a \cdot \frac{t^{2a+1}}{(2a+1)}\right],$$

also nach (§. 668. III.):

$$\text{I.}\quad x = \frac{1}{Tg}\,t = \pm b\pi + S\left[\frac{(-1)^a \cdot t^{2a+1}}{2a+1}\right],$$

d. h. $x = \frac{1}{Tg}\,t = \pm b\pi + t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \cdot - \frac{1}{7}t^7 + \cdots$ in inf.

so daß der Ausdruck rechts alle Werthe des Bogens x enthält, in seine Tangente ausgedrückt, jedoch nur in allen den Fällen, wo diese unendliche Reihe konvergent ist.

Setzt man hier $b = 0$, so hat man noch

$$\text{II.}\quad x = \frac{1}{Tg}\,t = S\left[(-1)^a \cdot \frac{t^{2a+1}}{2a+1}\right]$$

d. h. $x = \frac{1}{Tg}\,t = t - \frac{1}{3}\,t^3 + \frac{1}{5}\,t^5 - \frac{1}{7}\,t^7 + \cdots$ in inf.

wo jedoch, wenn die unendliche Reihe auch konvergirt, solche nur einen einzigen Werth des Bogens x liefert.

§. 670. Zusatz.

Berechnet man nun aus den Gleichungen

$$Sin\,\tfrac{1}{2}\pi = 1, \qquad Cos\,\tfrac{1}{2}\pi = 0,$$

nach und nach, den (§. 631. N. N. 4. 5.) gemäß, d. h. nach den Formeln

$$Sin\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1-Cos\,v}{2}},$$

$$Cos\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+Cos\,v}{2}},$$

die Sinus und Kosinus von $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{1}{16}\pi$, $\frac{1}{32}\pi$, $\frac{1}{64}\pi$, ꝛc..... überhaupt $\frac{1}{2^n}\pi$, (welche alle positiv seyn müssen, so daß man über das (+ oder —) Zeichen der hier vorkommenden Quadratwurzeln nicht im Zweifel seyn kann), so hat man auch sogleich nach der Formel

$$\frac{Sin}{Cos} = Tg,$$

die Tangenten für alle diese Bogen. — Setzt man dann diese berechneten Tangenten statt t in die Gleichung (I. §. 670.); so ergeben sich diese Bogen selbst, also

$\frac{1}{4}\pi$, oder $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{1}{16}\pi$ oder $\frac{1}{32}\pi$, ... oder $\frac{1}{2^n}\pi$,

so daß man daraus π, so genau man nur immer will, berechnen kann. —

Auf dieselbe Weise kann man aber auch aus (§. 630. A. 3. B. 3. C. 3. oder D. 3.) Sinus und Kosinus von $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$ ꝛc. ꝛc. also auch $Tg\,\frac{1}{3}\pi$, $Tg\,\frac{1}{6}\pi$, ꝛc. finden, statt des dortigen y bald $\frac{1}{3}\pi$, bald $\frac{1}{6}\pi$ ꝛc. setzend, und aus dieser Tangente, dann wiederum $\frac{1}{3}\pi$, ꝛc., oder π selbst.

Man findet aber namentlich auf diesem Wege:

$Sin\,\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $Cos\,\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; und $Tg\,\frac{1}{4}\pi = 1$;

$$Sin\,\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{\left(\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}};$$

$$Cos\,\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{\left(\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}};$$

$$Tg\,\tfrac{1}{8}\pi = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)};^{*)}$$

u. s. w. f.

Ferner $Sin\,\frac{1}{6}\pi = Cos\,\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$ und $Cos\,\frac{1}{6}\pi = Sin\,\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; wo die Wurzeln alle ihre positiven Werthe vorstellen.

---

*) Multiplizirt man hier Zähler und Nenner mit $(2-\sqrt{2})$, so erhält man $Tg\,\frac{1}{8}\pi = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1+\sqrt{2}$.

Setzt man also in (§. 670. II.) $t = 1$, so ergibt sich der zugehörige Bogen $\frac{1}{4}\pi$, nämlich

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}\ *)$$

woraus die Zahl π als das 4fache des Werthes der konvergirenden Reihe zur Rechten sich ergibt.

§. 671. Zusatz.

Statt direkt zu einer gegebenen Tangente den Bogen zu suchen, von dem man weiß, daß solcher ein gegebener Theil von π ist, kann man auch zu zwei gegebenen Tangenten t_1 und t_2, zugehörige Bogen suchen, deren Summe ein gegebener Theil von π seyn muß. Da nämlich nach (§. 654. N. 3.):

$$\frac{1}{Tg}t_1 + \frac{1}{Tg}t_2 = \frac{1}{Tg}\,\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 \cdot t_2}$$ ist,

so hat man

$$\frac{1}{Tg}t_1 = \pm b\pi + t_1 - \frac{1}{3}\cdot t_1^3 + \frac{1}{5}\cdot t_1^5 - \frac{1}{7}\cdot t_1^7 + \text{ꝛc. ꝛc.}$$

---

*) In der That kann man eigentlich nicht sagen, daß die gefundene Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ ꝛc. ꝛc. gerade der Bogen $\frac{1}{4}\pi$ seyn müsse; sondern da nach (§. 670. I.)

$$\pm b\pi + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

alle Bogen enthält, deren Tangente $= 1$ ist, so muß der Bogen $\frac{1}{4}\pi$ darunter mit begriffen seyn, so daß man den Werth von b (der übrigens 0 oder eine ganze positive Zahl ist) noch dazu suchen muß, der

$$\frac{1}{4}\pi = \pm b\pi + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

d. h. $(\frac{1}{4} \pm b)\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -$ ꝛc. ꝛc. ꝛc.

indentisch macht. — Weil aber diese unendliche Reihe offenbar $> 1 - \frac{1}{3}$ und $< 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$; also $> \frac{2}{3}$ aber $< \frac{13}{15}$ ist, und da wir bereits (§. 63. 4.) gesehen haben, daß π zwischen 3 und 4 liegt, so folgt, daß b nur Null seyn kann, also daß in der That die obige Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ genau $\frac{1}{4}\pi$ ist.

$$\frac{1}{Tg} t_2 = \pm c\pi + t_2 - \tfrac{1}{3} \cdot t_2^3 + \tfrac{1}{5} \cdot t_2^5 - \tfrac{1}{7} \cdot t_2^7 + \text{ꝛc. ꝛc.};$$

und die Summe dieser Reihen gibt dann

$$\frac{1}{Tg} \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 \cdot t_2} = \pm \delta\pi + \left\{ \begin{array}{l} t_1 - \frac{1}{3} \cdot t_1^3 + \frac{1}{5} \cdot t_1^5 - \frac{1}{7} \cdot t_1^7 + \text{ꝛc.} \\ + t_2 - \frac{1}{3} \cdot t_2^3 + \frac{1}{5} \cdot t_2^5 - \frac{1}{7} \cdot t_2^7 + \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

Setzt man z. B. hier $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{1}{3}$, so wird

$\frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 \cdot t_2} = 1$, und der ganze Ausdruck zur Rechten ist ein Bogen, dessen Tangente $= 1$ ist, und gibt für $\delta = 0$ den Bogen $\frac{1}{4}\pi$, so daß sein 4faches die Zahl π wieder ist.

Anmerkung. Es ist leicht abzusehen, daß man für t_1 und t_2 auch andere Werthe setzen kann, so daß die Summe ihrer Bogen ein in π gegebener Bogen ist; und es ist eine Aufgabe desjenigen Theils der Analysis, welcher die unbestimmte Analysis genannt wird, die Werthe von t_1 und t_2 anzugeben, welche den hier verlangten Bedingungen entsprechen.

Eben so kann man aus

$$Tg(x+y) = \frac{Tg\,x + Tg\,y}{1 - Tg\,x \cdot Tg\,y},$$

auch noch ableiten

$$Tg(x+y+z) = \frac{Tg\,x + Tg\,y + Tg\,z - Tg\,x \cdot Tg\,y \cdot Tg\,z}{1 - Tg\,x \cdot Tg\,y - Tg\,x \cdot Tg\,z - Tg\,y \cdot Tg\,z};$$

also, wenn $Tg\,x = t_1$, $Tg\,y = t_2$ und $Tg\,z = t_3$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{Tg} t_1 + \frac{1}{Tg} t_2 + \frac{1}{Tg} t_3 = \frac{1}{Tg} \frac{t_1 + t_2 + t_3 - t_1 \cdot t_2 \cdot t_3}{1 - t_1 \cdot t_2 - t_1 \cdot t_3 - t_2 \cdot t_3};$$

und nun kann man Werthe von t_1, t_2, t_3 aufsuchen, welche klein und doch so sind, daß die Summe der zugehörigen Bogen ein gegebener Theil von π ist, so daß π wiederum daraus hervorgeht.

Alle diese Veränderungen werden aber deshalb vorgenommen, um schnell konvergirende Reihen zu bekommen.

Auf solchem und ähnlichem Wege hat man aber
$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ldots$ gefunden.

Schluß-Anmerkung.

Bei dem Schlusse dieses, die wichtigsten Lehren der feinern Analysis in ihrem Keime umfassenden Kapitels, wollen wir noch darauf aufmerksam machen, daß man die Zahl π oder 3,14159.... in 180 Theile theilt, und einen solchen Theil (also die Zahl $\frac{\pi}{180}$ d. h. 0,0174532925198....) einen Bogen-Grad nennen kann, während solcher dann wieder in 60 Bogen-Minuten und die Minute abermals in 60 Bogen-Sekunden getheilt wird, so daß 1 Bogen-Minute die Zahl $\frac{\pi}{180 \cdot 60}$ oder 0,000290888820866.... und eine Bogen-Sekunde die Zahl $\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60}$ oder 0,000004848136811.... vorstellt.

Auf diese Weise kann man sich in der Analysis der, für die gemeinen geometrischen Anwendungen berechneten trigonometrischen Tabellen ohne weitere Abänderung bedienen. Will man nämlich *Sin* 0,53, d. h den Werth der Reihe

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{....} \text{ in inf.}$$

für $x = 0{,}53$ finden, so dividire man dieses gegebene x oder 0,53 durch den Bogen-Grad 0,01745329.... (gibt 30 Grade und den Rest 0,006401224405...); dann dividire man diesen Rest 0,006401224405... wiederum durch die Bogen-Minute 0,000290888208.... (gibt 22 Minuten und noch den Rest 0,000001683829....), und dividire endlich diesen Rest 0,000001683829... noch durch die Bogen-Sekunde 0,000004848136..... (wodurch sich ohngefähr $\frac{1}{3}$ ergiebt), und der Bogen 0,53 ist auf die Form″ 30 Grad 22 Minuten $\frac{1}{3}$ Sekunden oder $30^\circ\ 22'\ \frac{1}{3}''$ gebracht, unter welcher Form er nun in den gewöhnlichen Tabellen nachgeschlagen wird, wo sich denn der gesuchte *Sin* 0,53 (d. h. *Sin* $30^\circ\ 22'\ \frac{1}{3}''$) daselbst berechnet vorfindet.

Und hat man umgekehrt zu einem gegebenen Sinus den Bogen zu finden, so findet man diesen Bogen in den gewöhnlichen Tabellen unter der Form z. B.

$$37^\circ \quad 13' \quad 29''$$

welches die Zahl

$$x = 37 \cdot \frac{\pi}{180} + 13 \cdot \frac{\pi}{60 \cdot 180} + 29 \cdot \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}$$

$$= \left[(37 \cdot 60 + 13)60 + 29\right] \cdot \frac{\pi}{60 \cdot 60 \cdot 180}$$

$$= 134009 \times 0{,}000004848136811.....$$

d. h. $x = 0{,}6496939659.....$

gibt, welche Zahl jedoch zu $\pm 2a \cdot \pi$ addirt und von $\pm (2a+1)\pi$ noch subtrahirt werden muß, wenn man alle reellen (positiven und negativen) Werthe von x haben will, denen derselbe gegebene Sinus zukommt, d. h. für welche die Reihe

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \text{ in inf.}$$

berechnet, allemal ein und dasselbe gegebene Resultat liefert.

Und in der Folge, bei den Anwendungen dieser Lehre auf Geometrie (also in dem Vortrage der Geometrie) wird gezeigt werden, daß diese Zahl x allemal einem Winkel entspricht von eben so viel Winkelgraden (deren 90 den rechten Winkel ausmachen), Winkel-Minuten und Winkel-Sekunden, als sie auf die eben beschriebene Weise Bogen-Grade, Bogen-Minuten und Bogen-Sekunden hat, daß nämlich diese Zahl x die Länge des, mit dem Radius 1 zwischen den Schenkeln dieses Winkels beschriebenen Kreis-Bogens ist. Dann kann man zu $x = 0{,}53$ z. B., die Grade, Minuten und Sekunden auch durch die Proportion finden: $\pi : 180 = 0{,}53$: Zahl der Grade g; so daß $g = \frac{0{,}53 \cdot 180}{\pi} = \frac{0{,}53 \cdot 180}{3{,}14159\ldots}$ d. h. $g = 30\frac{115230}{314159}$ sich findet.

Also ergiebt sich, $\frac{115230}{314159}$ mit 60 multiplizirend, für x, außer den 30 Graden, noch $22\frac{2302}{314159}$ Minuten, wobei die $\frac{2302}{314159}$ Minuten (diese letztere gebrochene Zahl nochmals mit 60 multiplizirend) in $\frac{1}{3}$ Sekunde ohngefähr übergehen.

Zahlenlehre.

Sechs und zwanzigstes Kapitel.

Von den allgemeinen Potenzen und den allgemeinen Logarithmen. Bestimmung aller Werthe einiger Potenz-Ausdrücke.

Vorerinnerung.

Nachdem das Verhalten der 4 ersten (Elementar-) Operationen zu einander bereits im 3ten Kapitel dieses Systems, aus der Betrachtung spezieller Zahlen abstrahirt, und als das Allgemeine hingestellt war, kam alles noch darauf an, auch das Verhalten der folgenden 3 (höhern) Operationen, zu einander und zu den frühern festzustellen. Dies letztere konnte jedoch nicht auf einmal, sondern nur nach und nach geschehen. Es wurde namentlich im 6ten Kapitel das Verhalten der reelen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen festgestellt; nun in den vorhergehenden Kapiteln das Verhalten der ganzen Potenzen und der ganzen (allgemeinen) Wurzeln; endlich in dem nächstvorhergehenden Kapitel das Verhalten der künstlichen (darunter der natürlichen) Potenz und des künstlichen (darunter des natürlichen) Logarithmen. —

Ferner wurde das allgemeine Verhalten der Addition und Subtraktion zu einander im 1sten Kapitel auf den Umstand gegründet, daß solches mit der ganzen (positiven) Zahl nirgends in Widerspruch kommen könne. Das allgemeine Verhalten der Multiplikation und Division zu einander und zu den frühern beiden Operationen, wurde im

3ten Kapitel darauf gegründet, daß man gezeigt hat, wie solches der Differenz ganzer Zahlen (welche das frühere Kapitel als den bisher allgemeinsten Zahlenbegriff hingestellt hatte) nicht widersprechen könne. Mit dem was nun hervorgegangen ist (d. h. mit der reelen Zahl) durfte das folgende nicht im Widerspruche stehen; daher die nothwendige Annahme der Vieldeutigkeit der ganzen (allgemeinen) Wurzel. Mit dem was diese und die damit verknüpften höheren Gleichungen lieferten (d. h. mit den allgemeinen numerischen Ausdrücken, d. h. mit den Ausdrücken von der Form $p+q\cdot i$) darf das folgende nicht in Widerspruch kommen; daher das Bestreben die Beziehungen zwischen den Potenzen (und Logarithmen) hinzustellen, für den Fall daß alle Ausdrücke von der Form $p+q\cdot i$ sind. —

Bis jetzt haben wir aber bloß Potenzen betrachtet $a^{p+q\cdot i}$, deren Exponent zwar schon diese allgemeine Form $p+q\cdot i$ hat, aber deren Dignand a (oder e) eine positive Zahl noch ist, also noch nicht die allgemeinere Form $p+q\cdot i$ hat. Deshalb müssen nun in dem gegenwärtigen Kapitel noch Potenzen betrachtet werden von der Form $(p_1+q_1\cdot i)^{p+q\cdot i}$ d. h. a^x, unter der Voraussetzung daß a und x beide von der Form $\alpha+\beta\cdot i$ sind, wo α und β beliebig reel sind, so daß auch $\alpha+\beta\cdot i$ (für $\beta=0$) alle reellen Zahlen in sich schließt. Mit dieser allgemeinen Potenz gibt sich der allgemeine Logarithme von selbst.

Die Beziehungen und Gegensätze, welche aber nun gewonnen werden, sind die allgemeinsten, stehen mit nichts im Widerspruch, was früher dagewesen seyn konnte und so schließt sich damit das Ganze der Untersuchung über das einfache Verhalten der 7 Operationen zu einander.

Erste Abtheilung.

Von den allgemeinen Potenzen und von den allgemeinen Logarithmen.

---

§. 672. Erklärung.

Durch das vorhergehende ist man in den Stand gesetzt, den Begriff der Potenz a^x noch einmal zu erweitern, und zwar für den allgemeinsten Fall, wo a und x zugleich, beliebige allgemein-numerische Zahlen sind, reel oder imaginär.

Da nämlich, wenn a allgemein-numerisch, x aber eine Differenz ganzer Zahlen ist, nach (§. 607.)

$$a^x = S\left[\frac{P_1{}^a \cdot x^a}{a!}\right]$$

gefunden worden ist, so oft P_1^{γ} so genommen wird, daß

$$a = S\left[\frac{P_1{}^a}{a}\right], \text{ d. h. } a = e^{P_1} \text{ (§. 614.)}$$

identisch wird, also wenn für P_1 irgend einer der unendlich vielen Werthe von *log* a gesetzt wird, so hat man

$$a^x = S\left[\frac{x^a \cdot (log\, a)^a}{a!}\right],$$

so oft x irgend eine Differenz ganzer Zahlen ist, und statt *log* a irgend einer seiner unendlich vielen Werthe gesetzt wird, während a ganz allgemein seyn kann. *)

Diese Reihe zur Rechten

$$S\left[\frac{x^a \cdot (log\, a)^a}{a!}\right]$$

hat aber für jeden Werth von x Bedeutung, wenn auch nach

---

*) In so ferne die Differenz-Potenz a^x entweder ein Product oder ein Quotient ist, und immer nur einen einzigen Werth hat, so sieht man hier unendlich viele nach x fortlaufende Reihen, die alle in $S\left[\frac{x^a \cdot (log\, a)^a}{a!}\right]$ vorgestellt sind, welche für alle positiven oder negativen ganzen Zahlen-Werthe von x einander gleich sind, (jede ist nämlich $= a^x$), während die einzelnen Koeffizienten die verschiedenen Werthe von *log* a, oder ihre Potenzen, also nicht einander gleich sind. Dieselben Reihen sind aber nicht für jeden beliebigen (etwa gebrochenen, imaginären) Werth von x einander gleich, also für ein allgemeines x nicht identisch, sondern werden für gebrochene und imaginäre x sehr verschiedene Werthe annehmen.

den verschiedenen Werthen des *log* a, vielleicht für ein und dasselbe (gebrochene oder imaginäre) x unendlich viele verschiedene Bedeutungen, von welchen sich, wenn a positiv ist, diejenige besonders heraushebt, wo statt *log* a der einzige reelle Werth *L*a gesetzt wird, und die wir deshalb unter dem Namen der künstlichen (und der natürlichen) Potenz näher betrachtet haben. Ist dagegen a allgemein, so daß es negativ oder imaginär noch eben so gut seyn kann als positiv, so sondert sich keiner der unendlich vielen Werthe des *log* a so natürlich von den andern ab, und man sieht sich daher gezwungen, in dieser Allgemeinheit alle Werthe zugleich, welche in

$$S\left[\frac{x^a \cdot (log\, a)^a}{a!}\right]$$

enthalten seyn können, in einen Begriff, nämlich in den der allgemeinen Potenz zusammen zu fassen, und diesen, so unendlich vieldeutig er nun auch wird, einer nähern Untersuchung zu unterwerfen. Daher folgende Definition:

Sind a und x ganz allgemeine Ausdrücke, so verstehe man unter der allgemeinen Potenz a^x nichts anders als alle Werthe der unendlichen Reihe

$$S\left[\frac{x^a \cdot (log\, a)^a}{a!}\right],$$

welche nach und nach aus ihr hervorgehen, wenn statt *log* a nach und nach alle seine unendlich vielen Werthe gesetzt werden.

§. 673. Zusatz.

Da dieselbe unendliche Reihe dem (§. 614.) zufolge, auch durch die natürliche Potenz

$$e^{x \cdot log\, a}$$

ausgedrückt werden kann, welche für jeden Werth des *log* a nur eindeutig ist, dagegen wegen der unendlich vielen Werthe des

log a zu gleicher Zeit unendlich viele solcher eindeutigen natürlichen Potenzen repräsentirt, so hat man

$$a^x = e^{x \cdot log\, a},$$

welche Gleichung zur Rechten alle Werthe angibt, die der Definition des (§. 672.) zufolge, von nun an unter der allgemeinen Potenz a^x zu denken sind. *)

§. 674. Zusatz.

Will man, unter der Voraussetzung daß

$$a = p + q \cdot i \quad \text{und} \quad x = \alpha + \beta i \quad \text{ist},$$

alle diese Werthe von a^x in derselben Form der allgemein-numerischen Zahlen entwickelt erblicken, so verfahre man, wie folgt:

---

*) Man kann sagen: wenn a^x unendlich viele Werthe hat, für jedes a, so auch für $a = e$; also hat dann auch e^x unendlich viele Werthe. Und man hat Recht. Um aber Verwirrung der Begriffe zu vermeiden, welche aus unzulänglicher Bezeichnung so leicht hervorgeht; so soll hier das Zeichen e^z nie eine allgemeine Potenz vorstellen, also nie statt der Reihe

$$S\left[\frac{(z \cdot log\, e)^a}{a!}\right]$$

d. h. nie statt $$S\left[\frac{[z(1 \pm 2c\pi \cdot i)]^a}{a!}\right]$$

stehen, sondern immer nur statt der (§. 613.) definirten natürlichen Potenz $$S\left[\frac{z^a}{a!}\right],$$

welches nur einer der unendlich vielen Werthe der allgemeinen Potenz

$$S\left[\frac{[z(1 \pm 2c\pi \cdot i)]^a}{a!}\right]$$

ist, also nur eindeutig ist.

Es sind alle Werthe von *log* a oder *log* $(p+q\cdot i)$, wenn $+\sqrt{p^2+q^2} = r$ gesetzt wird, und wenn φ den ersten positiven Bogen bedeutet, so daß

$$Cos\varphi = \frac{p}{r} \quad \text{und} \quad Sin\varphi = \frac{q}{r} \quad \text{ist,}$$

enthalten in der Gleichung

$$log\, a = log\,(p+q\cdot i) = Lr+(\pm 2a\pi+\varphi)\cdot i,$$

nach (§. 656. N. 12.).

Also ist

$$1)\ a^x = e^{x\cdot log\, a} = e^{(\alpha+\beta\cdot i)\,[Lr+(\pm 2a\pi+\varphi)i]},$$

oder, weil

$$(\alpha+\beta i)\cdot[Lr+(\pm 2a\pi+\varphi)\cdot i] = [\alpha\cdot Lr-\beta(\pm 2a\pi+\varphi)]+i\cdot[\beta\cdot Lr+\alpha(\pm 2a\pi+\varphi)]$$

ist, nach (§. 616.):

$$a^x = e^{\alpha\cdot Lr-\beta(\pm 2a\pi+\varphi)}\cdot e^{[\beta\cdot Lr+\alpha(\pm 2a\pi+\varphi)]\cdot i}.$$

Weil jedoch nach (§. 626.):

$$e^{z\cdot i} = Cosz + i\cdot Sinz \quad \text{ist,}$$

so folgt

$$2)\ a^x \text{ d. h. } (p+q\cdot i)^{\alpha+\beta\cdot i} = e^{\alpha\cdot Lr-\beta(\pm 2a\pi+\varphi)} \times \left(Cos[\beta\cdot Lr+\alpha(\pm 2a\pi+\varphi)]+i\cdot Sin[\beta\cdot Lr+\alpha(\pm 2a\pi+\varphi)]\right)$$

welches ein Ausdruck ist, in dem für a, 0 und alle ganzen Zahlen gesetzt werden müssen, der also unendlich viele Werthe liefert, die jedoch alle von der Form der allgemein-numerischen Zahlen sind.

§. 675. Zusatz.

Alle Werthe von a^y, wenn $a = p+q\cdot i$ ist und y unbestimmt gelassen werden soll, sind ferner ausgedrückt in

$$e^{y\cdot log(p+q\cdot i)}$$

d. h. in $e^{y\cdot[Lr+(\pm 2a\pi+\varphi)\cdot i]}$,

also in $e^{y\cdot Lr}\cdot e^{(\pm 2a\pi+\varphi)y\cdot i}$,

mithin in $e^{y\cdot Lr}\cdot[Cos(\pm 2a\pi+\varphi)y+i\cdot Sin(\pm 2a\pi+\varphi)y]$

so daß man also hat, als vollkommene Gleichung (d. h. als solche, welche links und rechts gleich viele und genau dieselben Werthe vorgestellt enthält),

1) $(p+q\cdot i)^y = e^{y\cdot Lr}\cdot[Cos(\pm 2a\pi+\varphi)y+i\cdot Sin(\pm 2a\pi+\varphi)y]$,

wo $r = +\sqrt{p^2+q^2}$, Lr den einzigen reelen Werth von $log\, r$, und φ den innerhalb der 4 ersten Quadranten liegenden positiven Bogen bedeutet, der gegeben ist durch die Gleichungen

$$Cos\ \varphi = \frac{p}{r} \quad \text{und} \quad Sin\ \varphi = \frac{q}{r},$$

und wo statt $e^{y\cdot Lr}$ die künstliche Potenz r^y gesetzt werden kann.

Setzt man hier $Cos\, x$ statt p und $Sin\, x$ statt q, so ist $r = 1$, $Lr = 0$, $Cos\, \varphi = Cos\, x$, $Sin\, \varphi = Sin\, x$, also

$$\varphi = x \mp 2b\pi;$$

und die Gleichung (1.) verwandelt sich in diese ebenfalls vollkommene Gleichung

2) $(Cos\, x+i\cdot Sin\, x)^y = Cos(\pm 2c\pi+x)y+i\cdot Sin(\pm 2c\pi+x)y$,

welcher Ausdruck rechts genan alle Werthe der Potenz zur Linken vorstellt. Diese Formel ist allgemeiner als die (N. 4. des §. 626.) und enthält letztere als einen besondern Fall in sich.

§. 676. Zusatz.

Denkt man sich im (§. 674.) α, β, p und q so genommen, daß der imaginäre Theil verschwindet, daß also

1) $Sin\,[\beta\cdot Lr+\alpha(\pm 2a\pi+\varphi)] = 0$,

mithin

2) $\beta\cdot Lr+\alpha(\pm 2a\pi+\varphi) = \pm c\pi$

wird, so hat man solche zusammengehörige Werthe von α, β, p und q, für welche die Werthe der Potenz

$$a^x \quad \text{d. h.} \quad (p+q\cdot i)^{\alpha+\beta\cdot i}$$

alle reel sind.

Beispiel. Sucht man z. B. alle Werthe von

$$i^i,$$

so hat man $p = \alpha = 0$, $q = \beta = 1$, $r = +\sqrt{p^2+q^2} = 1$, $Lr = 0$, $Cos\ \varphi = 0$, $Sin\ \varphi = 1$,

also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$;

folglich ist die Bedingung (2.) erfüllt; demnach sind alle Werthe von i^i reel und dem (§. 674.) zufolge

$$i^i = e^{-(\pm 2\delta+\frac{1}{2})\pi}$$

d. h. alle Werthe von i^i sind:

$$e^{-\frac{1}{2}\pi},\ e^{-\frac{5}{2}\pi},\ e^{-\frac{9}{2}\pi},\ e^{-\frac{13}{2}\pi},\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

und $$e^{\frac{3}{2}\pi},\ e^{\frac{7}{2}\pi},\ e^{\frac{11}{2}\pi},\ e^{\frac{15}{2}\pi},\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Dieselben Werthe findet man auch für $(-i)^{-i}$, wo $p = \alpha = 0$, $q = \beta = -1$, $r = 1$, $Cos\ \varphi = 0$, $Sin\ \varphi = -1$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ist. — Dagegen ergeben sich für i^{-i}, wo $p = \alpha = 0$, $q = 1$, $\beta = -1$, $r = 1$, $Cos\ \varphi = 0$, $Sin\ \varphi = 1$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ gefunden wird, so wie für $(-i)^i$, wo $p = \alpha = 0$, $q = -1$, $\beta = 1$, $Cos\ \varphi = 0$, $Sin\ \varphi = -1$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ ist, die durchaus reelen Werthe

$$\ldots,\ e^{-\frac{11}{2}\pi},\ e^{-\frac{7}{2}\pi},\ e^{-\frac{3}{2}\pi},\ e^{\frac{1}{2}\pi},\ e^{\frac{5}{2}\pi},\ e^{\frac{9}{2}\pi},\ e^{\frac{13}{2}\pi},\ \ldots$$

Anmerkung. Daß $i^i = (-i)^{-i}$, und $i^{-i} = (-i)^i$ ist, wie hier aus den gefundenen Werthen sich ergab, konnte man auch a priori wissen, in so ferne i jeden der beiden Werthe von $\sqrt{-1}$ repräsentirt, also durchaus $-i$ gesetzt werden kann wo i steht, wenn solches nur überall geschieht, in soferne i durchaus einen und denselben der beiden Werthe vorstellt.

Eben so könnte man die Werthe von i^{-i}, aus denen von i^i ableiten, wenn auch für allgemeine Potenzen noch die Formel $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$ wahr, also wenn $i^{-i} = \frac{1}{i^i}$ seyn sollte.

Und nicht weniger gäbe die Formel

$$(-i)^{-i} = \frac{1}{(-i)^i},$$

wenn sie für allgemeine Potenzen wahr und erwiesen wäre, aus den Werthen von $(-i)^i$ sogleich noch die von $(-i)^{-i}$. Und in der That findet man hieraus i^{-i} und $(-i)^{-i}$ genau so, wie sie die allgemeine Formel des (§. 674.) liefert.

§. 677. Lehrsatz.

Die unendlich vielen Werthe von a^x sind

1) alle einander gleich, so oft x eine Differenz ganzer Zahlen ist;

2) zum Theil einander gleich, so daß sie sich auf n wirklich von einander verschiedene zurückführen lassen, so oft $x = \pm\frac{m}{n}$ ein in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch ist;

3) zwar noch zum Theil einander gleich, und auf eine weit geringere, aber doch noch unendliche Anzahl wirklich von einander verschiedener Werthe zurückzuführen, so oft x (reel aber) irrational ist;

endlich

4) für x imaginär, alle von einander wirklich verschieden.

Beweis. Es ist für $a = p+q\cdot i$

$$1)\quad a^x = e^{x\cdot log(p+q\cdot i)} = e^{x\cdot[Lr+(\pm 2a\pi+\phi)i]},$$

wenn $r = +\sqrt{p^2+q^2}$, $Cos\,\varphi = \frac{p}{r}$ und $Sin\,\varphi = \frac{q}{r}$ ist. Folglich ist auch, da $e^{u+v+w} = e^u \cdot e^v \cdot e^w$ ist,

$$2)\quad a^x = e^{x\cdot Lr} \cdot e^{\phi x\cdot i} \cdot e^{\pm 2a\pi x\cdot i}.$$

Weil nun hier $e^{x \cdot Lr}$ und $e^{\varphi x \cdot i}$ offenbar nur eindeutig sind, da x und Lr und φ nur eindeutig genommen werden können, so hat a^x offenbar so viele Werthe als der dritte Faktor nämlich

$$e^{\pm 2a\pi x \cdot i} \text{ d. h. } Cos\,(\pm 2a\pi x) + i \cdot Sin\,(\pm 2a\pi x)$$

deren hat.

Es kömmt also darauf an, alle Werthe von

3) $Cos\,(\pm 2a\pi x) + i \cdot Sin\,(\pm 2a\pi x)$ oder $e^{\pm 2a\pi x \cdot i}$

für die einzelnen Werthe von x auszumitteln.

A) Ist nun x eine positive oder negative ganze Zahl oder 0, so ist $\pm 2ax$ Null oder eine positive oder negative gerade Zahl, also

$$Cos\,(\pm 2a\pi x) = 1 \quad \text{und} \quad Sin\,(\pm 2a\pi x) = 0.$$

Der Ausdruck (3.) und somit die Potenz a^x hat daher dasmal nur einen einzigen Werth, und solcher ist $= e^{x \cdot Lr} \cdot e^{\varphi x \cdot i}$

$= e^{xLr} \cdot [Cos\,(\varphi x) + i \cdot Sin\,(\varphi x)] = r^x \cdot [Cos\,(\varphi x) + i \cdot Sin\,(\varphi x)]$,

so daß man

4) $(p + q \cdot i)^m = r^m \cdot (Cos\,m\varphi + i \cdot Sin\,m\varphi)$

hat, so oft m eine Differenz ganzer Zahlen, $r = +\sqrt{p^2 + q^2}$, $Cos\,\varphi = \frac{p}{r}$ und $Sin\,\varphi = \frac{q}{r}$ ist, während φ innerhalb der 4 ersten Quadranten genommen werden muß.

B) Ist ferner $x = \frac{m}{n}$, und dabei n eine positive, m dagegen eine positive oder negative ganze Zahl, so ist

$$\pm 2a\pi x = \pm \frac{2am}{n}\pi.$$

Nun können aber alle Zahlen $\pm a$ auf die Form $\pm b\pi + n_1$ gebracht werden, wenn man nur unter n_1, die n Werthe 0, 1, 2, 3, ..., n—1, sich denkt, so daß

$$\pm \frac{2am}{n}\pi \quad \text{in} \quad \pm 2bm\pi + 2\frac{mn_1}{n}\pi,$$

also $Cos\,(\pm 2ax\pi)$ in $Cos\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right)$

und $Sin\,(\pm 2ax\pi)$ in $Sin\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right)$

übergeht. Und da der Bogen $2\frac{mn_1}{n}\pi$ nur die n Werthe hat, welche

aus $n_t = 0, 1, 2, 3 \cdots, n-1$ hervorgehen, so hat also nun der Ausdruck (3.), und daher die Potenz a^x höchstens n von einander wirklich verschiedener Werthe.

Um aber zu zeigen, daß diese n Werthe wirklich alle von einander verschieden sind, so oft $\frac{m}{n}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, denke man sich, daß für zwei verschiedene Werthe von n_1, etwa für $n_1 = c$ und $n_1 = d$, wo $c > d$ seyn maa, wo aber c und d und c—d nothwendig $< n$ seyn müssen, die zugehörigen Werthe von

$$Cos\,(2ax\pi) + i \cdot Sin\,(2ax\pi),$$

nämlich von

$$Cos\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right) + i \cdot Sin\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right)$$

einander gleich würden, so müßten nach (§. 325.)

$$Cos\left(2\frac{m \cdot c}{n}\pi\right) = Cos\left(2\frac{m \cdot d}{n}\pi\right)$$

und $$Sin\left(2\frac{m \cdot c}{n}\pi\right) = Sin\left(2\frac{m \cdot d}{n}\pi\right);$$

also auch nach (§. 627. II. IV. und §. 625. N. 1.), wenn man diese Bogen statt der dortigen x und y setzt:

$$Cos\,2\frac{m(c-d)}{n}\pi = 1 \quad \text{und} \quad Sin\,2\frac{m(c-d)}{n}\pi = 0$$

seyn. — Also ist $\frac{m(c-d)}{n}\pi$ nothwendig 0 oder $e\pi$ also $\frac{m(c-d)}{n}$ nothwendig 0 oder irgend eine ganze Zahl. Da nun $c-d < n$ und nicht 0 ist, so kann $\frac{m(c-d)}{n}$ nicht 0 seyn, und auch nicht eine ganze Zahl werden, so lange nicht m und n noch einen gemeinschaftlichen Theiler haben; ist also $\frac{m}{n}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt, so können keine zwei der vorhin erwähnten n Werthe von a^x, einander gleich werden, und sie sind demnach alle wirklich von einander verschieden.

C) Ist x eine irrationale Zahl, so muß sie als eine gebrochene Zahl gedacht werden von der Form $\frac{m}{n}$, wo aber m und n unendlich große und nie angebbare Zahlen sind. Also hat jetzt nach (B.) die Po-

tenz a^x noch immer n Werthe, allein n selbst ist dasmal eine unendlich große Zahl.

D) Ist endlich x imaginär und $= \alpha + \beta \cdot i$, so ist der Ausdruck (3).

$$= e^{\pm 2a\pi(\alpha+\beta i)\cdot i}$$

$$= e^{\mp 2a\pi\beta} \cdot e^{\pm 2a\pi\alpha \cdot i}$$

$$= e^{\mp 2a\pi\beta} \cdot [Cos\,(\pm 2a\pi\alpha) + i \cdot Sin\,(\pm 2a\pi\alpha)],$$

wo der erste Faktor $e^{\mp 2a\pi\beta}$ bereits unendlich viele Werthe hat, so daß jetzt keine der Werthe dieses Ausdrucks einander gleich werden können *).

Also sind nun, da x imaginär ist, alle Werthe von a^x wirklich von einander verschieden.

§. 678. Zusatz.

Aus diesem vorliegenden Beweis hat sich aber zugleich noch folgendes herausgestellt:

---

*) Wollte man glauben, daß für zwei Werthe von $\pm a$, nämlich für $\pm a = m$ und $\pm a = n$, (wo also m, so wie n, eine positive oder auch negative Zahl vorstellt oder Null) die zugehörigen Werthe

$e^{-2m\pi\beta} \cdot [Cos\,(2m\pi\alpha) + i \cdot Sin\,2m\pi\alpha]$ oder $e^{-2m\pi\beta} \cdot e^{2m\pi\alpha \cdot i}$

und $e^{-2n\pi\beta} \cdot [Cos\,(2n\pi\alpha) + i \cdot Sin\,2n\pi\alpha]$ oder $e^{-2n\pi\beta} \cdot e^{2n\pi\alpha \cdot i}$

einander gleich seyn könnten, so hätte man, beide Seiten dieser Gleichung mit $Cos\,(2n\pi\alpha) - i \cdot Sin\,(2n\pi\alpha)$ oder $e^{-2n\pi\alpha \cdot i}$ multiplizirend:

$$e^{-2m\pi\beta} \cdot [Cos\,2(m-n)\,\pi\alpha + i \cdot Sin\,2(m-n)\pi\alpha] = e^{-2n\pi\beta},$$

oder

$$e^{-2m\pi\beta} \cdot e^{2(m-n)\pi\alpha \cdot i} = e^{-2n\pi\beta},$$

also der imaginäre Theil zur Linken, $= 0$,

d. h. $Sin\,2(m-n)\pi\alpha = 0$, also $Cos\,2(m-n)\pi\alpha = +1$,

(deshalb $+1$ und nicht -1, weil $e^{m\pi\alpha}$, $e^{n\pi\alpha}$ nothwendig positiv sind), also $e^{-2m\pi\beta} = e^{-2n\pi\beta}$ d. h. $e^{2(m-n)\pi\beta} = 1$, mithin $m - n = 0$, d. h. $m = n$. — Folglich ist von den Werthen des Ausdrucks (3.), wenn $x = \alpha + \beta \cdot i$ und β nicht Null ist, keiner dem andern gleich.

1) Ist m eine positive oder negative ganze Zahl oder 0, so ist

I. $(p+q\cdot i)^m = r^m\cdot(Cos\, m\varphi + i\cdot Sin\, m\varphi)$,

wo $r=+\sqrt{p^2+q^2}$ und $Cos\,\varphi=\frac{p}{r}$ und $Sin\,\varphi=\frac{q}{r}$ ist.

Sind m und n positive ganze Zahlen, so ist, weil $e^{\frac{m}{n}\cdot Lr}=r^{\frac{m}{n}}$ ist, nach (§. 614.), unter $r^{\frac{m}{n}}$ die (§. 168.) definirte eindeutige reele Potenz oder die, in diesem speziellen Falle mit ihr identische künstliche Potenz verstanden:

II. $(p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}}=r^{\frac{m}{n}}\cdot\left[Cos\frac{m}{n}(2n_1\pi+\varphi)+i\cdot Sin\frac{m}{n}(2n_1\pi+\varphi)\right]$,

wo r und φ die eben angemerkten Bedeutungen haben, und wo statt n_1 nach und nach alle n Werthe 0, 1, 2, 3, 4, ... n—1, gesetzt werden, so daß der Ausdruck zur rechten genau die n Werthe liefert, welche die Potenz $(p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}}$ hat.

Dieselbe Formel gilt aber auch noch, wenn m eine negative ganze Zahl ist.

Wollte man in (II.) zur Rechten statt n_1 alle Werthe setzen, welche positive oder negative ganze Zahlen sind, so erhellet auf den ersten Blick, daß dann zur Rechten dieselben n Werthe nur immer wiederkehren würden. Je nachdem nämlich $\pm n+n_1$ oder $\pm 2n+n_1$ oder $\pm 3n+n_1$ u. s. w. statt n_1 gesetzt würde, würde der Bogen um $2m\pi$ oder $4m\pi$ oder $6m\pi$ u. s. w. vermehrt oder vermindert, und die Kosinus und Sinus blieben deshalb dieselben, wie wenn n_1 selbst stehen geblieben wäre.

Bedeutet n_2 die Differenz $n-n_1$, und setzt man $-n+n_1$ d. h. $-n_2$ statt n_1 in (II.), wodurch, wie wir eben gesehen haben, dieselben Werthe zur Rechten nur wiederkehren, so bekommt man noch

$$(p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}}=r^{\frac{m}{n}}\left[Cos\frac{m}{n}(-2n_2\pi+\varphi)+i\cdot Sin\frac{m}{n}(-2n_2\pi+\varphi)\right]$$

d. h., weil $Cos\frac{m}{n}(-2n_2\pi+\varphi) = Cos\frac{m}{n}(2n_2\pi-\varphi)$

und $Sin\frac{m}{n}(-2n_2\pi+\varphi) = -Sin\frac{m}{n}(2n_2\pi-\varphi)$

ist,

$$\text{III. } (p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\cdot\left[Cos\frac{m}{n}(2n_2\pi-\varphi)-i\cdot Sin\frac{m}{n}(2n_2\pi-\varphi)\right],$$

welcher Ausdruck zur Rechten dieselben n Werthe wie (II.) auch in derselben Ordnung gibt, wenn $n_2 = n-n_1$ genommen und n_1 nach und nach $0, 1, 2, 3\cdots n-1$ gesetzt wird; welcher Ausdruck demnach dieselben Werthe in umgekehrter Ordnung liefert, wenn statt n_2 nach und nach $1, 2, 3\cdots n-1$ statt n gesetzt wird. Und für $n_2 = n$ oder für $n_2 = 0$, erhält man noch jedesmal einen und denselben Werth.

Man kann daher aus (II.) die erste Hälfte der n Werthe und aus (III.) die andere Hälfte derselben n Werthe von $(p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}}$ in umgekehrter Ordnung entnehmen, wenn man in (II.) statt n_1 die Werthe $0, 1, 2, 3, \cdots$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder $\frac{1}{2}(n-2)$, und in (III.) statt n_2 nur die Werthe $1, 2, 3,$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder $\frac{1}{2}n$ setzt, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Und in diesem Sinne gibt die Formel

$$\text{IV. } (p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\cdot\left[Cos\frac{m}{n}(2n_1\pi\pm\varphi)\pm i\cdot Sin\frac{m}{n}(2n_1\pm\varphi)\right]$$

wiederum alle n Werthe von $(p+q\cdot i)^{\frac{m}{n}}$, wenn man in ihr zur Rechten statt n_1 bloß die Werthe $0, 1, 2, 3, \cdots$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}(n-2)$ setzt, dabei aber alle (+) Zeichen zugleich gelten läßt, dann auch alle (—) Zeichen zugleich nimmt, während $1\ 2, 3, \cdots$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder $\frac{1}{2}n$ statt n_1 gesetzt worden ist.

§. 679. Zusatz.

Um für den folgenden praktischen Gebrauch alle Werthe der Potenz a^x in dem Falle wo a positiv, und in dem andern Falle wo a negativ ist, sogleich hingeschrieben zu haben, mögen sie hier noch besonders stehen.

I. Ist a positiv, und überdies $x = \alpha + \beta \cdot i$, so ist, weil man nun, in (§. 674. N. 2.) $p = a$, $q = 0$, $r = a$, $\varphi = 0$ hat,

1) $$a^{\alpha+\beta\cdot i} = e^{\alpha\cdot La \mp 2a\beta\pi} \times [Cos(\beta\cdot La \pm 2a\alpha\pi) + i\cdot Sin(\beta\cdot La \pm 2a\alpha\pi)].$$

Ist nun zugleich $x = m - n$ eine positive oder negative ganze Zahl, also $\beta = 0$ und $\alpha = m - n$, so findet sich hieraus

2) $$a^{m-n} = e^{(m-n)\cdot La}$$

welches zu gleicher Zeit die künstliche Potenz ist, so wie auch die Differenz-Potenz.

Ist aber

$$x = \pm\frac{m}{n}, \quad \text{also} \quad \beta = 0, \alpha = \pm\frac{m}{n},$$

so findet sich, am bequemsten aus (§. 678. II. III. oder IV.), 0 statt φ setzend:

3) $$a^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\cdot La} \cdot \left[Cos\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right) + i\cdot Sin\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right)\right]$$

$$\text{oder} = e^{\frac{m}{n}\cdot La} \cdot \left[Cos\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right) - i\cdot Sin\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right)\right]$$

$$\text{oder} = e^{\frac{m}{n}\cdot La} \cdot \left[Cos\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right) \pm i\cdot Sin\left(2\frac{mn_1}{n}\pi\right)\right]$$

wenn man in den beiden erstern Ausdrücken statt n_1 alle n Werthe 0, 1, 2, 3, ... bis n—1 *), in dem letztern dagegen

---

*) Will man, daß der 2te Ausdruck die n Werthe, die der erste gibt, genau in umgekehrter Ordnung liefere, so muß man 1, 2, 3.... n statt n_1 setzen, obgleich für $n_1 = 0$ derselbe Werth sich ergibt als für $n_1 = n$, nur daß er jetzt der letzte wird, nach (§. 678.).

statt n_1 nur die Hälfte der Werthe 0,1,2,3, bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}(n-2)$ setzt, und das + Zeichen nimmt; dann aber auch, während n_1 die Werthe 1,2,3,... bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}n$ hat, noch das — Zeichen gelten läßt; wo ferner statt $e^{\frac{m}{n}\cdot La}$ auch $a^{\frac{m}{n}}$ gesetzt werden könnte, wenn man nicht Gefahr liefe, diese eindeutige künstliche und auch reele Potenz $a^{\frac{m}{n}}$, mit der zur Linken stehenden allgemeinen und n deutigen Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ zu verwechseln, in so ferne sich beide in der Bezeichnung nicht von einander unterscheiden; wo endlich statt m auch —m gesetzt werden kann, wenn man $a^{-\frac{m}{n}}$ ausgedrückt haben will.

Und diese n Werthe von $a^{\frac{m}{n}}$ sind alle wirklich von einander verschieden, so oft $\frac{m}{n}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist.

II. Ist $p+q\cdot i$ negativ, etwa $= -a$, und $x = \alpha+\beta\cdot i$, so ist $q = 0$, $p = -a$, $r = +a$, $Cos\,\varphi = -1$, $Sin\,\varphi = 0$, also $\varphi = \pi$, und es wird aus (§. 674. N. 2.)

1) $$(-a)^{\alpha+\beta\cdot i} = e^{\alpha\cdot La \mp (2\mathfrak{a}+1)\beta\pi} \times$$
$$\times\,[Cos(\beta\cdot La \pm (2\mathfrak{a}+1)\alpha\pi) + i\cdot Sin(\beta\cdot La \pm (2\mathfrak{a}+1)\alpha\pi)]$$

Ist nun hier noch x, entweder 0 oder eine positive oder negative ganze Zahl, $= m-n$, so hat man $\beta = 0$, $\alpha = m-n$, also

2) $$(-a)^{m-n} = e^{(m-n)\cdot La}\cdot Cos\,(m-n)\pi$$
$$\text{oder} \quad = (-1)^{m-n}\cdot a^{m-n},$$

in so ferne $Cos\,(m-n)\,\pi = \pm 1 = (-1)^{m-n}$ und $e^{(m-n)La} = a^{m-n}$ ist, unter a^{m-n} die eindeutige reele, künstliche, oder Differenz-Potenz verstanden.

Ist dagegen

$$x = \pm\frac{m}{n}, \quad \text{also} \quad \beta = 0, \alpha = \pm\frac{m}{n},$$

so hat man, am bequemsten aus (§. 678. II. III. oder IV.), π statt φ setzend,

$$3)\ (-a)^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\cdot La}\cdot\left[Cos\frac{m}{n}(2n_1+1)\pi + i\cdot Sin\frac{m}{n}(2n_1+1)\pi\right]$$

$$\text{oder} = e^{\frac{m}{n}\cdot La}\cdot\left[Cos\frac{m}{n}(2n_1-1)\pi - i\cdot Sin\frac{m}{n}(2n_1-1)\pi\right]^{*})$$

$$\text{oder} = e^{\frac{m}{n}\cdot La}\cdot\left[Cos\frac{m}{n}(2n_1+1)\pi \pm i\cdot Sin\frac{m}{n}(2n_1+1)\pi\right],$$

wenn man in den beiden erstern Ausdrücken statt n_1 alle n Werthe $0,1,2,3\cdots$ bis $n-1$, in dem letztern dagegen statt n_1 nur die Hälfte dieser Werthe $0,1,2,\cdots$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}(n-2)$ setzt, aber die $(+)$ Zeichen zugleich, und auch noch die $(-)$ Zeichen zugleich gelten läßt bei dem $-$ Zeichen aber, wenn n ungerade ist, $\frac{1}{2}(n-3)$ als den letzten Werth von n_1 nimmt; — welche Formeln auch noch richtig bleiben, wenn m (also auch $\frac{m}{n}$) eine negative Zahl ist

---

*) Man kann hier auch n_1+1 statt n_1 setzen, in so ferne dann dieselben Werthe, aus dem sich so umändernden Ausdruck

$$Cos\frac{m}{n}(2n_1+1)\pi - i\cdot Sin\frac{m}{n}(2n_1+1)\pi$$

ergeben, wenn man $0,1,2,3,\cdots n-1$ statt n_1 setzt, als sich aus

$$Cos\frac{m}{n}(2n_1-1)\pi - i\cdot Sin\frac{m}{n}(2n_1-1)\pi$$

für $n_1 = 1,2,3,\cdots n$ ergeben haben.

Endlich ist $a^{\frac{m}{n}}$ statt $e^{\frac{m}{n}\cdot La}$ zu setzen, wenn man dieses letztere eindeutige $a^{\frac{m}{n}}$ (diese künstliche und reele Potenz) nicht mit der allgemeinen und n deutigen Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ verwechseln will.

Anmerkung. Nachdem wir in dem bisherigen nächst der Definition der allgemeinen Potenz, alle ihre Werthe, im Allgemeinen, und in besonderen Fällen, hingestellt, und deshalb die allgemeine Potenz als ein unendlich-vieldeutiges Zeichen erkannt haben, welches jedoch in einzelnen Fällen nur eindeutig oder nur n deutig werden kann, — nachdem daraus schon im Allgemeinen für das Operiren mit solchen allgemeinen Potenzen dieselbe Vorsicht verlangt werden muß, welche für alle vieldeutigen Zeichen nöthig wird, so wollen wir nun zunächst die Gesetze näher feststellen, nach welchen mit solchen allgemeinen Potenzen operirt werden kann.

§. 680. Aufgabe.

Man soll untersuchen ob, und in welchem Sinne, für allgemeine Potenzen noch immer die Sätze

$$1) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$
$$2) \quad a^x : a^y = a^{x-y},$$
$$3) \quad a^x \cdot b^x = (ab)^x,$$
$$4) \quad a^x : b^x = (a:b)^x,$$
$$5) \quad (a^x)^y = a^{xy},$$

statt finden.

Auflösung von 1. Es ist nach der Definition

$$a^x = e^{x \cdot log\, a} \quad \text{und} \quad a^y = e^{y \cdot log\, a}.$$

Das Produckt $a^x \cdot a^y$ enthält also die Werthe von $e^{x \cdot log\, a} \cdot e^{y \cdot log\, a}$, also auch alle die Werthe von $e^{x \cdot log\, a + y \cdot log\, a}$. — Weil aber statt $x \cdot log\, a + y \cdot log\, a$ nur dann $(x+y) \cdot log\, a$ gesetzt werden darf, wenn $log\, a$ in jedem der beiden Summanden allemal einen und denselben seiner Werthe vorstellt, so wird

$e^{(x+y)\cdot log\,a}$ oder a^{x+y}, von allen Werthen des Products $a^x \cdot a^y$ nur gerade diejenigen enthalten, die hervorgehen, wenn die, zu einem und demselben Werth von *log* a gehörigen Werthe von a^x und a^y mit einander multiplizirt werden.

Sondert man daher die zu den verschiedenen Werthen von *log* a gehörigen Werthe von a^x in der Bezeichnung bereits von einander ab, so daß z. B. $(a\|\|\alpha)^x$ den Werth von a^x für den Werth α von *log* a, d. h. den Werth $e^{x\alpha}$ vorstellt, so kann die Formel (I.) so geschrieben werden.

$$\text{I.}\quad (a\|\|\alpha)^x \cdot (a\|\|\alpha)^y = (a\|\|\alpha)^{x+y}.$$

Wird daher die Formel

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

in diesem Sinne genommen und angewandt, so ist sie noch für allgemeine Potenzen gültig.

Auflösung von (2.) Da

$$a^{x-y} \cdot a^y = a^{x-y}$$

nur dann statt findet, wenn die Werthe der 3 Potenzen für einen und denselben Werth des *log* a genommen werden, so bleibt die Formel

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

noch richtig, wenn sie in dem Sinne

$$\text{II.}\quad (a\|\|\alpha)^x : (a\|\|\alpha)^y = (a\|\|\alpha)^{x-y}$$

genommen und angewandt wird.

Auflösung von (3.) Es ist

$$a^x = e^{x\cdot log\,a} \quad \text{und} \quad b^x = e^{x\cdot log\,b},$$

also $$a^x \cdot b^x = e^{x\cdot log\,a} \cdot e^{x\cdot log\,b} = e^{x(log\,a + log\,b)}.$$

Weil aber

$$log\,a + log\,b = log\,(ab)$$

in dem Sinne wahr ist, daß für *log* a und *log* b beliebige α und β ihrer Werthe, für *log* (ab) dagegen zu gleicher Zeit der

Werth $\alpha+\beta$ gesetzt wird, der sich unter allen seinen Werthen vorfinden muß, so folgt, daß die Gleichung

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x,$$

richtig ist und bleibt, so oft sie in dem Sinne

$$\text{III.}\quad (a\|\alpha)^x \cdot (b\|\beta)^x = (ab\|\alpha+\beta)^x$$

genommen und angewendet wird.

Auflösung von (4.). Die Gleichung

$$a^x : b^x = (a:b)^x$$

ist und bleibt nun augenfällig richtig, so oft sie in dem Sinne

$$\text{IV.}\quad (a\|\alpha)^x : (b\|\beta)^x = (\tfrac{a}{b}\|\alpha-\beta)^x$$

aufgefaßt und verbraucht wird.

Auflösung von (5.). Es ist

$$a^{xy} = e^{xy \cdot log\, a} \quad \text{und} \quad (a^x)^y = e^{y \cdot log\,(a^x)}$$

Da nun

$$log\,(a^x) = x \cdot log\, a$$

in dem Sinne richtig ist, daß für $log\, a$ irgend einer seiner Werthe z. B. a, für $log\,(a^x)$ dagegen zu gleicher Zeit der bestimmte Werth $x \cdot \alpha$ gesetzt wird, der sich übrigens unter seinen Werthen mit befinden muß, so hat man noch immer

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

sobald diese Gleichung nur in dem Sinne

$$\text{V.}\quad (a^x\|x\alpha)^y = (a\|\alpha)^{xy}$$

genommen wird.

§. 681. Zusatz.

Aus diesen Untersuchungen gehet aber zu gleicher Zeit noch hervor:

1) Die Formeln (1. und 2.) des (§. 680.) nämlich

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

und

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

sind im Allgemeinen unvollkommene Gleichungen, welche auf der linken Seite viel, viel mehr Werthe haben, als auf der rechten, obgleich alle unendlich vielen Werthe der rechten Seite unter den unendlich mal unendlich vielen Werthen der linken vorkommen.

2) Die Gleichungen (3 — 5. des §. 680.), nämlich

$$a^x \cdot b^y = (ab)^x,$$
$$a^x : b^x = (a:b)^x,$$
und $$(a^x)^y = a^{xy}$$

sind dagegen vollkommene Gleichungen, welche links zwar der Form nach ebenfalls unendlich mal unendlich viele Werthe enthalten, dagegen dem Wesen nach nicht mehr und nicht weniger als auf der rechten Seite, in so ferne dieselben auf der linken Seite sich unendlich oft wiederholen.

3) Weil namentlich alle Werthe von *log* (ab) bereits erhalten werden, wenn man einen einzigen α der Werthe von *log* a, zu allen Werthen von *log* b addirt, nach (§. 656. N. 12.), so erhält man die ebenfalls vollkommene Gleichung

$$(ab)^x = (a\|\alpha)^x \cdot b^x$$
oder $$(ab)^x = e^{\alpha x} \cdot b^x$$

in welcher links und rechts gleich viele Werthe stehen und auch dieselben.

4) Also ist namentlich auch, weil $a = a \cdot 1$ und $(-a) = a \cdot (-1)$ ist,

$$a^x = (a\|\alpha)^x \cdot 1^x = e^{\alpha x} \cdot 1^x$$
und $$(-a)^x = (a\|\alpha)^x \cdot (-1)^x = e^{\alpha x} \cdot (-1)^x;$$

d. h. man erhält alle Werthe von a^x wenn man einen derselben $(a\|\alpha)^x$ oder $e^{\alpha x}$ (unter α irgend einen der Werthe von *log* a verstanden) mit allen Werthen von 1^x multiplizirt; und man erhält alle Werthe von $(-a)^x$ wenn man einen einzigen Werth von a^x mit allen Werthen von $(-1)^x$ multiplizirt.

Dies gilt wenn a und x ganz allgemein sind, und findet sich in den Formeln des (§. 679.) bereits bestätigt, indem dort allemal der positive Werth der Potenz $a^{\frac{m}{n}}$ mit allen Werthen von $1^{\frac{m}{n}}$ oder von $(-1)^{\frac{m}{n}}$ multiplizirt erscheint.

5) Im Allgemeinen, wo die Potenz unter allen Werthen allemal einen einzigen bestimmten vorstellt, kann man sich der Formeln (§. 680. N. N. 1 — 5.) ohne Weiteres bedienen, wenn man nur, indem man die Seiten jener Gleichungen für einander setzt, für die einzelnen allgemeinen Potenzen nicht bestimmte ihrer Werthe setzt, und dieselbe Potenz nicht so behandelt, als wenn sie, so oft sie vorkommt, jedesmal einen und denselben Ausdruck repräsentirte, ohne in beiden Fällen vorher genau und sorgfältig untersucht zu haben, daß das eine oder das andere hier, in dem besonderen Falle, wirklich erlaubt sey.

§. 682. Zusatz.

Setzt man in (§. 680. N. 5.) $\frac{1}{n}$ statt x und n statt y, so gibt sie

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a.$$

Also ist jeder der n Werthe von $a^{\frac{1}{n}}$ so, daß er mit n potenzirt, a gibt; folglich sind die n Werthe von $a^{\frac{1}{n}}$, von den n Werthen der $\sqrt[n]{a}$ nicht verschieden; sondern man hat als vollkommene Gleichung

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Wenn daher in den (§§. 674. 675. 678 und 679.) alle Werthe von jeder Potenz a^x, also auch alle Werthe der Po-

tenz $a^{\frac{1}{n}}$ hingestellt sind, so sieht man darin zu gleicher Zeit auch alle Werthe der $\sqrt[n]{a}$ entwickelt.

§. 683. Zusatz.

Man hat auf diese Weise als vollkommene Gleichungen

$$1)\ 1^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1} = Cos\frac{2n_1\pi}{n} \pm i \cdot Sin\frac{2n_1\pi}{n},$$

wenn $0,1,2,3,\cdots$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}(n-2)$ statt n_1 gesetzt und das $(+)$ Zeichen genommen wird, zugleich aber auch das $(-)$ Zeichen, wenn n_1 die Werthe $1,2,3,\cdots$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}n$ hat, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist;

$$2)\ (-1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{-1} = Cos\frac{(2n_1+1)\pi}{n} \pm i \cdot Sin\frac{(2n_1+1)\pi}{n},^{*})$$

wenn man statt n_1, $0,1,2,3,$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}(n-2)$ setzt, und jedesmal das $(+)$ Zeichen, und dann auch das $(-)$ Zeichen, bei dem $(-)$ Zeichen aber,

---

*) Eigentlich bekommt man

$$(-1)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{-1} = Cos\frac{(2n_1\pm1)\pi}{n} \pm i \cdot Sin\frac{(2n_1\pm1)\pi}{n},$$

wo statt n_1, wenn die $(-)$ Zeichen alle genommen werden, $1,2,3,4,\cdots$ bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}n$ gesetzt werden muß. Setzt man nun n_0+1 statt n, so kann man $0,1,2,3,$ bis $\frac{1}{2}(n-3)$ oder bis $\frac{1}{2}(n-2)$ statt n_0 setzen, während $2n_1-1$ in $2(n_0+1)-1$ d. h. in $2n_0+1$ übergeht. Und da nachher, wo n_0 steht, auch wieder n_1 gesetzt werden kann, wenn man nur unter n_1 dann dasselbe sich denkt, was unter n_0 so eben gedacht werden mußte, d. h. alle Werthe $0,1,2,3,\cdots$ bis $\frac{1}{2}(n-2)$, so bekommt man die oben stehende Formel (2.), und natürlich dann auch die obige Formel (4.)

wenn n ungerade ist, $\frac{1}{2}(n-3)$ als den letzten Werth von n_1 nimmt;

$$3)\quad (+a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(+a)} = e^{\frac{1}{n}\cdot La}\cdot\left[Cos\,\frac{2n_1\pi}{n} \pm i\cdot Sin\frac{2n_1\pi}{n}\right]$$

wo n_1 wie in (1.) genommen wird;

$$4)\quad (-a)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(-a)} = e^{\frac{1}{n}\cdot La}\cdot\left[Cos\,\frac{(2n_1+1)\pi}{n} \pm i\cdot Sin\frac{(2n_1+1)\pi}{n}\right],$$

wo n_1 wie in (2.) zu nehmen ist; wo ferner in (3. und 4.) statt $e^{\frac{1}{n}\cdot La}$ die absolute Wurzel $\sqrt[n]{a}$ (die jedesmal eindeutig und absolut (positiv) ist) also der positive Werth von der allgemeinen $n$ten Wurzel ($\sqrt[n]{a}$) gesetzt werden kann.

Endlich ist

$$5)\quad (p+q\cdot i)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{p+q\cdot i} = e^{\frac{1}{n}\cdot Lr}\cdot\left[Cos\,\frac{2n_1\pi\pm\varphi}{n} \pm i\cdot Sin\frac{2n_1\pi\pm\varphi}{n}\right],$$

wo $r = +\sqrt{p^2+q^2}$, $Cos\,\varphi = \frac{p}{r}$, $Sin\,\varphi = \frac{q}{r}$,

φ selbst innerhalb der 4 ersten Quadranten genommen werden muß, und wo

$$e^{\frac{1}{n}\cdot Lr} = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}$$

die absolute Wurzel oder die reele Potenz $r^{\frac{1}{n}}$ vorstellt.

Und setzt man, wie (§. 675.) bereits geschehen ist, $p = Cos\,x$ und $q = Sin\,x$, so wird $r = 1$, $Lr = 0$, $\varphi = x$, wenn x selbst innerhalb der 4 ersten Quadranten liegend gedacht wird, — und die Gleichung (5.) wird

$$6)\quad \sqrt[n]{Cos\,x+i\cdot Sin\,x} = Cos\frac{2n_1\pi\pm x}{n}\pm i\cdot Sin\frac{2n_1\pi\pm x}{n}$$

so wie, wenn man links und rechts mit der positiven oder negativen ganzen Zahl **m** potenzirt

$$7)\quad (Cos\,x+i\cdot Sin\,x)^{\frac{m}{n}} = Cos\frac{(2n_1\pi\pm x)m}{n}\pm i\cdot Sin\frac{(2n_1\pi\pm x)m}{n},$$

wo in den Gleichungen (5.—7.) der Ausdruck rechts alle **n** Werthe des Ausdrucks zur Linken liefert, entweder wenn man bloß die obern (+) Zeichen allein gelten läßt, oder wenn man die bloßen untern (—) Zeichen allein gelten läßt, in jedem Falle aber statt n_1 nach und nach 0,1,2,3,... bis **n**—1 setzt; oder endlich, wenn man die obern (+) Zeichen auf einmal und zugleich auch die untern (—) Zeichen auf einmal gelten läßt, dagegen statt n_1 bloß die Hälfte der Werthe 0,1,2,3, bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}(n-2)$ schreibt, so lange die (+) Zeichen genommen werden, aber wenn die (—) Zeichen zu nehmen sind, die Werthe 1,2,3,... bis $\frac{1}{2}(n-1)$ oder bis $\frac{1}{2}n$ setzt, je nachdem **n** eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Und in allen diesen Gleichungen kann man durchaus —i setzen, wo i steht, wenn dies nur überall geschieht, wo solches in der Gleichung vorkommt, so daß man durch die bloße Substitution von —i statt i, zugleich auch die Werthe der Potenzen $(p-q\cdot i)^x$ und $(Cos\varphi-i\cdot Sin\varphi)^x$ ausgedrückt hat.

Anmerkung. Wenn aber bereits im (XXII. Kap.) durch Auflösung der höhern Gleichungen, die Werthe von $\sqrt[n]{1}$ und $\sqrt[n]{-1}$ für die ersten 10 Werthe von n gefunden werden konnten, so ist hier doch erst die Aufgabe im Allgemeinen gelößt, für jeden Werth von n.

Für n=3 ergiebt sich z. B. aus (§. 682. N. N. 1.2.)

$$\sqrt[3]{1} = Cos\frac{2n_1\pi}{3}\pm i\cdot Sin\frac{2n_1\pi}{3};$$

$$\sqrt[3]{-1} = Cos\frac{(2n_1+1)\pi}{3}\pm i\cdot Sin\frac{(2n_1+1)\pi}{3};$$

so daß die 3 Werthe von $\sqrt[3]{1}$ werden

$$Cos\ 0 + i \cdot Sin\ 0 \quad \text{d. h.} \quad 1;$$
$$Cos\ \tfrac{2}{3}\pi \pm i \cdot Sin\ \tfrac{2}{3}\pi \quad \text{d. h.} \quad -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i \cdot \sqrt{3};$$

und die 3 Werthe von $\sqrt[3]{-1}$

$$Cos\ \tfrac{1}{3}\pi \pm i \cdot Sin\ \tfrac{1}{3}\pi \quad \text{d. h.} \quad \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} i \cdot \sqrt{3}$$
$$Cos\ \pi + i \cdot Sin\ \pi \quad \text{d. h.} \quad -1,$$

in so ferne $Cos\ \tfrac{2}{3}\pi = -Cos\ \tfrac{1}{3}\pi = -\tfrac{1}{2}$

$Sin\ \tfrac{2}{3}\pi = Sin\ \tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ ist.

Auf demselben Wege findet man ferner z. B.

$$\sqrt[5]{1} = Cos\ \frac{2n_1\pi}{5} \pm i \cdot Sin\ \frac{2n_1\pi}{5};$$

also alle 5 Werthe

$$Cos\ 0 + i \cdot Sin\ 0, \quad \text{d. h.} \quad 1,$$
$$Cos\ \tfrac{2}{5}\pi \pm i \cdot Sin\ \tfrac{2}{5}\pi;$$
$$Cos\ \tfrac{4}{5}\pi \pm i \cdot Sin\ \tfrac{4}{5}\pi;$$

während $Cos\ \tfrac{4}{5}\pi = -Cos\ \tfrac{1}{5}\pi$ und $Sin\ \tfrac{4}{5}\pi = Sin\ \tfrac{1}{5}\pi$ ist.

Und die 5 Werthe von $\sqrt[5]{-1}$ stecken in der Formel

$$\sqrt[5]{-1} = Cos\ \frac{2n_1+1}{5}\pi \pm i \cdot Sin\ \frac{2n_1+1}{5}\pi,$$

und sind daher

$$Cos\ \tfrac{1}{5}\pi \pm i \cdot Sin\ \tfrac{1}{5}\pi;$$
$$Cos\ \tfrac{3}{5}\pi \pm i \cdot Sin\ \tfrac{3}{5}\pi;$$
$$Cos\ \pi + i \cdot Sin\ \pi \quad \text{d. h.} \quad -1. \ *)$$

§. 684. Aufgabe.

Man soll untersuchen, ob und in welchem Sinne der, früher für Differenz-Potenzen und für reele Potenzen erwiesene binomische Lehrsatz, auch noch für die jetzigen allgemeinen Potenzen gelten könne.

Auflösung. Da alle Werthe von $(1+x)^z$ in $e^{z \cdot log\,(1+x)}$ enthalten sind, so darf man nur statt $log\ (1+x)$ die Reihe

$$S\left[(-1)^a \cdot \frac{x^{a+1}}{a+1}\right] \quad \text{d. h.} \quad x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots$$

---

*) In Graden ausgedrückt ist $\pi = 180°$, $\tfrac{1}{5}\pi = 36°$, $\tfrac{2}{5}\pi = 72°$ und dabey noch

$$Cos\ \tfrac{3}{5}\pi = -Cos\ \tfrac{2}{5}\pi,$$
$$Sin\ \tfrac{2}{5}\pi = \quad Sin\ \tfrac{3}{5}\pi.$$

setzen (diese Reihe mag hier durch f(x) bezeichnet seyn), und dann

$e^{z \cdot f(x)}$ d. h. $S\left[\frac{z^a \cdot [f(x)]^a}{a!}\right]$ d. h. $1 + z \cdot f(x) + \frac{z^2 \cdot [f(x)]^2}{2!} + \cdots$

gehörig nach x ordnen, und man wird einen der Werthe von $(1+x)^z$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandelt haben; und zwar ergeben sich sogleich die 2 ersten Glieder dieser nach x geordneten Reihe, $= 1 + z \cdot x$, während alle übrigen Glieder die höhern Potenzen von x enthalten.

Ist aber auf diese Weise die Existenz einer nach Potenzen von x fortlaufenden Reihe gesichert, welche einem der Werthe von $(1+x)^z$ gleich seyn muß, so setze man

$$1)\ (1+x)^z = S[P_a \cdot x^a],$$

wo $P_0 = 1$, $P_1 = z$, ist, wo aber $P_2, P_3, P_4, \ldots$ überhaupt P_a noch unbestimmte und zu suchende Koeffizienten sind. — Setzt man nun hier y statt x, so erhält man

$$2)\ (1+y)^z = S[P_a \cdot y^a],$$

folglich, wenn man multiplizirt (1.) mit (2.), weil

$(1+x)^z \cdot (1+y)^z = [(1+x)(1+y)]^z = [1+(x+y+xy)]^z$ ist,

$$3)\ [1+(x+y+xy)]^z = S[P_a \cdot P_b \cdot x^a \cdot y^b].$$

Wird dagegen in (1.) $x+y+xy$ statt x gesetzt, so findet sich noch

$$4)\ [1+(x+y+xy)]^z = S[P_b \cdot (x+y+xy)^b],$$

so daß aus (3.) und (4.):

$$5)\ S[P_a \cdot P_b \cdot x^a \cdot y^b] = S[P_b \cdot (x+y+xy)^b]$$

hervorgeht. — Nun ist aber nach dem trinomischen Lehrsatze (§. §. 404. 405.) für ganze Exponenten

$$(x+y+xy)^b = S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!} \cdot x^a \cdot y^b \cdot (xy)^c\right]_{a+b+c=b}$$

$$= S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!} \cdot x^{a+c} \cdot y^{b+c}\right]_{a+b+c=b};$$

folglich, wenn man diese Reihe statt $(x+y+xy)^b$ in (5.) substituirt, und wenn $a+b+c$ statt b gesetzt wird:

$$6)\ S[P_a \cdot P_b \cdot x^a \cdot y^b] = S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!} P_{a+b+c} \cdot x^{a+c} \cdot y^{b+c}\right].$$

Und weil hier links und rechts die Koeffizienten von y einander gleich seyn müssen, so folgt, wenn links 1 statt b, rechts aber $b+c=1$ gesetzt wird:

$$7)\ S[P_a \cdot P_1 \cdot x^a] = S_{b+c=1}[(a+1) \cdot P_{a+1} \cdot x^{a+c}].$$

Und da nun hier links und rechts wiederum die Koeffizienten von x einzeln einander gleich seyn müssen, also namentlich auch der Koeffizient von x^n, so folgt hieraus noch

$$8)\ P_n \cdot P_1 = S_{a+c=n,\ b+c=1}[(a+1) P_{a+1}].$$

Und da die Gleichung $b+c=1$, bloß $c=0$, $a=n$ oder $c=1$, $a=n-1$ zuläßt, so folgt ferner

$$9)\ P_n \cdot P_1 = (n+1) \cdot P_{n+1} + n \cdot P_n,$$

wo $P_1 = z$ ist, so daß diese Gleichung noch in

$$10)\ (z-n) \cdot P_n = (n+1) \cdot P_{n+1}$$ übergeht.

Wird nun hier nach und nach 0, 1, 2, 3, $\cdots a-1$ statt n gesetzt, so ergiebt sich

$$z \cdot P_0 = 1 \cdot P_1$$
$$(z-1) \cdot P_1 = 2 \cdot P_2$$
$$(z-2) \cdot P_2 = 3 \cdot P_3$$
$$(z-3) \cdot P_3 = 4 \cdot P_4$$

u. s. w. f.; zuletzt

$$[z-(a-1)] \cdot P_{a-1} = a \cdot P_a.$$

Folglich, wenn man alle diese Gleichungen mit einander multiplizirt, und links und rechts mit den gemeinschaftlichen Faktoren wegdividirt, auch 1 statt P_0 setzt:

$$z^{a|-1} = a! P_a;$$

also

$$P_a = \frac{z^{a|-1}}{a!};$$

d. h. der unbestimmte Koeffizient P_a ist jetzt bestimmt und als derjenige Ausdruck gefunden worden, welchen wir (§. 350.) mit z_a bezeichnet haben, und welcher unter dem Namen des Binomial-Koeffizienten bekannt zu seyn pflegt.

Also hat man

$$11)\ (1+x)^z = S[z_a \cdot x^a] = S\left[\frac{z^{a|-1}}{a!} \cdot x^a\right],$$

wo der Ausdruck zur Rechten jedoch nur einen Werth von $(1+x)^z$ repräsentirt, aus welchem aber alle Werthe hervorgehen, wenn man ihn noch mit allen Werthen von 1^z multiplizirt.

Ist aber

$$(1+x)^z = S[z_a \cdot x^a],$$

so multiplizire man links und rechts mit a^z, so erhält man

$$(a+ax)^z = S[z_a \cdot a^z x^a];$$

und wenn man $ax = b$, also $x = \frac{b}{a}$ setzt,

$$12)\ (a+b)^z = S[z_a \cdot a^{z-a} \cdot b^a],$$

welcher Ausdruck zur Rechten jedoch noch mit allen Werthen von 1^z multiplizirt werden muß, wenn man alle Reihen haben will, welche der allgemeinen Potenz $(1+x)^z$ entsprechen.

Also findet der binomische Lehrsatz, mit dieser letztern Beschränkung, auch noch für allgemeine Potenzen statt, und zwar so, wie er in den hiesigen Formeln (N. N. 11 und 12.) ausgedrückt sich findet, so daß der Ausdruck zur Rechten eine unendliche Reihe ist.

§. 685. Zusatz.

Ganz auf dieselbe Weise wie solches (§§. 404—407.) geschehen ist, leitet man nun aus diesem allgemeinen binomischen Lehrsatze, den trinomischen, ꝛc. ꝛc. ꝛc., und zuletzt den polynomischen Lehrsatz für allgemeine Potenzen ab, nämlich

$$\text{I.}\quad (a+b)^z = S\left[\frac{z^{b|-1}}{b!} \cdot a^{z-b} \cdot b^b\right]$$

$$\text{II.}\quad (a+b+c)^z = S\left[\frac{z^{b+c|-1}}{b!c!} \cdot a^{z-b-c} \cdot b^b \cdot c^c\right]$$

$$\text{III.}\quad (a+b+c+d)^z = S\left[\frac{z^{b+c+b|-1}}{b!c!d!} \cdot a^{z-b-c-b} \cdot b^b \cdot c^c \cdot d^b\right].$$

§. 686. Zusatz.

Und daraus findet sich zuletzt ganz allgemein für jedes z:

$$(a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+\cdots \text{ in inf.})^z$$

$$=S\left[A\cdot a_0^{z-a_1-a_2-a_3-\cdots-a_n}\cdot(a_1)^{a_1}\cdot(a_2)^{a_2}\cdot(a_3)^{a_3}\cdots(a_n)^{a_n}\times x^n\right]$$

$$a_1+2\cdot a_2+3\cdot a_3+\cdots+n\cdot a_n=n$$

wo A statt $\frac{z^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n|-1}}{(a_1)!(a_2)!(a_3)!\cdots(a_n)!}$ gesetzt worden ist; wie aus der Betrachtung und Ableitung derselben Formel, für den Fall daß z eine positive ganze Zahl ist, in den (§§. 572—576.), sogleich hervorgeht.

Dieser Satz ist aber der polynomische Lehrsatz in seiner allgemeinsten Gestalt. — Er liefert jedoch zur Rechten, im Falle auch die Reihe konvergent, also brauchbar seyn sollte, doch jedesmal nur einen einzigen Werth der Potenz zur Linken, welcher noch mit allen Werthen von 1^z multiplizirt werden muß, wenn man alle Werthe der Potenz zur Linken selbst haben will.

§. 687. Erklärung.

Mit dem Begriff der allgeinen Potenz ist aber wieder der Begriff des allgemeinen Logarithmen b?a gegeben, wenn man darunter jeden Ausdruck x versteht, der so ist, daß man $a^x=b$ oder $e^{x.\,log\,a}=b$ hat. Nur darf nicht übersehen werden, daß eben weil b und a ganz allgemein vorausgesetzt sind, keiner der unendlich vielen Werthe von a^x vor dem andern sich absondert, also daß b?a ganz unbestimmt ist, so lange nicht ausdrücklich noch hinzugefügt wird, für welchen der Werthe von *log* a die Potenz a^x d. h. $e^{x\cdot log\,a}$ genommen werden soll.

Eine spezielle Form des allgemeinen Logarithmen, welche durch

$$b?(a\|\alpha)$$

bezeichnet werden kann, ist es also, wenn man alle Ausdrücke x

versteht, welche so sind, daß der spezielle Werth von a^x, der für den Werth α von *log* a sich ergibt, nämlich

$$(a\|\|\alpha)^x \text{ oder } e^{x\alpha} \text{ dem b gleich wird,}$$

unter α einen bestimmten der Werthe von *log* a verstanden.

§. 688. Zusatz.

Ist a positiv, so ist eine der speziellen Formen von b?a, nämlich b?(a||*L*a) zu gleicher Zeit der früher durch $\overset{a}{log}$ b bezeichnete künstliche Logarithme, der bereits unendlich viele Werthe hat. Jede andre der speziellen Formen von b?a, wie solche alle durch b?[a||(*L*a$\pm$2a$\pi\cdot$i)] bezeichnet seyn werden, ist dagegen von dem künstlichen Logarithmen wesentlich verschieden.

Und ist a nicht positiv, so ist der allgemeine Logarithme, so wie jede seiner speziellen Formen, von jedem der bis jetzt definirten und betrachteten Logarithmen durchaus verschieden.

§. 689. Zusatz.

Ist die Basis a ganz allgemein, und α einer der Werthe von *log* a, so hat die spezielle Form b?(a||α) des allgemeinen Logarithmen b?a, unendlich viele Werthe welche alle in $\frac{log\,b}{\alpha}$ enthalten sind, dergestalt daß man als eine vollkommene Gleichung hat

$$b?(a\|\|\alpha) = \frac{log\,b}{\alpha},$$

unter *log* b alle dessen Werth verstanden, wie solche (§. 656. N. 12.) gefunden worden sind.

Denn da unter b?(a||α) jeder Werth x verstanden wird, welcher (a||α) d. h. $e^{x\alpha}$ dem b gleich macht, so hat man $e^{x\alpha} = b$, also

$$x\alpha = log\ b,$$

und

$$x = \frac{log\,b}{\alpha},$$

unter x jedweden seiner Werthe verstanden.

§. 690. Zusatz.

Weil aber der allgemeine Logarithme $b?a$, nach den unendlich vielen Werthen α des $log\,a$ unendlich viele spezielle Formen hat, so hat $b?a$ unendlich mal unendlich viele Werthe, alle in dem Quotienten $\frac{log\,b}{log\,a}$ enthalten, so daß man als eine vollkommene Gleichung hat:

$$b?a = \frac{log\,b}{log\,a},$$

wo rechts statt $log\,a$ nach und nach alle dessen Werthe, und, während für $log\,a$ einer der Werthe steht, zugleich statt $log\,b$ alle dessen unendlich vielen Werthe gesetzt werden.

§. 691. Zusatz.

Auf diese Weise finden sich aus (§. 656. N. 12) in Verbindung mit (§. 690.) sogleich alle die unendlich vielen Werthe des allgemeinen Logarithmen von $p_1+q_1\cdot i$ für die allgemeine Basis $(p+q\cdot i)$, nämlich

$$(p_1+q_1\cdot i)?(p+q\cdot i) = \frac{Lr_1+(\pm 2a\pi+\varphi_1)\cdot i}{Lr+(\pm 2b\pi+\varphi)\cdot i}$$

$$= \frac{Lr_1\cdot Lr+(\pm 2a\pi+\varphi_1)(\pm 2b\pi+\varphi)}{(Lr)^2+(\pm 2b\pi+\varphi)^2}$$

$$+i\cdot\frac{Lr\cdot(\pm 2a\pi+\varphi_1)-Lr_1\cdot(\pm 2b\pi+\varphi)}{(Lr)^2+(\pm 2b\pi+\varphi)^2},$$

welcher letztere Ausdruck alle unendlich mal unendlich vielen Werthe enthält und in allgemein-numerischer Form liefert, wenn man statt b nach und nach 0 und alle ganzen Zahlen setzt, und (während b irgend einen dieser Werthe hat, auch das (+) oder (—) Zeichen von $\pm 2b\pi$ bereits erwählt und bestimmt angenommen ist) hernach auch noch dem a jedesmal 0 und alle ganzen Zahlen unterlegt, und für jede noch überdies das (+) und (—) Zeichen abwechseln läßt; in welchem Ausdruck

$$r=+\sqrt{p^2+q^2},\quad r_1=+\sqrt{p_1{}^2+q_1{}^2},$$

$$Cos\,\varphi=\frac{p}{r},\ Sin\,\varphi=\frac{q}{r},\ Cos\,\varphi_1=\frac{p_1}{r_1},\ Sin\,\varphi_1=\frac{q_1}{r_1}$$

ist, und wo φ und φ_1 innerhalb der 4 ersten Quadranten genommen werden.

Anmerkung. Dieselbe Formel enthält aber nicht unendlich mal unendlich viele, sondern bloß unendlich viele Werthe, wenn man zur Rechten unter b bereits eine bestimmte Zahl sich denkt und das (+) oder (—) Zeichen in $\pm 2b\pi$ bereits bestimmt gewählt hat; und es stellt dann derselbe Ausdruck zur Rechten von dem allgemeinen Logarithmen

$$(p_1+q_1\cdot i)?(p+q\cdot i)$$

nur die spezielle Form

$$(p_1+q_1\cdot i)?[(p+q\cdot i)||Lr+(\pm 2b\pi+\varphi)\cdot i]$$

d. h. nur alle diejenigen Werthe von x vor, welche

$$[(p+q\cdot i)||Lr+(\pm 2b\pi+\varphi)\cdot i]^x$$

d. h.

$$e^{x\cdot[Lr+(\pm 2b\pi+\varphi)\cdot i]}$$

dem gegebenen $p_1+q_1\cdot i$ gleich machen.

§. 692. Zusatz.

Setzt man in der Formel für $(p_1+q_1\cdot i)?(p+q\cdot i)$ den mit i multiplizirten Theil des Ausdrucks zur Rechten des (=) Zeichens der Null gleich, so erhält man die Beziehung

$$Lr\cdot(\pm 2a\pi+\varphi_1) = Lr_1\cdot(\pm 2b\pi+\varphi),$$

welche zwischen p, q, p_1 und q_1 statt finden muß, wenn unter allen unendlich mal unendlich vielen Werthen des allgemeinen Logarithmen von $p_1+q_1\cdot i$ für die Basis $p+q\cdot i$, reele seyn sollen.

§. 693. Zusatz.

Sind a und b beide positiv, so ergibt sich aus (§. 691.)

1) $$b?a = \frac{Lb\cdot La+(\pm 2a\pi)(\pm 2b\pi)}{(La)^2+4b^2\pi^2} + i\cdot\frac{La\cdot(\pm 2a\pi)-Lb\cdot(\pm 2b\pi)}{(La)^{b2}+4b^2\pi^2};$$

2) $$(-b)?a = \frac{Lb\cdot La+(\pm 2a+1)\pi\cdot(\pm 2b\pi)}{(La)^2+4^2\pi^2} + i\cdot\frac{La\cdot(\pm 2a+1)\pi-Lb\cdot(\pm 2b\pi)}{(La)^2+4b^2\pi^2};$$

3) $$b?(-a) = \frac{Lb\cdot La+(\pm 2a\pi)(\pm 2b+1)\pi}{(La)^2+(\pm 2b+1)^2\pi^2} + i\cdot\frac{La\cdot(\pm 2b\pi)-Lb\cdot(\pm 2b+1)\pi}{(La)^2+(\pm 2b+1)^2\pi^2};$$

$$4)\ (-b)^?(-a) = \frac{Lb \cdot La + (\pm 2a+1)\pi \cdot (\pm 2b+1)\pi}{(La)^2 + (\pm 2b+1)^2\pi^2}$$
$$+ i \cdot \frac{La(\pm 2a+1)\pi - Lb \cdot (\pm 2b+1)\pi}{(La)^2 + (\pm 2b+1)^2\pi^2};$$

wo allemal die Ausdrücke zur Rechten alle unendlich mal unendlich vielen Werthe des allgemeinen Logarithmen zur Linken enthalten.

Und allemal sind die Beziehungen zwischen a und b gefunden, unter denen unter diesen Werthen reele sich vorfinden, wenn man den mit i multiplizirten Theil, $= 0$ setzt.

Anmerkung. In dem Sinne der speziellen Formen eines allgemeinen Logarithmen, gibt es also Logarithmen für negative, ja für imaginäre Basen, die unter ihren Werthen auch reele haben können.

Weil sich aber diese Logarithmen allemal aus natürlichen Logarithmen zusammensetzen lassen, so kann die Art und Weise, wie mit ihnen operirt wird, zu lehren, nur von sehr untergeordnetem Interesse erscheinen; und deshalb soll hier von denselben nicht weiter mehr die Rede seyn.

Zweite Abtheilung.

Gebrauch der gefundenen Werthe der allgemeinen Potenzen. Bestimmung aller Werthe einiger aus solchen allgemeinen Potenzen zusammengesetzter Ausdrücke.

---

§. 694. Aufgabe.

Es ist m eine absolute ganze Zahl, a dagegen eine beliebige absolute Zahl, man soll

$$a^m - x^m \quad \text{und} \quad a^m + x^m$$

in lauter reele Faktoren vom ersten oder zweyten Grade zerlegen.

Auflösung. Man erhält aus $\alpha - x$ alle einfachen Faktoren, wenn man statt α nach und nach alle Wurzelwerthe der Gleichungen

$$a^m - x^m = 0 \quad \text{und} \quad a^m + x^m = 0$$

setzt.

Nun sind alle Wurzelwerthe dieser Gleichungen enthalten in den Formeln

$$a \cdot \sqrt[m]{1} \quad \text{und} \quad a \cdot \sqrt[m]{-1}$$

oder in den Formeln

$$(A)\cdots \qquad a \cdot \left(Cos \frac{2m_1\pi}{m} + i \cdot Sin \frac{2m_1\pi}{m} \right)$$

$$\text{und} \qquad a \cdot \left(Cos \frac{(2m_1+1)\pi}{m} + i \cdot Sin \frac{(2m_1+1)\pi}{m} \right),$$

oder in den Formeln

$$(B)\cdots \qquad a \cdot \left(Cos \frac{2m_1\pi}{m} - i \cdot Sin \frac{2m_1\pi}{m} \right)$$

$$\text{und} \qquad a \cdot \left(Cos \frac{(2m_1+1)\pi}{m} - i \cdot Sin \frac{(2m_1+1)\pi}{m} \right),$$

wo statt m, nach und nach $0, 1, 2, 3, \cdots$ bis $m-1$ gesetzt wird, und wo die Formeln (B) dieselben Werthe geben, wie die (A).

Es sind daher die einfachen Faktoren von $a^m - x^m$, enthalten in der Formel

$$(C)\cdots \qquad a \cdot \left(Cos \frac{2m_1\pi}{m} + i \cdot Sin \frac{2m_1\pi}{m} \right) - x$$

und auch in der Formel

$$(D)\cdots \qquad a \cdot \left(Cos \frac{2m_1\pi}{m} - i \cdot Sin \frac{2m_1\pi}{m} \right) - x,$$

wo jedoch die Formel (D) dieselben m Faktoren in umgekehrter Ordnung liefert, wenn in der erstern (C) $0, 1, 2, 3, \cdots$ bis $m-1$ statt m_1, in der zweyten (D) dagegen $1, 2, 3, 4 \cdots$ bis m statt m_1 gesetzt wird. Sondert man aber von der erstern Reihe von m Faktoren, den ersten für $m_1 = 0$, so wie in der andern Reihe den letzten für $m_1 = m$, (welcher genau derselbe ist) ab, so bleiben noch $m-1$ einfache Faktoren, welche aus (C) für $m_1 = 1, 2, 3, \cdots m-1$, und auch aus (D) für $m_1 = 1, 2, 3, \cdots m-1$, aus letztern jedoch genau in umgekehrter Ordnung hervorgehen.

Ist nun m eine ungerade Zahl $= 2n+1$, so ist $m-1$ eine gerade Zahl $= 2n$, und wenn man den νten Faktor vom Anfange, für $m_1 = \nu$ aus (C), nämlich

$$(E)\cdots \qquad a\cdot\left(Cos\frac{2\nu\pi}{m}+i\cdot Sin\frac{2\nu\pi}{m}\right)-x$$

mit dem νten Faktor vom Ende, wie solcher aus (D) für $m_1=\nu$ hervorgeht, nämlich mit

$$(F)\cdots \qquad a\cdot\left(Cos\frac{2\nu\pi}{m}-i\cdot Sin\frac{2\nu\pi}{m}\right)-x$$

multiplizirt, so erhält man einen doppelten Faktor

$$(G)\cdots \qquad a^2-2ax\cdot Cos\frac{2\nu\pi}{m}+x^2,$$

welcher für $\nu=1, 2, 3, \cdots n$ (wo $n=\frac{1}{2}(m-1)$ ist), n doppelte Faktoren liefert, die $2n$ oder $m-1$ einfache Faktoren enthalten, und in Verbindung mit dem ersten abgesonderten Faktor, der für $m_1=0$ aus (C) hervorgieng, nämlich mit $a+x$, alle m einfachen Faktoren des gegebenen Ausdrucks ausmachen, während die doppelten Faktoren alle reel sind.

Ist aber m eine gerade Zahl $2n$, so ist $m-1$ eine ungerade Zahl, und der doppelte Faktor (G) liefert dann für $\nu=1,2,3,\cdots n-1$ nur $n-1$ doppelte Faktoren (wo $n-1=\frac{1}{2}m-1$ ist), während von den $m-1$, oben aus (C oder D) für $m_1=1,2,3,\cdots m-1$, hervorgegangenen einfachen Faktoren einer in der Mitte bleibt, für $m_1=n$ (der nte vom Anfange und der nte vom Ende), der für $\nu=n=\frac{1}{2}m$ in (G) mit sich selbst multiplizirt steht, so daß er, der $=-(a-x)$, oder $=a-x$ ist, aus der Formel (G) nicht selbst, sondern dafür sein Quadrat sich ergibt; während dieselbe Formel (G) für $\nu=0$, aus leicht in die Augen fallenden Gründen, es mag m eine gerade oder ungerade Zahl seyn, das Quadrat des ersten abgesonderten einfachen Faktors $a-x$ liefern muß.

Aus demselben Grunde findet man aber die reelen doppelten Faktoren von a^m+x^m enthalten in der Formel

$$a^2-2ax\cdot Cos\frac{(2\nu+1)\pi}{m}+x^2,$$

wo statt ν, nach und nach $0,1,2,3\cdots$ bis $m-1$ gesetzt werden kann, wo man aber, um alle diese doppelten Faktoren zu haben,

für ν nur bis zu $\frac{1}{2}(m-1)$ oder bis zu $\frac{1}{2}(m-2)$ zu gehen hat, je nachdem m eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Nur muß man bemerken daß diese Formel für denjenigen Werth von ν keinen doppelten Faktor giebt, für welchen $Sin\frac{(2\nu+1)\pi}{m}=0$ ist, (also wennn m eine ungerade Zahl ist und $\nu=\frac{1}{2}(m-1)$ genommen wird), weil dann ein reeler einfacher Faktor existirt, nehmlich $a+x$, und außer ihm kein zweiter mehr, mit dem die Multiplikation statt finden könnte.

§. 695. Zusatz.

Sollen die reelen doppelten Faktoren von

$$a^{2m}-2a^m x^m \cdot Cos\varphi + x^{2m}$$

gefunden werden, so liefert die Gleichung

$$x^{2m}-2a^m\, Cos\varphi \cdot x^m + a^{2m}=0$$

nach (§. 545.) die 2m Wurzelwerthe

$$x=a\cdot\sqrt[m]{Cos\varphi \pm i\cdot Sin\varphi} \quad \text{oder nach (§. 683. N. 6.)}$$

$$x=a\cdot\left(Cos\frac{2m_1\pi+\varphi}{m}\pm i\cdot Sin\frac{2m_1\pi+\varphi}{m}\right)^{*)}$$

wenn statt m, nach und nach $0,1,2,3,\cdots$ bis $m-1$ gesetzt wird. Multiplizirt man aber den einfachen Faktor

---

*) Man kann auch nach (§. 683. N. 6.)

$$x=a\cdot\left(Cos\frac{2m_1\pi-\varphi}{m}\mp i\cdot Sin\frac{2m_1\pi-\varphi}{m}\right)$$

nehmen und erhält dann als doppelten Faktor

$$a^2-2ax\cdot Cos\frac{2\nu\pi-\varphi}{m}+x^2,$$

welcher dann dieselben doppelten Faktoren, wie der im Texte gefundene liefert, nur in umgekehrter Ordnung, wenn man nämlich jedesmal nach und nach $1,2,3,4,\cdots$ m statt ν setzt, wo jedoch für $\nu=m$ derselbe Faktor sich ergibt, wie für $\nu=0$.

$$a \cdot \left(Cos \frac{2\nu\pi + \varphi}{m} + i \cdot Sin \frac{2\nu\pi + \varphi}{m} \right) - x$$

wo ν irgend einer der Werthe von m_1 ist, mit dem andern Faktor

$$a \cdot \left(Cos \frac{2\nu\pi + \varphi}{m} - i \cdot Sin \frac{2\nu\pi + \varphi}{m} \right) - x,$$

so erhält man

$$a^2 - 2ax \cdot Cos \frac{2\nu\pi + \varphi}{m} + x^2;$$

und diese Formel gibt alle gesuchten doppelten reelen Faktoren von

$$a^{2m} - 2a^m x^m \cdot Cos\varphi + x^{2m},$$

wenn man statt ν nach und nach $0, 1, 2, 3$ bis $m-1$ setzt.

Anmerkung. Dieß ist das Theorem des Cotes (§. 694.) mit der Erweiterung des Moivre (§. 695.).

Note. Nimmt man eine Kreislinie (Fig. 12. und Fig. 13.), theilt solche in m gleiche Theile von A_0 an gerechnet, wie (Fig. 12.) zu sehen ist, wenn $m = 2n$, (Fig. 13.) dagegen, wenn $m = 2n+1$ ist; nimmt man ferner $CM = x$, den Radius $= a$, während C der Mittelpunkt ist; so ist allemal das Produkt aller von M nach den Theilungspunkten gehenden m Linien

$$\text{I. } MA_0 \cdot MA_1 \cdot MA_2 \cdot MA_3 \cdots\cdots MA_{m-3} \cdot MA_{m-2} \cdot MA_{m-1} = a^m - x^m.$$

Denn es ist nach dem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie z. B. $(MA_3)^2 = (CM)^2 + (CA_3)^2 - 2CM \cdot CA_3 \cdot Cos A_0 CM_3$;
also in (Fig. 12.), wo $m = 2n$, d. h. wo m gerade ist,

$$MA_0 = a - x$$

$$MA_1 = MA_{m-1} = \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{2\pi}{m} + x^2}$$

$$MA_2 = MA_{m-2} = \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{4\pi}{m} + x^2}$$

$$MA_3 = MA_{m-3} = \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{6\pi}{m} + x^2}$$

u. s. f. und

$$MA_n = MA_{\frac{1}{2}m} = a + x.$$

Dagegen ist in (Fig. 13.), wo $m = 2n+1$, d. h. wo m ungerade ist, alles gerade so, nur daß jetzt keine dieser Linien $= a+x$ wird, weil jetzt

$$MA_n = MA_{n+1} = \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{(m-1)\pi}{m} + x^2}$$

wird. In beiden Fällen fällt aber die Behauptung, dem eben vorangegangenen zu Folge, in die Augen.

Halbirt man in beiden Figuren (12. und 13.), also mag m eine gerade oder ungerade Zahl seyn, jeden der Theile A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 ꝛc. ꝛc., und zieht man von M aus nach allen diesen Halbirungspunkten wiederum gerade Linien, so ist

II. das Produckt dieser Linien allemal $= a^m + x^m$,

wie in die Augen fällt, wenn man bedenkt, daß nun die Bogen von A_0 aus gerechnet, beziehlich $\frac{\pi}{m}$, $\frac{3\pi}{m}$, $\frac{5\pi}{m}$, ꝛc. ꝛc. werden, während in (Fig. 13.) wo $m = 2n+1$, d. h. ungerade ist, eine dieser Linien

$$= \sqrt{a^2 - 2ax \cdot Cos\frac{m\pi}{m} + x^2} = a+x \quad \text{wird.}$$

Und nimmt man (Fig. 14) zuerst $A_0A_1 = \frac{\varphi}{m}$, und theilt dann von A_1 aus die ganze Kreislinie noch in m gleiche Theile, so wird $A_0A_2 = \frac{2\pi+\varphi}{m}$, $A_0A_3 = \frac{4\pi+\varphi}{m}$, $A_0A_4 = \frac{6\pi+\varphi}{m}$, u. s. w. f.; und es ist daher das Produckt der Quadrate der m Linien

$$III.\ MA_1^2 \cdot MA_2^2 \cdot MA_3^2 \cdot MA_4^2 \ldots MA_{m-2}^2 \cdot MA_{m-1}^2 \cdot MA_m^2 = a^{2m} - 2a^m x^m \cdot Cos\,\varphi + x^{2m},$$

nach dem vorstehenden Paragraphen.

Solche geometrische Betrachtungen können und dürfen aber in unsere Analysis nicht eingehen, weil hier selbst die allerersten Elemente der Geometrie nicht als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, dem Zwecke und der Anlage unseres Systems zufolge.

§. 696. Aufgabe.

Alle Werthe der Summe

$$(a+b\cdot i)^x + (a-b\cdot i)^x$$

in allgemein-numerischen Zahlen, d. h. in Ausdrücken von der Form $P+Q\cdot i$ herzustellen, unter der Voraussetzung daß a und b reel sind.

Auflösung.

Nach (§. 675.) hat man als vollkommene Gleichung

1) $(a+b\cdot i)^x = e^{x\cdot Lr}\cdot[Cos(2a\pi+\varphi)x+i\cdot Sin(2a\pi+\varphi)x]$;

und wenn $-i$ statt i gesetzt wird

2) $(a-b\cdot i)^x = e^{x\cdot Lr}\cdot[Cos(2b\pi+\varphi)x-i\cdot Sin(2b\pi+\varphi)x]$,

wenn $r = +\sqrt{a^2+b^2}$, $Cos\,\varphi = \frac{a}{r}$, $Sin\,\varphi = \frac{b}{r}$, und φ innerhalb der 4 ersten Quadranten genommen wird, wenn ferner a und b Null und alle positiven und auch alle negativen ganzen Zahlen vorstellen.

Nun ist aber nach (§. 628. N. 6. und N. 7.)

$$Cos(2a\pi+\varphi)x+Cos(2b\pi+\varphi)x = 2\,Cos[(a+b)\pi+\varphi]x\cdot Cos(a-b)\pi x;$$

$$Sin(2a\pi+\varphi)x-Sin(2b\pi+\varphi)x = 2\,Cos[(a+b)\pi+\varphi]x\cdot Sin(a-b)\pi x;$$

folglich wenn man (1.) und (2.) addirt:

3) $(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x$

$= 2\cdot e^{x\cdot Lr}\cdot Cos[(a+b)\pi+\varphi]x\cdot Cos\big((a-b)\pi x+i\cdot Sin(a-b)\pi x\big)$,

wo auf der rechten Seite unendlich mal unendlich viele Werthe stehen, weil jeder einzelne der unendlich vielen Werthe von $(a+b\cdot i)^x$, zu jedem einzelnen der Werthe von $(a-b\cdot i)^x$ addirt werden mußte.*)

Setzt man nun $a-b = c$, also $a = b+c$ und $a+b = 2b+c$, so erhält man, aus (3.) noch nachstehende vollkommene Gleichung:

4) $(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x$

$= 2\cdot e^{x\cdot Lr}\cdot Cos[(2b+c)\pi+\varphi]x\cdot\big(Cos\,c\pi x+i\cdot Sin\,c\pi x\big)$,

---

*) Hierin liegt der Grund, warum man bereits in (2.) nicht mehr a, sondern dafür b gesetzt hat, weil nur dann bei dem Addiren, jeder beliebige Werth von $(a+b\cdot i)^x$, zu jedem beliebigen Werthe von $(a-b\cdot i)^x$ addirt wird, wie solches die Aufgabe gerade verlangt.

welche Formel die Aufgabe vollkommen löſt, ſo oft x reel iſt, wenn man nur dem c nach und nach alle möglichen poſitiven und negativen ganzen Zahlen und Null, und für jeden Werth von c, auch dem b nach und nach alle poſitiven und negativen ganzen Zahlen und auch Null, vorſtellen läßt.

Iſt dagegen x ſelber imaginär und $= \alpha + \beta \cdot i$, ſo iſt die Formel (4.) zwar noch richtig, aber die Ausdrücke, welche ſie liefert, ſind noch nicht in der gewünſchten (allgemein-numeriſchen) Form. Man muß daher in dieſem Falle entweder den Ausdruck (4.) weiter verwandeln, oder, was faſt noch beſſer iſt, die Werthe von $(a+b\cdot i)^{\alpha+\beta\cdot i}$ und $(a-b\cdot i)^{\alpha+\beta\cdot i}$ ſogleich direckt aus (§. 674.) entnehmen, und auf die vorgeſchriebene Weiſe addiren. — Man erhält dann für $x = \alpha+\beta\cdot i$,

5) $$(a+b\cdot i)^x = e^{\alpha\cdot Lr-\beta(2a\pi+\varphi)}\cdot[Cos(\beta\cdot Lr+\alpha(2a\pi+\varphi)) + i\cdot Sin(\beta\cdot Lr+\alpha(2a\pi+\varphi))]$$

und, —b ſtatt b ſetzend, wodurch φ in $-\varphi$ ſich verwandelt:

6) $$(a-b\cdot i)^x = e^{\alpha\cdot Lr-\beta(2b\pi-\varphi)}\cdot[Cos(\beta\cdot Lr+\alpha(2b\pi-\varphi)) + i\cdot Sin(\beta\cdot Lr+\alpha(2b\pi-\varphi))];$$

folglich, wenn man addirt, erhält man ſogleich die verlangten Werthe in der verlangten Form.

Anmerkung. Man konnte auch

$$(a+b\cdot i)^x = r^x\cdot[Cos\,\varphi x + i\cdot Sin\,\varphi x]$$

und $$(a-b\cdot i)^x = r^x\cdot[Cos\,\varphi x - i\cdot Sin\,\varphi x]$$

nehmen, und unter r^x alle unendlich vielen Werthe dieſer Potenz verſtehen. Dann erhielt man

$$(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x = (r^x+r^x)\cdot Cos\,\varphi x + i\cdot(r^x-r^x)\cdot Sin\,\varphi x,$$

wo aber ſtatt r^x+r^x nicht $2\cdot r^x$ und ſtatt r^x-r^x nicht Null geſetzt werden darf, weil das erſtere r^x ſelten, und hier nur Ausnahmsweiſe, denſelben ſeiner Werthe vorſtellt, als das zweite. — Iſt aber x eine Differenz ganzer Zahlen, ſo iſt r^x nur eindeutig und dann geht die obige Gleichung ohne weiteres in

$$(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x = 2\cdot r^x\cdot Cos(\varphi x)$$

über.

Daß La Grange und fast alle anderen Analysten diese, der Vieldeutigkeit der Potenzen entsprechende Eigenthümlichkeit des Operirens, übersehen haben, ist Ursache der vielen unrichtigen allgemeinen Resultate des Kalkuls, wie wir solche z. B. in der Leç. XI. der Leçons sur le Calcul des Fonctions vorfinden. Vgl. Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Math. Berlin, 1823.

§. 697. Zusatz.

Will man, im Falle x reel ist, alle reelen Werthe von $(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x$ haben, so setze man nur in der Formel (4. des §. 696.)

$$Sin\ c\pi x = 0, \quad \text{also daß} \quad Cos\ c\pi x = \pm 1 \text{ wird,}$$

und für diese Werthe von c liefert dann die Formel (4. des §. 696.) alle reelen Werthe, und zwar

$$= \pm 2e^{x\cdot Lr}\cdot Cos\,((2b+c)\pi+\varphi)x.$$

Anmerkung. Aus

$$(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x = (r^x+r^x)\cdot Cos\,\varphi x+i\cdot(r^x-r^x)\cdot Sin\,\varphi x$$

erhält man dagegen nicht alle reelen Werthe, wenn man $r^x-r^x=0$ setzt, d. h. wenn man für das erstere r^x denselben Werth nimmt, wie für das andere; denn der Ausdruck $2r^x\cdot Cos\,\varphi x$, in welchen dann die Formel zur Rechten übergeht, enthält selbst noch unendlich viele Werthe, von denen fast alle imaginär seyn werden, in so ferne r^x noch eine allgemeine Potenz ist.

§. 698. Zusatz.

Sucht man alle Werthe des Ausdrucks

$$\sqrt[n]{a+b\cdot i} + \sqrt[n]{a-b\cdot i},$$

so darf man nur in (N. 4. des §. 696.) $\frac{1}{n}$ statt x setzen, und man bekommt dann als vollkommene Gleichung

1) $\sqrt[n]{a+b\cdot i}+\sqrt[n]{a-b\cdot i}=$

$$2.\sqrt[n]{r\cdot Cos\frac{(2b+c)\pi+\varphi}{n}}\cdot\left[Cos\frac{c\pi}{n}+i\cdot Sin\frac{c\pi}{n}\right].$$

Nimmt man aber direkt (§. 682. N. 5.) zu Hülfe, so findet sich noch bequemer

2) $\sqrt[n]{a+b\cdot i}+\sqrt[n]{a-b\cdot i}=$

$$2\sqrt[n]{r}\cdot Cos\frac{(m_1+n_1)\pi\pm\varphi}{n}\cdot\left[Cos\frac{(m_1-n_1)\pi}{n}\pm i\cdot Sin\frac{(m_1-n_1)\pi}{n}\right],$$

wo für m_1 und n_1, unabhängig von einander, die n Werthe 0, 1, 2, 3, ... n—1 gesetzt werden müssen, so daß man in Allem $n\cdot n$ d. h. n^2 verschiedene Werthe bekommt, in so ferne man nur alle (+) Zeichen, oder alle (—) Zeichen allein gelten läßt.

Sucht man aber unter diesen Werthen die reelen aus, so muß man

$$Sin\frac{(m_1-n_1)\pi}{n}=0,\text{ demnach }m_1=n_1$$

und $$Cos\frac{(m_1-n_1)\pi}{n}=1\text{*)}$$

setzen; und man erhält dann als unvollkommene Gleichung

3) $$\sqrt[n]{a+b\cdot i}+\sqrt[n]{a-b\cdot i}=2\sqrt[n]{r}\cdot Cos\frac{2n_1\pi\pm\varphi}{n},$$

wenn man statt n_1 nach und nach alle Werthe 0, 1, 2, 3, ... bis n—1 setzt, und entweder bloß das (+) Zeichen oder bloß das (—) Zeichen genommen sich denkt; oder endlich wenn man statt n_1 bloß 0, 1, 2, 3, bis $\frac{1}{2}(n-2)$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ setzt, dabei aber das (+) und (—) Zeichen zugleich gelten läßt.

---

*) Da nämlich $m_1<n$ und $n_1<n$ ist, so ist m_1-n_1 auch $<n$, folglich $\frac{m_1-n_1}{n}$ nie eine ganze Zahl, also nothwendig $m_1-n_1=0$.

§. 699. Zusatz.

Wendet man dies auf den irreduktiblen Fall der Kardan'schen Formel an, wo nämlich aus

$$x^3 + px + q = 0,$$

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}}$$

gefunden worden ist, und wo für gewisse Werthe von p und q, nämlich wenn p negativ und auch

$$\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3 \text{ negativ, } = -b^2 \text{ wird,}$$

so daß $b = +\sqrt{-(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}$ positiv gedacht ist, so hat man, wenn $-\tfrac{1}{2}q = a$ gesetzt wird, dasselbe

$$x, = \sqrt[3]{a + b \cdot i} + \sqrt[3]{a - b \cdot i}\ .$$

Nun sind aber alle Werthe dieser Summe zur Rechten nach (§. 698.)

$$= 2\sqrt[3]{r} \cdot Cos \frac{(m_1 + n_1)\pi \pm \varphi}{3}$$

$$\times \left[Cos \frac{(m_1 - n_1)\pi}{3} \pm i \cdot Sin \frac{(m_1 - n_1)\pi}{3} \right],$$

wo $r = +\sqrt{a^2 + b^2} = +\sqrt{-\tfrac{1}{27}p^3}$,

also $\sqrt[3]{r} = +\sqrt{-\tfrac{1}{3}p}$ ist,

wo $Cos\,\varphi = \dfrac{-\frac{1}{2}q}{r}$, $Sin\,\varphi = \dfrac{+\sqrt{-(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}}{r}$,

wo also φ im ersten oder im zweiten Quadranten liegt, je nachdem q negativ oder positiv ist, und wo statt m_1 und n_1, abwechselnd und unabhängig von einander, die Werthe 0, 1, 2 gesetzt werden, wenn man alle (+) Zeichen allein, oder alle (—) Zeichen allein gelten läßt.

Dieser Ausdruck zur Rechten enthält nun die 9 Werthe von $\sqrt[3]{a + b \cdot i} + \sqrt[3]{a - b \cdot i}$. Weil man aber aus (§. 287.) bereits weiß, daß x dasmal 3 reele Werthe hat, und sonst keinen weiter,

so braucht man dasmal nach (§. 698. N. 3.) bloß die reelen Werthe hiervon zu nehmen, und erhält

$$x = 2 \cdot \sqrt{-\tfrac{1}{3}p} \cdot Cos \frac{2n_1\pi \pm \varphi}{3},$$

wo statt n_1 die Werthe 0, 1 und 2 gesetzt werden, wenn man das (+) Zeichen allein, oder das (—) Zeichen allein nimmt, wo aber statt n_1 bloß 0 und 1 gesetzt wird, wenn das (+ und —) Zeichen zugleich genommen wird; so daß diese 3 Werthe beziehlich

$$2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p} \cdot Cos \tfrac{1}{3}\varphi,$$

$$2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p} \cdot Cos \frac{2\pi + \varphi}{3}$$

und $$2\sqrt{-\tfrac{1}{3}p} \cdot Cos \frac{2\pi - \varphi}{3}$$

seyn werden; und so kann man also nun die Rechnungen durchführen, auf welche (§. 275. Beisp. 4.) nur hingedeutet werden konnte.

§. 700. Zusatz.

Man konnte die Aufgabe des (§. 696.) blos mittelst des binomischen Lehrsatzes lösen, ohne trigonometrische Funktionen zu Hülfe zu nehmen. Es ist nehmlich

$$1)\ (a+b\cdot i)^x = a^x \cdot \left(1+\frac{b}{a}\cdot i\right)^x = a^x \cdot S\left[x_\alpha \cdot \frac{b^\alpha}{a^\alpha}\cdot i^\alpha\right]$$

und nach (§. 387.)

$$= a^x \cdot \left(S\left[(-1)^\alpha \cdot x_{2\alpha} \cdot \frac{b^{2\alpha}}{a^{2\alpha}}\right] + i \cdot S\left[(-1)^\alpha \cdot x_{2\alpha+1} \cdot \frac{b^{2\alpha+1}}{a^{2\alpha+1}}\right]\right)$$

und

$$2)\ (a-b\cdot i)^x =$$

$$a^x \cdot \left(S\left[(-1)^\alpha \cdot x_{2\alpha} \cdot \frac{b^{2\alpha}}{a^{2\alpha}}\right] - i \cdot S\left[(-1)^\alpha \cdot x_{2\alpha+1} \cdot \frac{b^{2\alpha+1}}{a^{2\alpha+1}}\right]\right),$$

wo die Ausdrücke rechts alle Werthe der allgemeinen Potenzen

links geben, wenn man statt a^x nach und nach alle ihre Werthe gesetzt denkt.

Es sind aber dann alle Werthe von

$$(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x$$

enthalten in der Formel

$$(C)\quad \begin{cases} (a^x+a^x)\cdot S\left[(-1)^a\cdot x_{2a}\cdot\frac{b^{2a}}{a^{2a}}\right] \\ \qquad +i\cdot(a^x-a^x)\cdot S\left[(-1)^a\cdot x_{2a+1}\cdot\frac{b^{2a+1}}{a^{2a+1}}\right], \end{cases}$$

wo statt a^x+a^x nicht $2\cdot a^x$, und statt a^x-a^x nicht 0 geschrieben werden darf, sondern wo statt des ersteren a^x (in a^x+a^x und in a^x-a^x) nach und nach alle dessen Werthe gesetzt werden müssen, während dann, bey jedem bestimmten dieser Werthe, zugleich statt des zweyten a^x wiederum alle dessen Werthe zu setzen sind.

Anmerkung 1. Man erhält aber hier nicht alle reelen Werthe der Summe $(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x$, dadurch, daß man in der Formel (C) das erste a^x jedesmal denselben Werth vorstellen läßt, als das zweyte. — Ist aber x einer Differenz ganzer Zahlen gleich, so sind die unendlich vielen Werthe von a^x alle einander gleich; und die Summe $(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x$ hat dann nur einen einzigen Werth, ausgedrückt durch

$$2\cdot a^x\cdot S\left[(-1)^a\cdot x_{2a}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{2a}\right].$$

Anmerkung 2. Der durch trigonometrische Funktionen dargestellte Ausdruck des Werthes von $(a+b\cdot i)^x+(a-b\cdot i)^x$ ist deshalb bequemer, nicht weil dieser letztere nur durch unendliche Reihen dargestellt ist (denn diesen Nachtheil oder diesen Vortheil hat jener auch, weil Sinus und Kosinus, ihrer Definition zu Folge, nichts anders sind, als unendliche Reihen), sondern weil man für jene durch Sinus und Kosinus bezeichneten Reihen eine große Anzahl einfacher Formeln hat, nach denen sie einem einfachen Kalkul unterworfen werden können, was bei andern Reihen nicht so leicht wird. — Für die numerische Bestimmung

eines solchen Ausdruckes endlich ist jene Form des (§. 696.) um so bequemer, weil die numerischen Näherungswerthe jener durch Sinus und Kosinus bezeichneten unendlichen Reihen, ein für allemal schon bestimmt und in eine Tabelle niedergelegt sind; weil endlich andere Reihen nicht allemal konvergent sind, und häufig für einen gegebenen Fall erst in andere konvergente und schnell konvergente Reihen umgeformt werden müssen.

Gedruckt bei den Gebr. Unger,
Markgrafenstraße Nr. 51.

Von dem Verfasser dieses Buches, Professor Dr. Martin Ohm, sind früher bei mir erschienen:

Versuch
einer kurzen, gründlichen und deutlichen,
auch Nichtmathematikern
Verständlichen Anweisung,
10—14 jährigen Knaben in Untermittelklassen eines Gymnasiums, in obern Klassen einer gelehrten Vorbereitungsschule, desgleichen in höhern Bürger- und technischen Vorbereitungsschulen, zu einem leichten, gründlichen und wissenschaftlichen Studium der Mathematik fähig zu machen.
Als Einleitung in seine Elementar-Mathematik, auch für den Selbstlernenden als Kommentar zu selbiger bearbeitet. Mit einer Formeltabelle und einer Figurentafel, gr. 8. 1827. 1 Rthlr.

Die
reine Elementar-Mathematik,
1ster Band. gr. 8. 1825 2¼ Rthlr.
Dieser erste Theil führt auch den Titel:
Die Arithmetik
bis
zu den höhern Gleichungen,
weniger abstrakt, sondern mehr anschaulich
und
leicht faßlich aber möglichst gründlich und wissenschaftlich,
zunächst
für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin,
dann auch
zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet,
und mit sehr vielen Uebungs-Beyspielen versehen.

Die
reine Elementar-Mathematik,
2ter Band mit 3 Figurentafeln. gr. 8. 1826. 2 Rthlr.
Auch unter dem Titel:
Die allgemeine Größenlehre
und
die ebene Raumgrößenlehre
mit Inbegriff der analytischen und der ebenen Trigonometrie, zunächst für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin, dann auch zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet und mit vielen Uebungs-Beyspielen versehen.

Die
reine Elementar-Mathematik,
3ter oder letzter Band, mit 5 Figurentafeln. gr.8. 1826. 2 Rthlr.
Auch unter dem Titel:
Die
körperliche Raum-Größen-Lehre
mit Inbegriff der sphärischen Trigonometrie, der beschreibenden Geometrie, der Projektion der Schatten und der Perspektive; zunächst für seine Vorlesungen an der Königl. Bau-Akademie zu Berlin, dann auch zum Gebrauche an andern ähnlichen Lehr-Anstalten, besonders aber an Gymnasien und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet und mit Uebungs-Beyspielen versehen.

Die
analytische und höhere Geometrie
in ihren Elementen.
Mit vorzüglicher Berücksichtigung
der Theorie der Kegelschnitte.
Erste Fortsetzung seiner reinen Elementar-Mathematik.
Mit zwei Figurentafeln. gr. 8. 1826. 2 Rthlr.
Auch unter dem Titel:
Algebraische, geometrische, und trigonometrische
Uebungen
im Gewande
einer analytischen Geometrie.
Als erste Fortsetzung
seiner reinen Elementar-Mathematik.

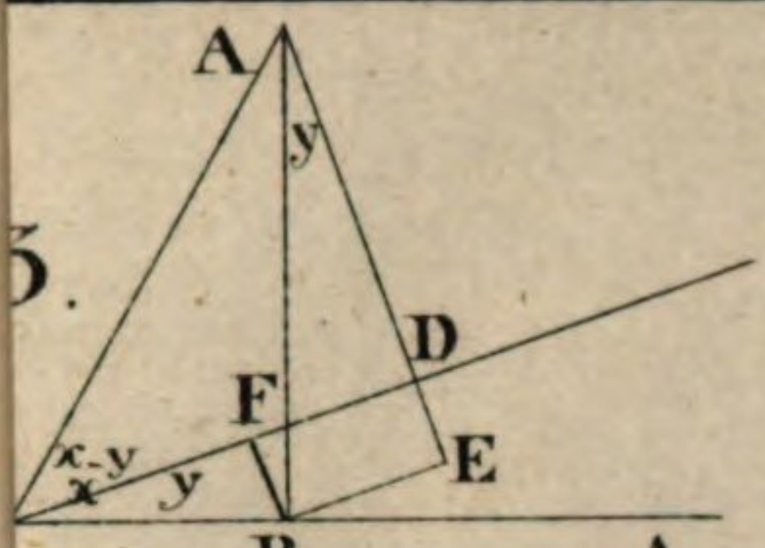
Versuch
eines vollkommen consequenten
Systems der Mathematik,
Erster Theil, Arithmetik und Algebra enthaltend.
Zweyte umgearbeitete, durch viele neue erläuternde Beyspiele verdeutlichte Ausgabe. gr. 8. 1828. 2 Rthlr.
Auch unter dem Titel:
Lehrbuch
der
niedern Analysis.
1ster Theil, Arithmetik und Algebra enthaltend.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

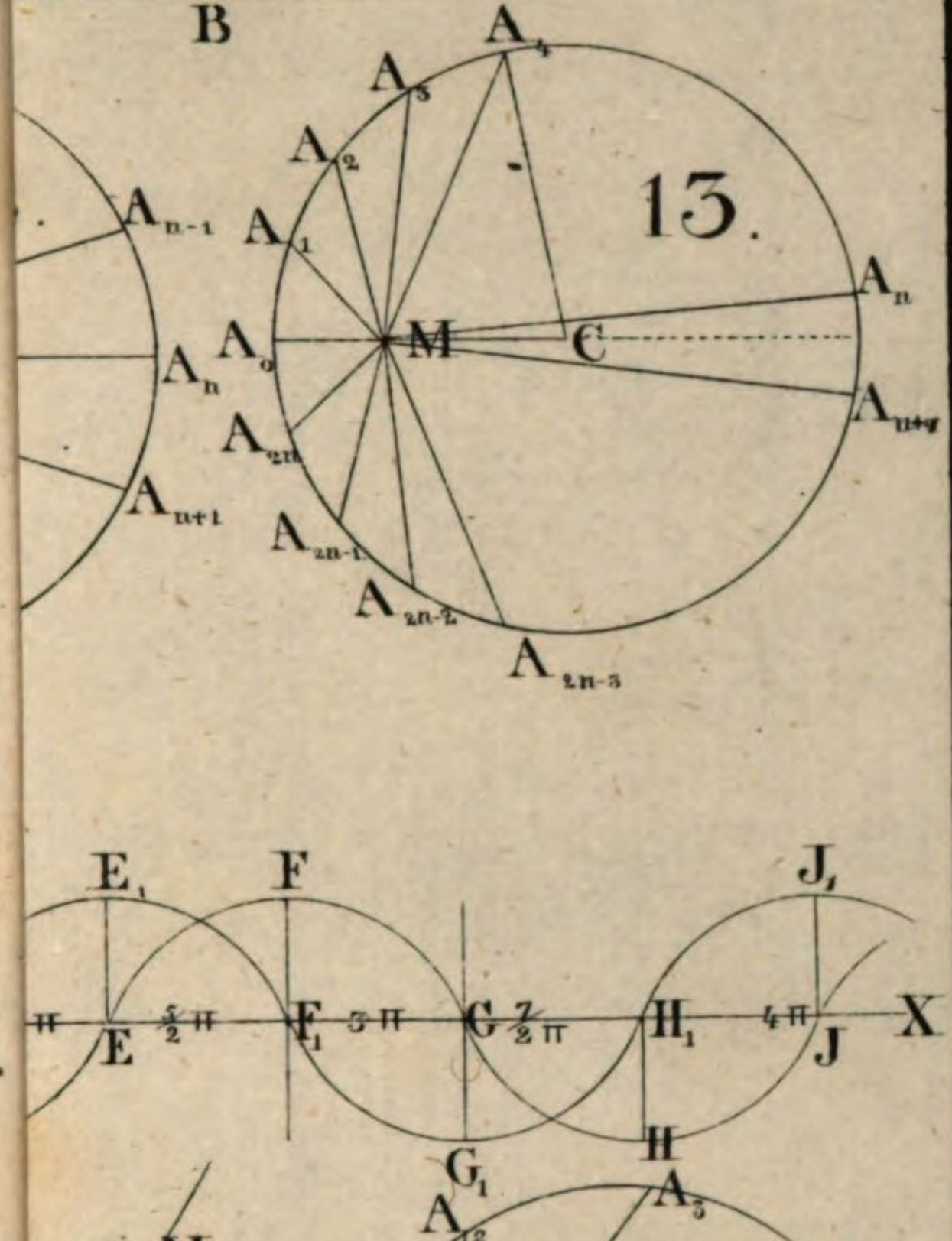
Die Lehre
vom
Größten und Kleinsten.
Mit einer
Einleitung und einem Anhange,
von denen die erstere
Hülfssätze aus der Differential- und Integral-Rechnung,
der letztere dagegen eine
etwas allgemeinere Variations-Rechnung enthält,
zu seinen Vorlesungen und zum Selbst-Unterrichte bearbeitet.
gr. 8. 1825. $1\frac{3}{4}$ Rthlr.

Berlin, den 1sten Januar 1829. T. H. Riemann.

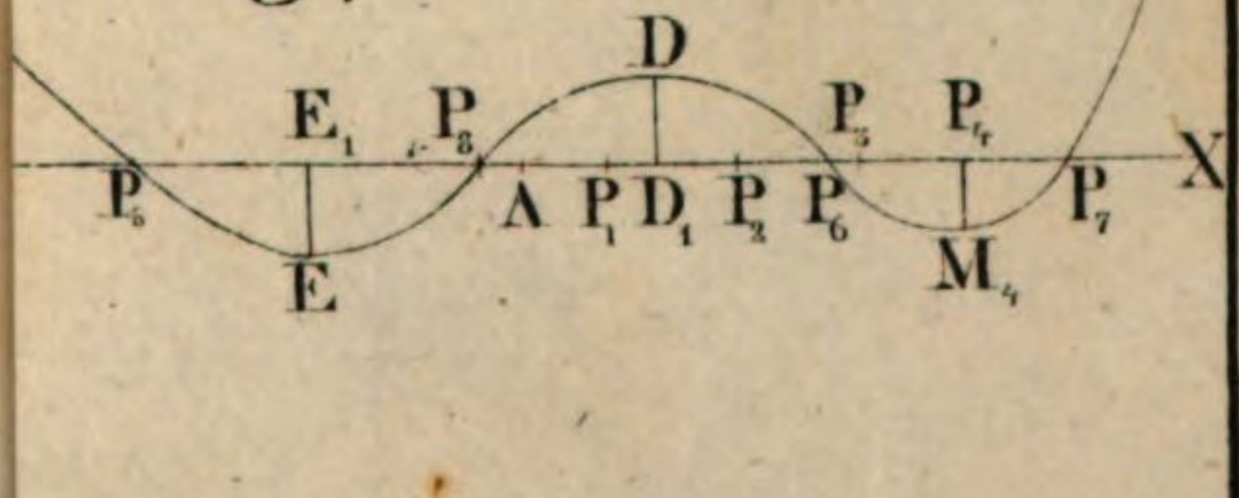
5.


A
y
D
F
E
x-y
x
y
B

13.


A1
A2
A3
A4
An-1
An
An+1
A0
M
C
A2n
A2n-1
A2n-2
A2n-3
E1
F
J1
G1
H
H1
J
X
M4
P3
P4
14.
Am
Am-1
Am-2

8.


D
E1
P8
P5
P6
P7
X
A
P1
D1
P2
E

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik

Bd.: 2

Berlin 1829

Math.u. 144 k-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594165-0